El concreto armado en las estructuras

- Teoría elástica
- Diseño plástico

Arq. Vicente Pérez Alamá

trillas

Contenido:

Concreto - Acero de refuerzo - Elementos sometidos a flexión
Vigas rectangulares doblemente reforzadas - Secciones T, L e I
Columnas sometidas a carga axial - Columnas sometidas a carga excéntrica
Fuerza cortante y tensión diagonal
Elementos sometidos a torsión - Adherencia y longitud de desarrollo
Estructuras continuas - Pórticos
Losas que trabajan en una dirección - Losas que trabajan en dos direcciones
Losas con cargas lineales y cargas concentradas - Losas nervadas
Cimientos y cimentaciones
Estudio y cálculo de un edificio para oficinas

A mi esposa y a mis hijos siempre con amor.
Con agradecimiento a mis alumnos, ex-alumnos,
profesores y amigos, por sus comentarios y sugerencias.

El concreto armado en las estructuras

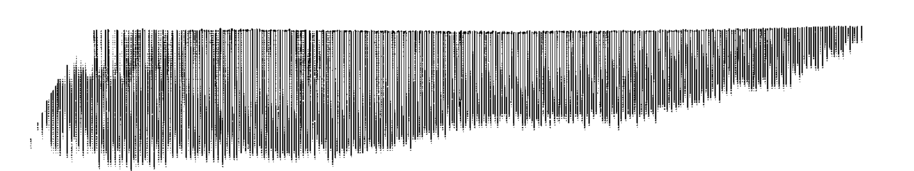
• Teoría elástica
• Diseño plástico

Arq. Vicente Pérez Alamá









Catalogación en la fuente

Pérez Alamá, Vicente
El concreto armado en las estructuras : diseño plástico y teoría elástica. -- 6a. ed. -- México : Trillas, 2005.
544 p. ; 27 cm.
Referencias bibliográficas
ISBN 968-24-6561-3

1. Concreto armado - Construcciones - Tablas, cálculos, etc. I. t.

D- 620.1374'P565tc *LC- TA445'P4.2* *308*

Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
C.P. 03340, México, D. F.
Tel. 56 88 42 33, FAX 56 04 13 64

División Comercial, Calz. de la Viga 1132, C.P. 09439
México, D. F., Tel. 56 33 09 95, FAX 56 33 08 70

www.trillas.com.mx

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. núm. 158

Primera edición, 1982
Segunda edición, 1975
Tercera edición, 1977
Cuarta edición, 1977
Reimpresiones, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1984, 1986 y 1988
Quinta edición, 1990 (ISBN 968-24-3868-3)
Reimpresiones, 1991, 1994, 1996, y 2000

Sexta edición, febrero 2005
ISBN 968-24-6561-3

Impreso en México
Printed in Mexico

Esta obra se terminó de imprimir el 16 de febrero del 2005, en los talleres de Rodefi Impresores, S. A. de C. V.
Se encuadernó en Rústica y Acabados Gráficos, S. A. de C. V.

M114 TASS

PRÓLOGO

En 1972 el presente libro se editó, escrito a mano en su totalidad. Hoy se decide presentarlo en su forma original, modificando y ampliando su contenido.

Cada capítulo consta de dos partes: una formada por explicaciones, reglamentos, limitaciones y códigos referentes al capítulo en estudio y la otra, conformada por ejemplos ilustrativos que muestran el planteamiento y su solución aplicando los reglamentos del ACI y del Distrito Federal.

El conocimiento y la comprensión de las propiedades estructurales del material y la habilidad de aplicarlo racionalmente, permitirá que el interesado en el diseño arquitectónico, especialmente en el diseño de estructuras de concreto armado, obtenga provecho de este libro.

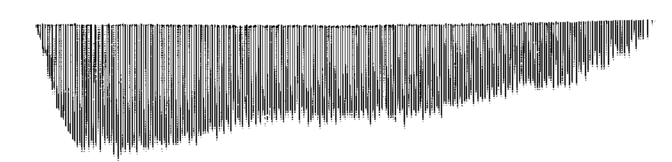
En su contenido se utilizaron procesos matemáticos simples y, de manera sencilla y clara, se explica con detalle cómo se obtienen las secciones y esfuerzos de los elementos estructurales básicos, pero tan importantes, que cuando se llega a comprender la esencia de éstos, se podrá lograr no sólo una estructura complicada y audaz sino una estructura racional.

En el último capítulo, se presenta el cálculo de un edificio para oficinas, en él se aplican todos los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores con el fin de que el lector tenga una visión en conjunto de la estructura total.

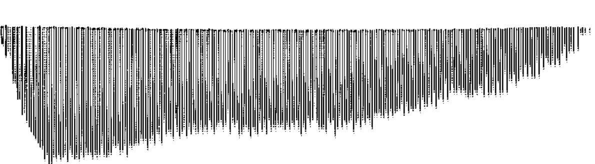
Deseo que el libro le sea útil a los estudiantes, artesanos, constructores y también para aquel que tiene la capacidad artística del genio.

Me sentiré satisfecho si el lector encuentra en este libro la información e inspiración que de él espera.

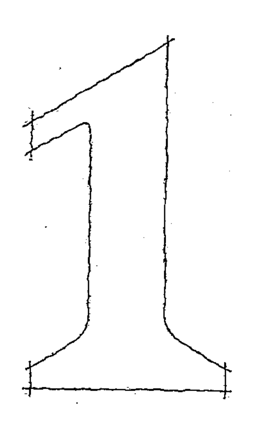
EL AUTOR



ÍNDICE DE CONTENIDO





CONCRETO

1.1. Generalidades

El concreto simple es un material artificial que se obtiene como resultado de la mezcla con otros materiales llamados agregados. Estos se clasifican en activos e inertes. Son activos, el cemento y el agua e inertes la arena y la grava, conocidos también como agregado fino y grueso respectivamente. Cuando se mezclan dos inertes con un activo, la mezcla permanece sin alteración, pero cuando se mezclan los dos activos con un inerte, se producirá una reacción química donde esa "lechada" (cemento-agua) fragua y comienza a endurecer hasta alcanzar gran solidez.

Los materiales inertes forman la estructura del concreto, le dan resistencia y solidez, además, lo abaratan, sin ellos, el concreto resultaría frágil y quebradizo.

Se le llama concreto armado o reforzado, cuando al concreto simple se le introduce una armadura metálica, capaz de absorber esfuerzos que el concreto simple por ser una piedra artificial no podría soportar.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., clasifica el concreto para fines estructurales, en dos clases:

Clase 1.- Cuando el concreto se encuentra en estado fresco con un peso volumétrico de entre 2200 y 2400 Kg/m^3.

Clase 2.*- Estando en estado fresco su peso volumétrico se considera de entre 1900 y 2200 Kg/m^3.

El uso de dichos concretos, dependerá de la clase de constucción y para esto el propio reglamento los clasifica dependiendo de la falla estructural, gravedad del problema que pueda causar dicha falla y pérdida de vidas humanas, grandes pérdidas económicas o destucción y pér-

* El uso de concreto clase 2, se podrá utilizar en obras clasificadas dentro del grup A, cuando el responsable en Seguridad Estructural demuetre que el comportamiento es satisfactorio.

dida de acervos culturales de muy alto costo.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., hace una serie de observaciones donde el lector podrá obtener información más completa haciendo referencia al capítulo "Seguridad estructural de las Construcciones".

1.2. Cemento.- Es el componente principal del concreto y es el Cemento Portland, el más utilizado en la fabricación de todo concreto.

El cemento es un compuesto de alúmina, cal, fierro y sílice, materiales que al ser fundidos (clinker) son pulverizados finamente, se le agrega una pequeña cantidad de yeso sin calcinar y agua que controlan las propiedades del fraguado.

Hay también cementos con inclusores de aire cuya finalidad es aumentar la resistencia del concreto, su trabajabilidad y evitar su desintegración cuando se encuentra expuesto a la congelación sobretodo en estado saturado.

El cemento artificial es el más generalizado por su mejor control y mayor uniformidad.

1.3. Clases de cemento Portland*.- Se fabrica en México en diferentes tipos, cada uno destinado a satisfacer las necesidades que cada construcción y sus requerimientos exige, veamos:

Tipo I.- Conocido como Normal o cemento común, se emplea en construcciones de tipo general como son pavimentos, estructuras, casas, edificios, banquetas y guarniciones, cimentaciones, refuerzos y también en aquellos lugares donde el calor que genera por su hidratación no ocasione ningún problema estructural.

Tipo II.- Se le conoce con el nombre de modificado, destinado principalmente en la construcción de obras hidráulicas (endurece.—

* También se fabrica el cemento de albañilería, de gran plasticidad y poder de retención de agua.

con el agua), presenta bajo calor de hidratación y aceptable resistencia a los sulfatos. Su empleo se generaliza en obras donde se requieren fuertes espesores de concreto como presas, contrafuertes y muros de contención.

Tipo III.- De resistencia rápida, se recomienda en aquellos lugares donde se requiere rapidez en la ejecución de la obra. Adquiere una determinada resistencia (aproximadamente el 80%), en la tercera parte del tiempo que el cemento normal Tipo I, sin embargo, la resistencia final es la misma que la correspondiente al cemento normal.

Tipo IV.- De bajo calor, es muy recomendable en aquellos lugares donde se requieren colados con grandes espesores por su bajo calor de hidratación, adquiere su resistencia muy lentamente.

Tipo V.- De alta resistencia a los sulfatos, se recomienda su empleo en la construcción de cimentaciones expuestas al ataque desintegrador de suelos; resiste bien el ataque de aguas sulfatadas y agresivas.

Además de los cementos mencionados, se fabrican el cemento portland blanco, el cemento portland puzolana y el cemento portland escoria o ferro portland.

El cemento blanco tiene características similares al cemento Tipo I, con la diferencia de que este no contiene óxido férrico, además, en su fabricación las arcillas se substituyen por caolín, material blanco a base de sílice y óxido de aluminio. Este cemento se utiliza en la mayoría de los casos para fines ornamentales.

El cemento puzolánico (la puzolana es una roca volcánica similar al basalto), se obtiene mediante la molienda por calcinación de cemento, puzolana y yeso.

El empleo de las puzolanas mejora la resistencia del cemento contra el ataque de sulfatos y reduce considerablemente el excesivo calor en la mezcla. Mejora también, la trabajabilidad en el concreto, ayuda a producir concretos más impermeables y reduce considerablemente la segregación.



El cemento puzolánico es altamente recomendable en la construcción de obras marítimas. Se puede utilizar en obras de cualquier tipo, siendo también recomendable en obras hidráulicas pues endurece al estar en contacto con el agua.

1.4. Agua.- Se utilizará agua exenta de materias orgánicas, sales como los cloruros, sulfatos y aceites, pues la presencia de éstos en el concreto reduce su resistencia. También desecharse el agua turbia con olor o sabor desagradable.

1.5. Arena.- Se le conoce también como agregado fino, no obstante la arena se clasifica en gruesa, mediana, fina y muy fina, sin embargo, el tamaño máximo aceptable deberá estar comprendido entre los 5 y 6 mm.

La mejor arena para la construcción es la de mina, de color azul grisáceo, rosa o gris, de estructura rugosa e irregular y también las de forma redondeada.

1.6. Grava.- Se le da el nombre de agregado grueso, proviene de piedra limpia, sana, resistente y dura.

Se han obtenido concretos de excelente calidad utilizando grava de 35 mm de diámetro, de forma esférica o cúbica, desechándose aquellas de forma alargada o lajeada.

En México también se fabrican concretos ligeros utilizando en su fabricación, en substitución de la grava, la carlita o perlita inflada, material de origen volcánico con peso volumétrico entre 160 y 240 Kg/m^3 y peso volumétrico de este concreto de entre 1400 y 1700 Kg/m^3.

Su resistencia a la compresión es bastante buena de entre 100 y 200 Kg/cm^2.

1.7. Plasticidad del concreto*.- Se mide con la altura de

*Un concreto con inclusor de aire, le da a la mezcla una mayor plasticidad y cohesión.

revenimiento, altura que se mide por medio de un molde de forma tronco-cónica como aparece en las figuras 1.1. a y b:

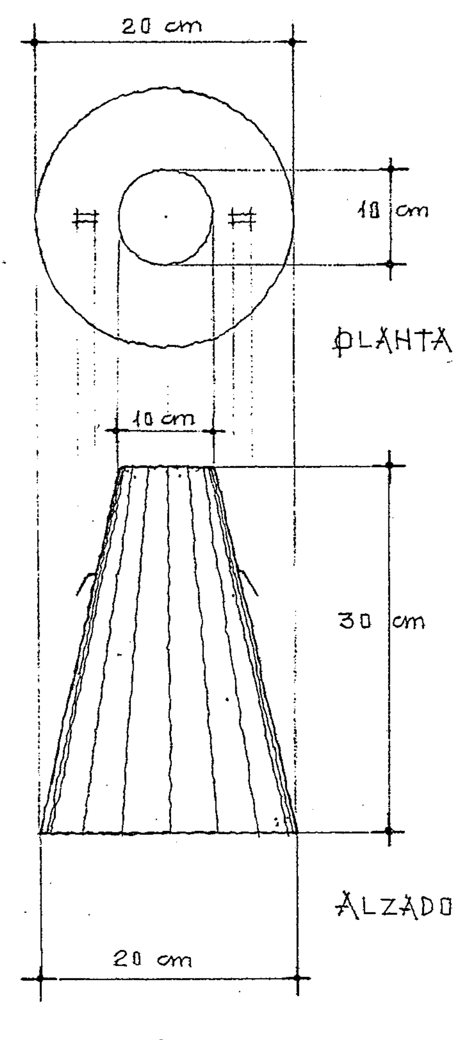


Figura 1.1. Planta del molde tronco-cónico. (a)

Figura 1.1. Alzado del molde tronco-cónico. (b)

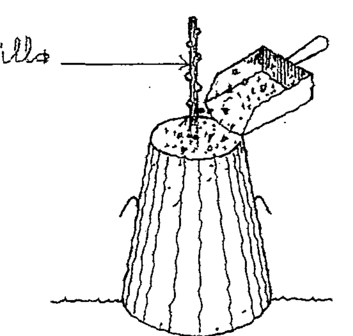


Figura 1.2. Vaciando la mezcla en el molde.

Se llena el molde con la mezcla cuya altura de revenimiento se desea conocer; se vacía la mezcla en tres tandas mismas que se compactarán aplicando con una varilla 25 golpes a cada tanda; ya enrasado el concreto al nivel del borde superior del molde, se extrae éste empujándolo cuidadosamente por la parte superior.

La mezcla falta de apoyo se deformará bajando de altura en mayor o menor proporción dependiendo de la consistencia de la mezcla, la diferencia de nivel entre la altura del molde y la de la mezcla fresca se llama altura de revenimiento y se mide en centímetros.

No todos los elementos estructurales que se hagan de concreto necesi-

tan mezclas de igual plasticidad. En efecto, hay obras que requieren concretos muy plásticos y, hay estructuras donde se puede trabajar con mezclas más duras.* Figura 1.3.

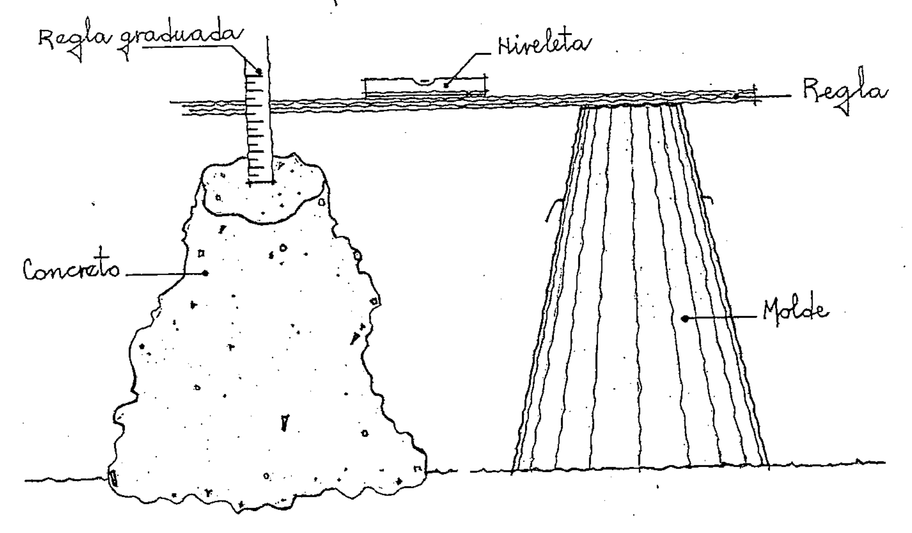


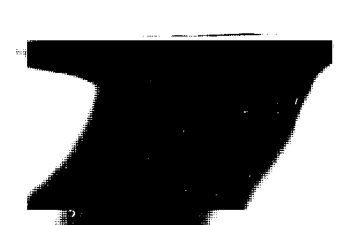
Figura 1.3. La diferencia de altura entre el molde y la mezcla, se llama altura de revenimiento.

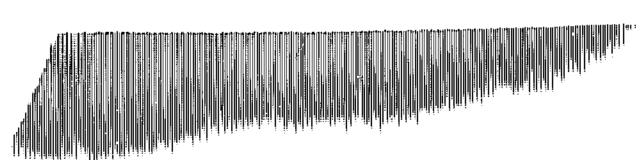
En la Tabla 1.1., se indican los revenimientos más comunes y recomendados según el tipo de obra donde se utilizará la mezcla.*

Tabla 1.1.
Revenimientos*

Tipo de estructura	Revenimientos en cms.		
	Mínimo	Máximo	Promedio
Concreto en grandes masas: puentes, presas, rellenos, cimientos y pavimentos.	2	8	5
Concreto en trabes, losas y muros gruesos.	8	12	10
Concreto en losas y columnas delgadas y difíciles de colar.	14	20	17
Concreto en columnas y muros con espesor reducido y con gran cantidad de acero, dificultando la correcta colocación del concreto.	16	20	18

* A gran revenimiento la mezcla revela una consistencia muy fluida.





1.8. Fraguado del cemento.- Cuando el cemento se mezcla con el agua se produce una reacción química y poco a poco pierde su plasticidad, en efecto, el cemento y el agua siguen reaccionando produciéndose el endurecimiento de la mezcla. Antes de su dureza total, la mezcla experimenta dos etapas dentro de su proceso general, que son:

a) Fraguado inicial

b) Fraguado final

El primero, corresponde a una mezcla, cuando pierde su plasticidad volviéndose difícilmente trabajable.

Cuando la mezcla en su proceso de endurecimiento llega a su segunda etapa, alcanza tal dureza, que entra en su fraguado final. La mezcla deja de ser manejable.

El tiempo de fraguado inicial es difícil definirlo, sin embargo, oscila entre 50 y 60 minutos. El fraguado final se estima entre 9 y 10 horas.

El endurecimiento de la mezcla cemento-agua deberá ser controlado para su adecuado manejo en la construcción, de lo contrario, el concreto endurece demasiado rápido o muy lentamente, ocasionando problemas. En ocasiones es necesario utilizar acelerantes o retardadores de fraguado a base de compuestos de cloruro de calcio para acelerarlo y anhídrido sulfúrico o yeso para retardarlo.*

1.9. Curado del concreto.- La protección que se le da al concreto para mantenerlo en un ambiente de humedad interior y favorable, para evitar la pérdida por evaporación, recibe el nombre de "curado del concreto".

*Un concreto con mayor revenimiento será más manejable que otro con una mezcla más seca. Cuando se utiliza inclusión de aire en los concretos, aumenta su trabajabilidad y resiste mejor la acción de un posible congelamiento del concreto.

Normalmente el cemento endurece rápidamente, por tanto, dicho endurecimiento deberá ser controlado para que resulte útil en la construcción.

Fig
mol
(a)

Fig
mol
(b)

Fig
me

14

Un adecuado curado, sobretodo a tempranas edades, traerá como resultado un incremento de resistencia en el concreto.

La manera más generalizada para efectuar el curado, consiste en proteger la superficie con una película impermeable a base de asfálto, alquitrán o silicato de sodio, con la finalidad de conservar el agua que se utilizó en la preparación de la mezcla o, también mojando la superficie colada, con constantes riegos, para que el concreto conserve su adecuada hidratación. Es muy importante vigilar la humedad en el concreto, principalmente durante los primeros 7 días para concretos normales y 3 días para aquellos de resistencia rápida a temprana edad.

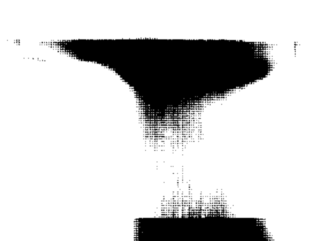
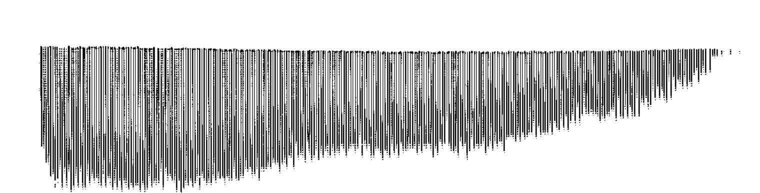
1.10. Permeabilidad del concreto.- Los agregados que conforman el concreto, sobretodo la arena y la grava, dejan cierta cantidad de vacíos que dificilmente son llenados por el agua y el cemento, en consecuencia, esos vacíos permiten el paso del agua en mayor o menor escala, dependiendo que el colado y vibrado haya sido hecho correcto o incorrectamente.

Cuando una obra requiera de una impermeabilidad total, se puede incrementar, además, de una buena revoltura y un adecuado vibrado, con:

1) Aditivos para concreto "Fester", "Duro Rock", "Tolteca" o inclusión de aire.
2) Utilizando en la mezcla la inclusión de tierras diatomáceas.
3) Utilizando pintura asfáltica.
4) Empleando mezclas cuya relación agua-cemento sea menos plástica (menor cantidad de agua).
5) Utilizando cal apagada revuelta con el cemento.

1.11. Resistencia del concreto a compresión y tensión.*- La resistencia del concreto a la compresión es, sin duda, el esfuerzo de mayor

*En toda construcción deberá comprobarse el nivel de resistencia del concreto estructural, para contar con la seguridad de cumplir con la resistencia especificada.

interés dentro del campo de las estructuras de concreto. El Reglamento de Construcciones para el D.F., le considera al concreto una resistencia a tensión que, siendo de menor importancia deberá considerarse, sobretodo, en obras de pavimentación

El reglamento determina para los concretos la siguiente especificación:

Concreto clase 1. Tendrá una resistencia específica (f'_c) igual o mayor que 250 Kg/cm².

Concreto clase 2. Su resistencia específica (f'_c) será inferior a 250 Kg/cm²

El diseñador de estructuras deberá utilizar para ambos concretos, el valor nominal (f^*_c) obtenido con la expresión

$$f^*_c = 0.8\, f'_c \quad [\text{para concretos clase 1 y 2}]$$

Todo concreto será proporcionado de tal manera que su resistencia media ($\bar{f}_c$), sea superior a la especificada (f'_c).

La resistencia del concreto a tensión ($\bar{f}_t$), se tomará:

Concreto clase 1 – – – – – $1.5\sqrt{f'_c}$; para diseñar $f^*_t = 1.2\sqrt{f^*_c}$

Concreto clase 2 – – – – – $1.2\sqrt{f'_c}$; para diseñar $f^*_t = 0.9\sqrt{f^*_c}$

Cuando el concreto se encuentre sometido a tensión por flexión o módulo de rotura ($\bar{f}_f$), su resistencia se tomará igual a:

Concreto clase 1 – – – – – $2.0\sqrt{f'_c}$; para diseñar $f^*_t = 1.6\sqrt{f^*_c}$

Concreto clase 2 – – – – – $1.4\sqrt{f'_c}$; para diseñar $f^*_c = 1.1\sqrt{f^*_c}$

Las pruebas sobre resistencia del concreto a compresión, se hace sobre cilindros de acero de 15 cm de diámetro por 30 cm de alto, curados en el laboratorio y probados a los 28 días, figuras 1.4. y 1.5.* Cabe mencio-

*También se pueden utilizar cubos o prismas como especímenes para realizar ensayes a compresión, sin embargo, el espécimen más usual es el cilindro.



por que resulta difícil que el concreto presente únicamente un sólo esfuerzo (esfuerzo uniaxial), será más práctico pensar que se esfuerza en varias direcciones (esfuerzo biaxial o triaxial)*, figuras 1.4 y 1.5

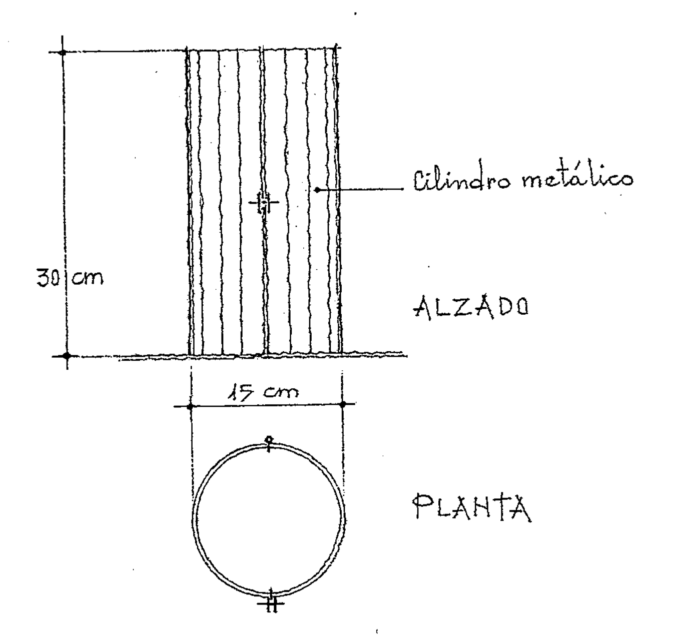


Figura 1.4. Cilindro metálico para probar la resistencia a compresión del concreto.

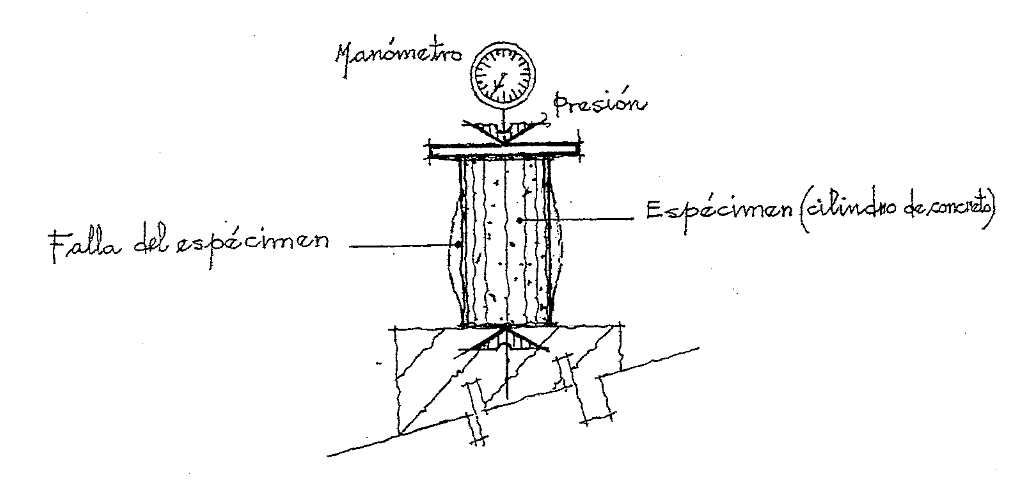


Figura 1.5. Prueba del espécimen a esfuerzo de compresión.

1.12. Resistencia del concreto al corte.- El concreto ofrece buena resistencia al corte (aproximadamente entre el 60% y 80% de su

*Se han realizado pruebas para comprobar la resistencia del concreto a compresión biaxial y se puede asegurar que es aproximadamente 25% superior que la resistencia uniaxial.

resistencia a la compresión). Una diferencia tan marcada entre la mínima y máxima se debe, principalmente, a que en las pruebas resulta difícil separar el esfuerzo cortante de otros esfuerzos. Además, se tendrá en cuenta la contracción del concreto por secado final, que se tomará igual a 0.01% para concretos clase 1 y, de 0.02% para concretos clase 2.

Teniendo cuidado durante el curado inicial, la contracción en el concreto disminuirá notablemente.

1.13. Módulo de elasticidad del concreto.- Para el concreto no se puede establecer un módulo de elasticidad constante y su valor dependerá de la intensidad de la carga, de las cargas de corta y larga duración, de la fatiga de ruptura del concreto y, también de su peso volumétrico.

No obstante, el Reglamento de Construcciones para el D.F., recomienda considerar

Concreto clase 1 ------ $14\,000\sqrt{f'_c}$, en Kg/cm²

Concreto clase 2 ------ $8\,000\sqrt{f'_c}$, en Kg/cm²

y se representará con la literal, E_c.

Para diseño por esfuerzos de trabajo, el autor recomienda tomar para el módulo de elasticidad del concreto*, un valor de:

$10\,000\sqrt{f'_c}$, en Kg/cm², para ambas clases de concreto.

---

* El lector encontrará en otros textos, valores muy diversos asignados al módulo de elasticidad del concreto, sin embargo, tal diversidad es poco significativa en el resultado final del problema.

Referencias bibliográficas Capítulo 1

Gottahard Franz, "*Tratado del Hormigón Armado*," G. Gili, Barcelona, 1971.

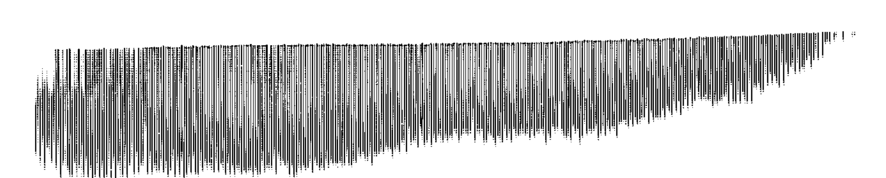
Comité ACI 214, "*Práctica Recomendada para la Evaluación de los Resultados de Pruebas de Resistencia del Concreto*" (ACI 214 -77), Detroit, 1977.

Instituto de Ingeniería, "*Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto*", Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el D.F., Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.

Louis A. Hill Jr., "*Fundamentos de Diseño Estructural, Acero, Concreto y Madera*," Representaciones y Servicios de Ingeniería, México, 1978.

Parker Harry, "*Diseño Simplificado de Concreto Reforzado*," Limusa, México, 1982.





2

ACERO DE REFUERZO

2.1. Generalidades

Es el acero un material muy versátil, en su fabricación se utilizan diversas características químicas y físicas.

El primer paso en la fabricación del acero es la producción de hierro de primera fusión, conocido con el nombre de "arrabio";* se forma básicamente con mineral de hierro, piedra caliza y coke.

La transformación del mineral de hierro en metal de hierro se realiza en el "Horno Alto", llamado así, por sus dimensiones y altura (de 30 a 40 m); las materias primas se descargan por la parte superior del horno al tiempo que por la parte inferior se inyecta aire a presión.

El mineral de hierro, el coke y la caliza, se derriten en el interior del horno, aplicando temperaturas muy elevadas (de 1700° a 1800°C), formándose el hierro de primera fusión y la escoria. Esta última juega una función muy importante ya que purifica el hierro fundido, agrupándo las impurezas (cenizas, caliza y material terroso del mineral). La gran cantidad de impurezas procedentes de la fusión de los materiales que forman la materia prima, son desalojadas por un agujero que se encuentra a una altura mayor que la descarga del aire flúido, pues siendo las escorias de menor peso que aquel, flotan sobre la superficie del hierro.

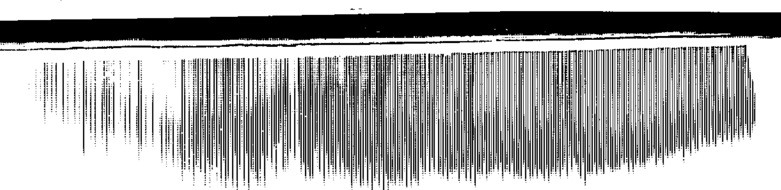
El metal fundido se extrae por la parte inferior del horno y se deposita en unas ollas o tinas para su manejo posterior. El hierro recien extraído se puede convertir en acero inmediatamente o bien transfor-

*Las materias primas más importantes para obtener el "arrabio", son:

a) Mineral de hierro. Su aspecto es semejante al de una tierra rojiza, se encuentra en Durango.

b) Piedra caliza. Es un carbonato de calcio y su función es eliminar las impurezas que contiene el hierro.

c) Coque. Substancia carbonosa que proporciona la combustión incompleta del carbón mineral.





marlo en lingotes para su almacenamiento.

Para convertirlo en acero, basta estando aun fundido, vaciarlo en los hornos de aceración, posteriormente sigue el proceso de refinación.

En el caso de convertirlo en lingotes, se vacía la tina en pequeños moldes refinándose posteriormente.

Para producir una tonelada de hierro se requiere de:

2 toneladas de mineral de hierro

1/2 tonelada de piedra caliza

1 tonelada de coke

4000 m^3 de inyección de aire, con un peso superior a los 4000 kg.

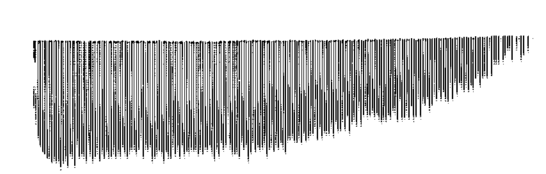
2.2. Refinación del acero*.- Consiste en la refinación del hierro para convertirlo en acero. Este proceso es necesario, debido a que el arrabio es inadecuado para la fabricación de varilla corrugada utilizada como refuerzo del concreto, pues contiene gran cantidad de impurezas y exceso de elementos químicos, que traen como consecuencia un hierro falto de ductilidad y resistencia a tensión.

Para refinar el acero, se cargan cantidades dosificadas de piedra caliza, ferroaleaciones y chatarra cuidadosamente seleccionada; se inyectan flamas que proporcionan calor desde ambas cabeceras del horno, se funde la chatarra y los agregados para producir el acero fundido y la escoria. Ya fundida la chatarra, se agrega el arrabio líquido procedente del "Horno Alto", vaciando la tina que lo contiene a un canal de material refractario que se instala en las puertas del horno, mezclándose el arrabio con la chatarra fundida. En el interior del horno se desprenden burbujas de gases por un período de tiempo prolongado, produciéndose la ebullición de la cal donde se purifica el hierro, formándose la escoria que flota sobre el hierro.

Finalmente, se le da al acero la composición química deseada, se obtienen muestras de carga, composición y dureza; el resultado del análisis nos dirá si se debe o no hacer adiciones o modificaciones en la

* Producto siderúrgico donde el hierro está combinado con pequeñas cantidades de carbono.





carga para obtener el análisis deseado.

2.3. Vaciado de los lingotes.- Para extraer el acero fundido del horno de aceración, se efectúa por medio de una canal que derrama en una tina; la tina llena los moldes o "lingoteras", con un peso aproximado de 1200 Kg.

2.4. Laminación de la varilla.- Una vez sólido el acero en forma de lingote, se saca de los moldes para ser laminado. Previamente el lingote se calienta a una temperatura de 1200° C, temperatura que depende del tipo de acero. Diferencias en la temperatura de calentamiento en un mismo lingote, ocasiona defectos en el laminado e imperfecciones en el producto terminado.

La primera fase en el laminado consiste en reducir la sección del lingote, mediante pasos sucesivos a través de rodillos, hasta obtener una barra de sección cuadrada de más o menos 8 centímetros por lado y largo de 3 m; esta operación recibe el nombre de desbaste. Las barras siguen reduciéndose hasta alcanzar la medida deseada, se le dan los últimos toques en detalles y las corrugaciones transversales y las costillas longitudinales, que son características de la varilla corrugada para una mayor adherencia del acero con el concreto. Al salir de la corrugación, la varilla se deposita en toda su longitud en una "cama de enfriamiento", que con movimientos automáticos acerca la varilla a la guillotina donde se corta en tramos de 12 m.

Finalmente, la varilla es sometida a las inspecciones y pruebas de calidad que marcan las especificaciones, tales como: peso de la muestra por unidad de longitud, separación y forma de las corrugaciones, resistencia a la ruptura, alargamiento, límite de fluencia y ductilidad condiciones necesarias para cumplir con las normas fijadas.

2.5. Especificaciones y calidades.- El acero de refuerzo



utilizado en construcciones de concreto, deberá ser de barras corrugadas o también con malla de alambre soldada. El reglamento permite el empleo del alambrón liso en anillos, estribos, cables y espirales utilizados para presfuerzo o torcidos en frío. No obstante, la barra lisa (específicamente el alambrón) se recomienda emplearlo en aquellas zonas donde los esfuerzos son reducidos, véase la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Tamaño de varillas corrugadas. Datos técnicos.

Núm. varilla	Diámetro		Area cm²	Perímetro cm	Peso Kg/ml
	Plg	cm			
2*	1/4	0.64	0.32	2.01	0.251
2.5	5/16	0.79	0.49	2.48	0.384
3	3/8	0.95	0.71	2.98	0.557
4	1/2	1.27	1.27	3.99	0.996
5	5/8	1.59	1.99	5.00	1.560
6	3/4	1.91	2.87	6.00	2.250
7	7/8	2.22	3.87	6.97	3.034
8	1	2.54	5.07	7.98	3.975
9	1 1/8	2.86	6.42	8.98	5.033
10	1 1/4	3.18	7.94	9.99	6.225
12	1 1/2	3.81	11.40	11.97	8.938

*, Unicamente en varilla liso.

Actualmente se estudia la conveniencia de tener varillas de mayor diámetro por su alto límite de fluencia.

Hay países donde utilizan varillas de mayores diámetros con límites de fluencia muy elevados.

El acero trabajado en frío alcanza límites de fluencia mayores a 8000 Kg/cm².

El acero empleado en presfuerzo cuenta con un límite de fluencia superior a 18000 Kg/cm².

El alambrón corrugado substituye ampliamente al alambrón común, ya que soporta la misma carga en kilogramos que éste, pero es mucho más delgado (3.47 mm de diámetro en lugar de 6.40 mm del alambrón común). La diferencia se debe a que el corrugado es laminado en frío con límite de fluencia de 6000 Kg/cm², mientras que el alambrón común tiene 2300 Kg/cm². Además, las corrugaciones proporcionan una mejor adherencia con el concreto.

En general, en la fabricación de varillas se utiliza acero de lingote, de flecha y de riel, con esfuerzos de fluencia (f_y) de 2530 Kg/cm² a 4000 Kg/cm².

El empleo de la electromalla, tiene cada día mayor aceptación entre los constructores, por su facilidad como refuerzo en pavimentos, muros, losas, cascarones, etcétera; su fabricación consiste en una malla

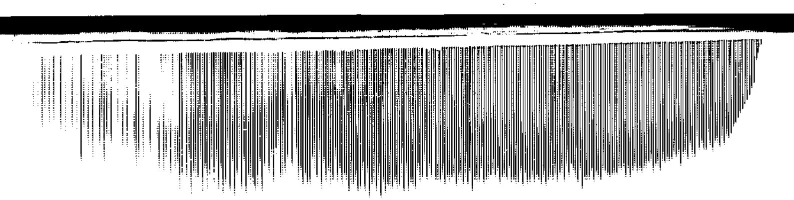
Tabla 2.2. Datos técnicos. Electromalla*

Malla y calibres de alambres	Diámetro		Área de acero en cm²/m	Peso en Kg/m
	mm	pulgadas		
6x6 — 1/1	7.19	0.283	2.662	4.309
6x6 — 2/2	6.65	0.262	2.291	3.706
6x6 — 3/3	6.20	0.243	1.974	3.204
6x6 — 4/4	5.72	0.225	1.687	2.729
6x6 — 6/6	4.88	0.192	1.225	1.982
6x6 — 8/8	4.11	0.162	0.872	1.412
6x6 — 10/10	3.43	0.135	0.605	0.982
6x6 — 12/12	2.67	0.105	0.370	0.595

*Electromalla. Aceros Nacionales, S.A.

El reglamento especifica que las intersecciones soldadas no deben estar espaciadas a más de 30 cm en la dirección del esfuerzo calculado.

Los alambres garantizan una soldadura resistente en todos los cruces de la malla, debido a que están soldadas bajo control electrónico de presión y calor.



estructural de alambres de acero en ambas direcciones, perpendiculares entre si y que al soldarse en sus intersecciones proporcionan una uniforme separación en sus armados.

En su elaboración, se utilizan alambres estirados en frío cuyo límite de fluencia es muy elevado, ya que cuenta con una fatiga de ruptura mínima de 5800 Kg/cm², con límite elástico de 5000 Kg/cm² y fatiga permisible mínima de 2500 Kg/cm², véase la tabla 2.2.

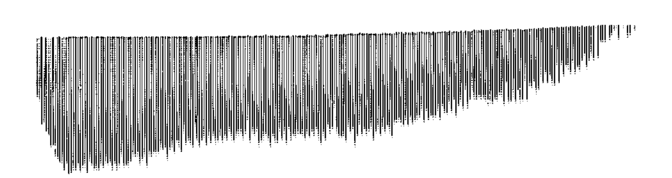
2.6. Módulo de elasticidad del acero.- Para todos los aceros de refuerzo ordinario, el reglamento especifica:

$$E_s = 2 \times 10^6 \ Kg/cm^2 = 2\,000\,000 \ Kg/cm^2$$

Para torones de presfuerzo:

$$E_s = 1.9 \times 10^6 \ Kg/cm^2 = 1\,900\,000 \ Kg/cm^2$$

y se representa con la literal, E_s.



Referencias bibliográficas

Capítulo 2

Cía. Fundidora de Monterrey, S.A., "*Manual para Constructores*," Monterrey, N.L., México, 1956.

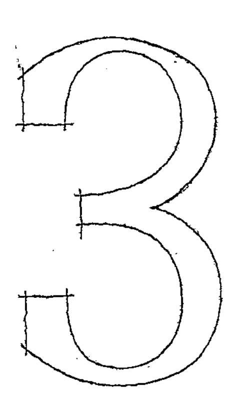
Altos Hornos de México, "*Manual AMHSA*," México, D.F., 1971.

Plazola Cisneros Alfredo, "*Normas y Costos de Construcción*," Libros Mexicanos Unidos, S.A., México, 1960.

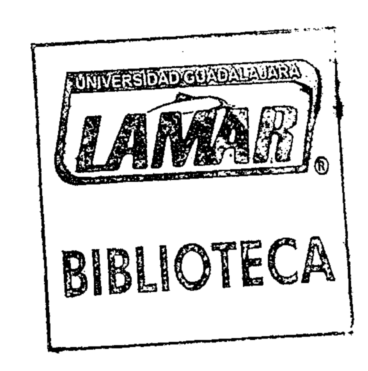
"*Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado*," ACI 318-83, México, 1984.

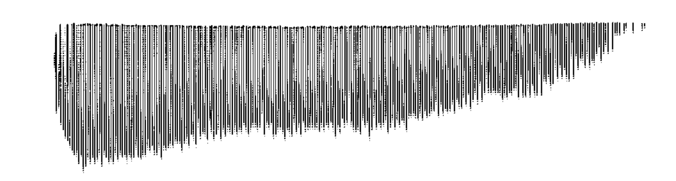
Arnal Simón L., Betancourt Suárez M., "*Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*," Trillas, México, 1991.





ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN





3.1. Generalidades

En una estructura la flexión es un fenómeno que sucede con frecuencia y es, un fenómeno bastante complejo, por eso es importante conocer y comprender la teoría de la flexión.

Cuando el elemento estructural no se encuentra adecuadamente detenido, las cargas aplicadas pueden convertirlo en un elemento inestable que produce una flexión o pandeo lateral, acompañada por una torsión, que obliga para su estabilidad la necesidad de colocar un refuerzo transversal y longitudinal por torsión, para darle al elemento una rigidez adecuada. Cuando esto sucede, el problema se complica, pues junto con la torsión aparecen fuerzas de flexión, cortantes y axiales.

A continuación, analizaremos el comportamiento de una viga de concreto reforzado sujeta únicamente a una carga de flexión creciente, de tal manera que se supone se encuentra sujeta a momento flexionante solamente.

El autor considera y así lo expone en este libro, que el enfoque de diseño, tratándose de estructuras de concreto reforzado, lo ideal será combinar los diseños por esfuerzo de trabajo (*teoría elástica*) y, por resistencia máxima (*diseño plástico*). Es evidente, que si solamente las secciones se diseñan atendiendo a los requerimientos de resistencia máxima, se corre el riesgo de que la estructura resista adecuadamente, sin peligro de falla, pero bajo cargas de servicio los elementos estructurales pueden presentar deflexiones muy grandes o también exagerados agrietamientos en el concreto.

Con los requerimientos ordenados por el Reglamento de Construcciones del D.F., tenemos:

a) Diseño por esfuerzos de trabajo (*teoría elástica*).

b) Diseño por resistencia máxima y servicio (diseño plástico).

a) Diseño por esfuerzos de trabajo (teoría elástica).

El reglamento determina:

Para la obtención de resistencias de diseño de piezas sometidas a flexión, carga axial o una combinación de ambas, se tomará en cuenta las condiciones de equilibrio y también las siguientes hipótesis:

1. Toda sección plana que antes de la deformación (flexión) era plana, permanece plana después de ella (flexión).
2. El concreto no resiste esfuerzos de tensión, ésta será resistida por el acero.
3. El módulo de elasticidad del concreto se supone constante.
4. La adherencia entre el acero y el concreto se considera adecuada dentro de los límites elásticos de los materiales.
5. No se consideran tensiones iniciales de fraguado en el acero.

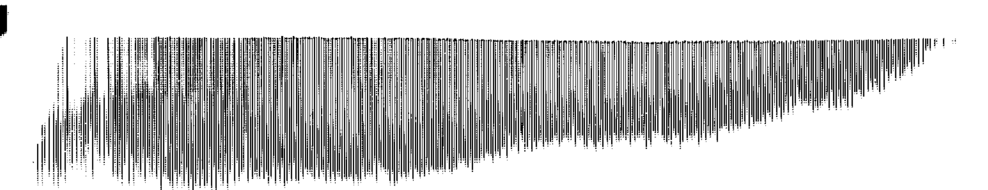
Además, el código ACI, dice:

El esfuerzo máximo permisible en la fibra extrema en compresión (fibra más alejada del eje neutro), está dado por las especificaciones

$$f_c = 0.45 f'_c,$$

es decir, la fatiga máxima de trabajo del concreto en compresión (f_c), deberá tomarse igual a 45% de la fatiga de ruptura del concreto (f'_c), a los 28 días.

En una viga de concreto armado la zona de compresión y de tensión se encuentran bien definidas. En compresión el concreto trabaja adecuadamente y el acero hace lo propio para absorber la tensión. Hay una zona intermedia (abajo del eje neutro), donde el concreto es capaz de tomar ciertas tensiones, pero es tan pequeña su aportación que resulta más apropiado no considerarla.



A continuación, suponemos una viga de concreto reforzado sometida simétricamente a una carga de flexión creciente, soportada de manera que no haya ninguna posibilidad de pandeo lateral.

Cuando la carga aplicada en la viga es pequeña, el concreto será capaz de trabajar para absorber compresiones y tensiones. Téngase presente que la tensión será pequeña ya que el concreto no es un material adecuado para soportar tensiones.

Al seguir aumentando la carga, la viga comenzará a deformarse aumentando las fatigas de compresión y de tensión hasta llegar a un punto donde el material alcanza su límite elástico.

La primera grieta aparece en el centro de la viga y se multiplican en número y profundidad conforme se va aumentando la carga, figura 3.1.

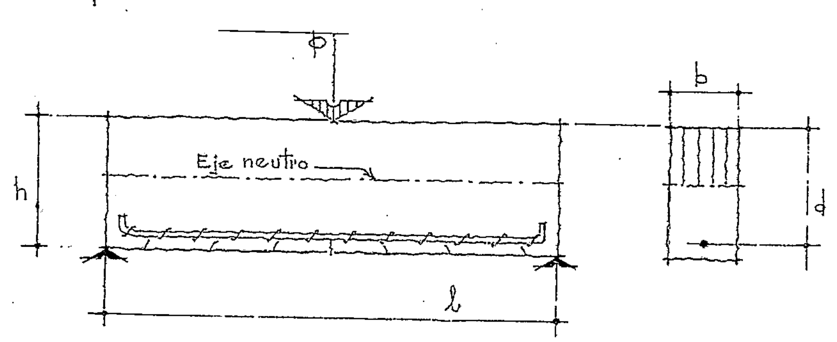


Figura 3.1. Aplicación de una pequeña carga en la viga.

Al incrementarse las cargas, aumentan las grietas en el concreto, fig. 3.2 y también la tensión a la altura del acero, de tal forma que el

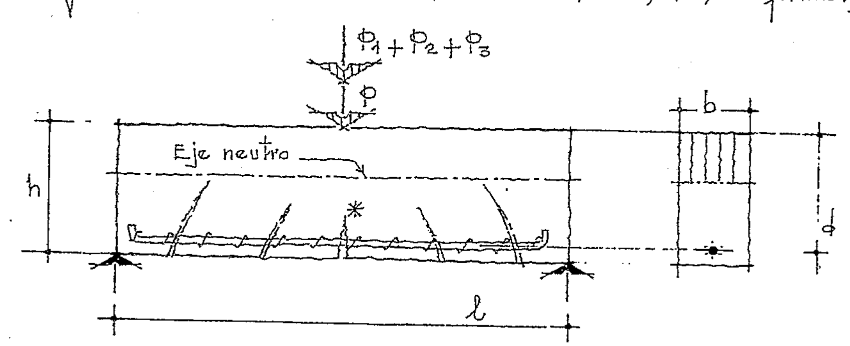
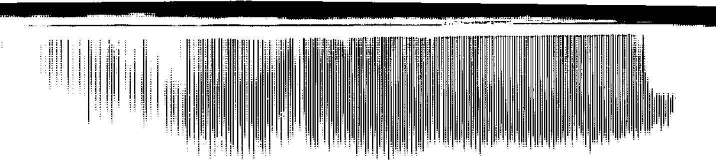


Figura 3.2. Aplicación de mayor número de cargas en la viga.

* Al agrietarse la viga, el acero de refuerzo toma toda la tensión.





concreto ya no es capaz de tomar ninguna tensión y deja al refuerzo de acero, para que la absorba. Al seguir aumentando las grietas en número y profundidad, éstas tienden a llegar al eje neutro de la sección quedando arriba del eje las compresiones y las tensiones abajo del mismo.

Al continuar aumentando la carga, la fatiga del acero rebasa su límite elástico, se deforma rápidamente y las grietas crecen desproporcionadamente. Obsérvese en la fig. 3.3., como se reduce la zona de compresión (concreto), lo que trae como consecuencia la falla de la viga por insuficiencia en la zona de concreto.

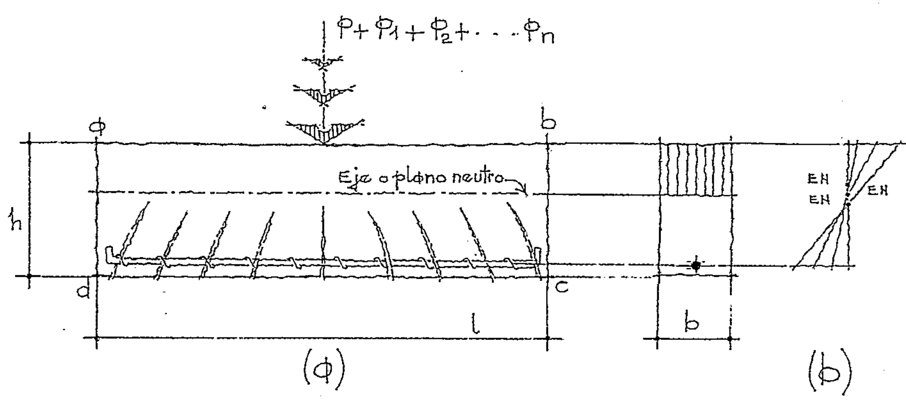


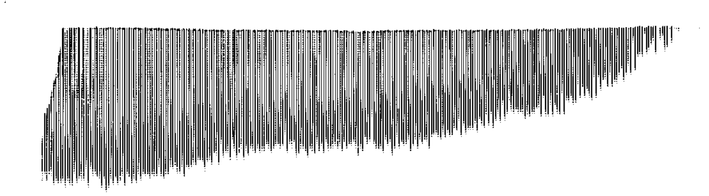
Fig. 3.3. Aplicación de cargas hasta la falla de la viga (a). La zona de compresión se reduce y la viga falla (b).

3.2. Obtención de fórmulas de flexión para vigas rectangulares de concreto reforzado.- La teoría convencional del concreto armado se deriva del hecho que en condiciones normales de trabajo, los esfuerzos de los materiales (concreto y acero) no rebasan sus límites elásticos, es decir, que hay proporcionalidad entre los esfuerzos y sus deformaciones.

Tomando en cuenta las hipótesis anteriormente mencionadas procedemos a estudiar el comportamiento de una viga rectangular sometida a flexión. Antes de deformarse la viga bajo la acción del momento flexionante, ésta queda representada por el rectángulo a, b, c, d, en la fig. 3.3.

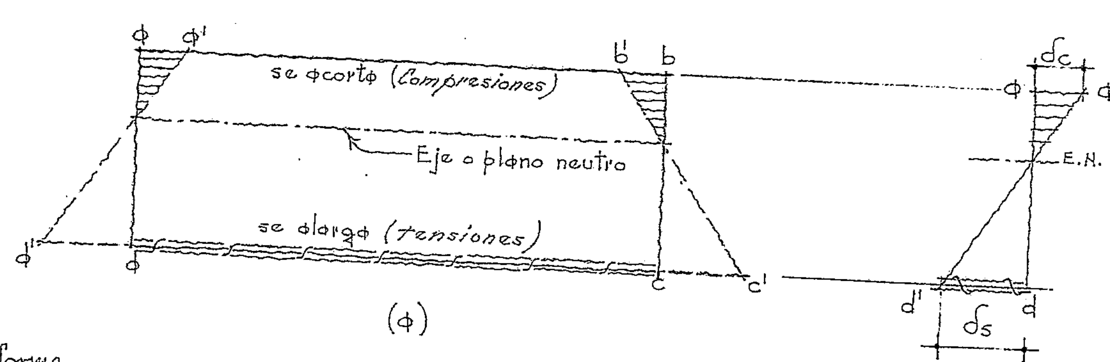
Al cargarse la viga ésta se deforma, acortándose las fibras sujetas a compresión y alargándose las sujetas a tensión.

Entre las compresiones y las tensiones, se encuentra un plano que permanece sin sufrir ninguna deformación y se le da el nombre de



eje o plano neutro.

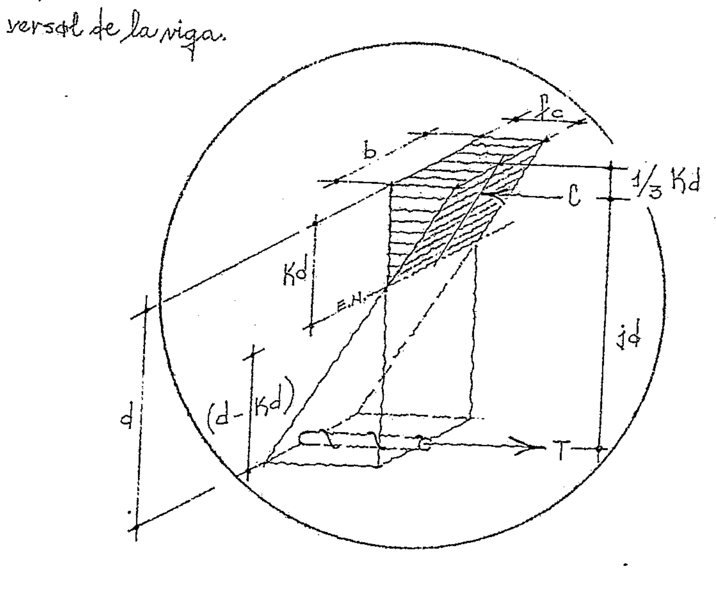
En las figuras 3.4.a, b y c, se representa el diagrama de deformaciones y de esfuerzos en la viga y, corte transversal.



Figs. 3.4. a. Deformación de la viga bajo la acción del momento flexionante.

Figs. 3.4. b. Diagramas de esfuerzos.

Fig. 3.4. c. Corte transversal de la viga.



C, volumen del prisma triangular

T, tensión total

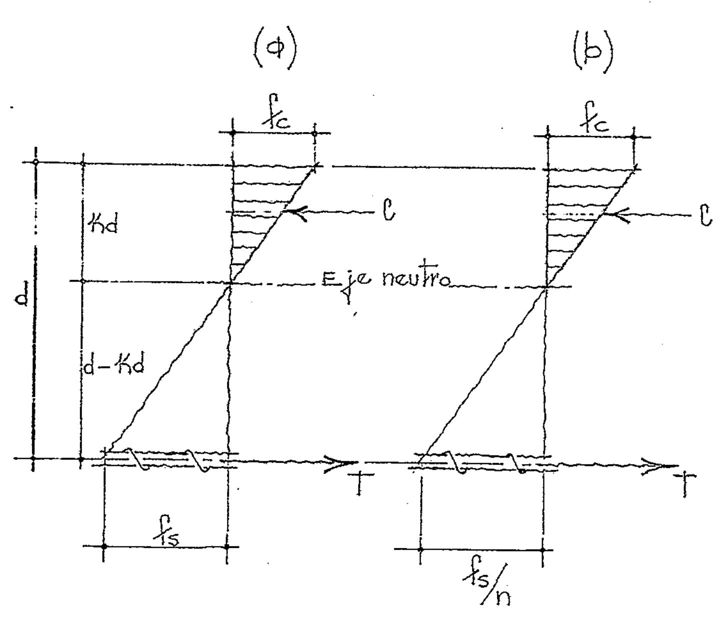
d, peralte efectivo de la viga (distancia desde la fibra más alejada en compresión hasta el centroide del acero en tensión)

h, altura total de la viga con recubrimiento

b, ancho o espesor de la viga

Kd, profundidad del eje neutro (distancia del eje neutro a la fibra más alejada en compresión)

jd, brazo de palanca entre ambas resultantes C y T.



$C = \frac{1}{2} f_c b Kd$ y $T = A_s f_s$

A_s, área de acero

E_c, módulo de elasticidad del concreto

E_s, módulo de elasticidad del acero

p, porcentaje de acero (relación entre el área de acero y el área efectiva de concreto)

$$p = \frac{A_s}{bd} \therefore A_s = pbd \quad . \quad . \quad . (3.1)$$

M_c, momento resistente del concreto

$$M_c = C j d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (3.3)$$

M_s, momento resistente del acero

$$M_s = T j d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (3.5)$$

Fig. 3.5 a. Deformación de la viga antes de ser transformada.

Fig. 3.5 b. Deformación de la viga después de ser transformada.

Para calcular la profundidad del eje neutro, nos encontramos con el inconveniente de que la viga de concreto armado no es homogénea (formada de concreto y acero), por tanto, los triángulos de compresión y de tensión no son semejantes, debido a los distintos módulos de elasticidad de los dos materiales, lo que impide compararlos entre sí.

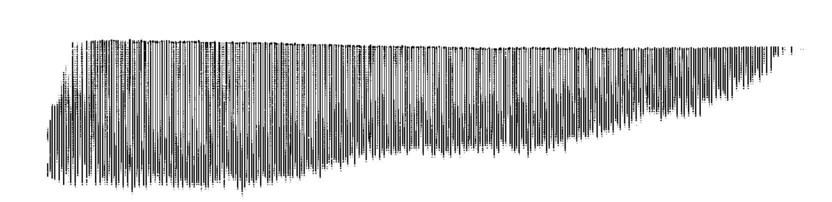
Para hacerlo, se substituye el acero de refuerzo por un concreto "hipotético ideal," capaz de absorber la fuerza de tensión encomendada al acero y con un módulo de elasticidad igual al del concreto en compresión que se supone puede trabajar a tensión. Por tanto, el área del concreto ideal, que substituye al área de acero será "n" veces mayor, es decir, nA_s, veamos la fig. 3.5 a y b

$$T = A_s f_s = f_h n A_s \quad \therefore f_h^{*} = \frac{A_s f_s}{n A_s} = \frac{f_s}{n}$$

De igual manera, obtenemos:

$$A_s f_s = f_h A_h \quad \therefore A_h = \frac{A_s f_s}{f_h}, \text{ y como } f_h = \frac{f_s}{n}, \text{ se tiene}$$

* f_h, fatiga del concreto hipotético.



$$A_h = \frac{A_s f_s}{\frac{f_s}{n}} \therefore \frac{A_h f_s}{n} = A_s f_s \quad y \quad A_h f_s = n A_s f_s$$

$$\therefore A_h = \frac{n A_s f_s}{f_s} = n A_s$$

A continuación obtenemos el valor de "n".

Las deformaciones unitarias del área de acero y del concreto hipotético deben ser iguales, por tanto

$$\delta_s = \delta_h \quad \therefore \quad \frac{f_s}{E_s} = \frac{\frac{f_s}{n}}{E_c}$$

$$f_s E_c = \frac{E_s f_s}{n} \therefore f_s E_c n = E_s f_s \therefore n = \frac{E_s f_s}{f_s E_c} = \frac{E_s}{E_c}$$

Una vez transformada y homogeneizada la sección, figura 3.6, se pueden comparar ambos triángulos, veamos la fig. 3.7 y 3.8.

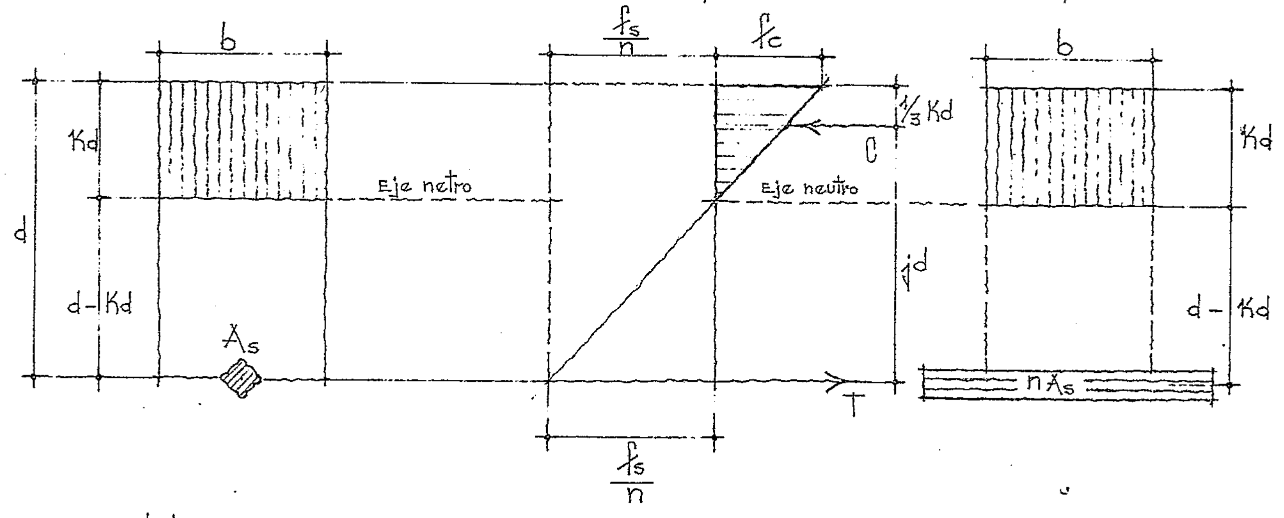


Fig. 3.6. Corte transversal de la viga.
Fig. 3.7. Deformación de la viga. Esfuerzos.
Fig. 3.8. Area transformada.

Por necesidad de equilibrio:

$$C = T$$

$$\frac{1}{2} f_c b Kd = A_s f_s \quad y \quad A_s = \rho b d \qquad . \quad . \quad . \quad (3.1)$$

y también

$$jd = d - \frac{Kd}{3} \therefore j = 1 - \frac{K}{3} \qquad . \quad . \quad . \quad (3.2)$$



Momento resistente en función del concreto

$$M_{Rc} = C j d = \frac{1}{2} f_c b K d j d, \text{ y} \qquad (3.3)$$

resumiendo a todas las constantes en una literal, se tiene:

$$M_{Rc} = R^{*} b d^{2} \therefore d = \sqrt{\frac{M_{Rc}}{R\, b}} \qquad (3.4)$$

Momento en función del acero

$$M_s = T j d = A_s f_s j d \qquad (3.5)$$

De la ecuación del momento resistente en función del concreto, obtenemos

$$0.5 f_c b K d j d = M_{Rc} \therefore f_c = \frac{M_{Rc}}{0.5 b K j d^2} \qquad (3.6)$$

De la ecuación del momento en función del acero, se tiene:

$$f_s = \frac{M_s}{A_s j d} \qquad (3.7)$$

De la fig. 3.7 y por comparación de triángulos, se obtiene:

$$\frac{Kd}{d} = \frac{f_c}{f_c + \frac{f_s}{n}} \therefore Kd = \frac{f_c d}{f_c + \frac{f_s}{n}}, \text{ y}$$

$$K = \frac{f_c d}{d\left(f_c + \frac{f_s}{n}\right)}$$; dividiendo entre f_c, se tiene:

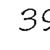
$$K = \frac{1}{1 + \frac{f_s}{n f_c}} \qquad (3.8)$$

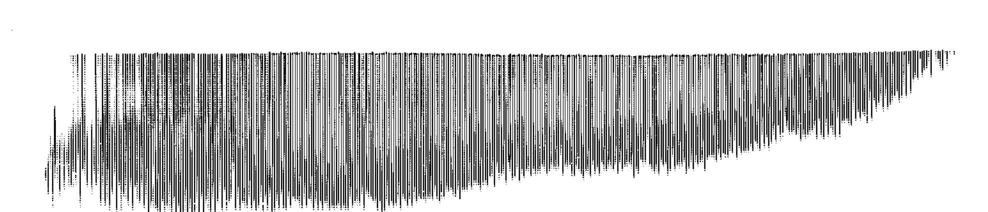
El autor recomienda como peraltes mínimos (h), los siguientes:

Viga simplemente apoyada	Viga con un extremo continuo	Viga con ambos extremos continuos	Viga en voladizo
1/15 del claro	1/18 del claro	1/20 del claro	1/8 del claro

* El autor designa con la literal "R" en lugar de K, para evitar confusión con la constante K. En otros textos, el lector encontrará la literal K.

Nota. Las literales empleadas son convencionales; de desearlo se pueden emplear otras diferentes.





b) Diseño por resistencia máxima y servicio (*Dise plástico*)

Para diseñar una estructura de concreto reforzado, lo deal será combinar las mejores aportaciones que da el diseño po resistencia, junto con las ventajas que proporciona el diseño por e fuerzos de trabajo.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., determin para el diseño de secciones sujetas a flexión, carga axial o a un combinación de ambas, las siguientes condiciones de equilibrio e hip tesis:

1. *Toda sección plana que antes de la deformación (flexión) era plan permanece plana después de la flexión.*
2. *Entre el concreto y el acero se supone una adherencia adecua dentro de los límites elásticos de los materiales.*
3. *La resistencia del concreto a tensión se desprecia.*
4. *La deformación del concreto en compresión cuando la sección al canza su resistencia es de 0.003.*
5. *Los esfuerzos de compresión en el concreto cuando se alcanza la resistencia, se distribuyen uniformemente en una zona cuya profundidad es 0.8 veces la del plano neutro.*
   El esfuerzo uniforme será igual a $0.85 f_c^*$, cuando

$$f_c^* \leq 250 \ Kg/cm^2; \quad f_c^* = 0.8 f'_c$$

$$Si \ f_c^* > 250 \ Kg/cm^2; \quad f_c^* = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1250}\right) f_c^*$$

La resistencia obtenida con las hipotesis mencionadas multiplicada por el factor de reducción (F_R) correspondiente, nos da la resistencia de diseño.

A continuación, analizaremos el comportamiento de una viga de concreto armado sometida a una carga de flexión cre-



ciente, véanse las figuras 3.9 a 3.11 y de 3.12 a 3.14.

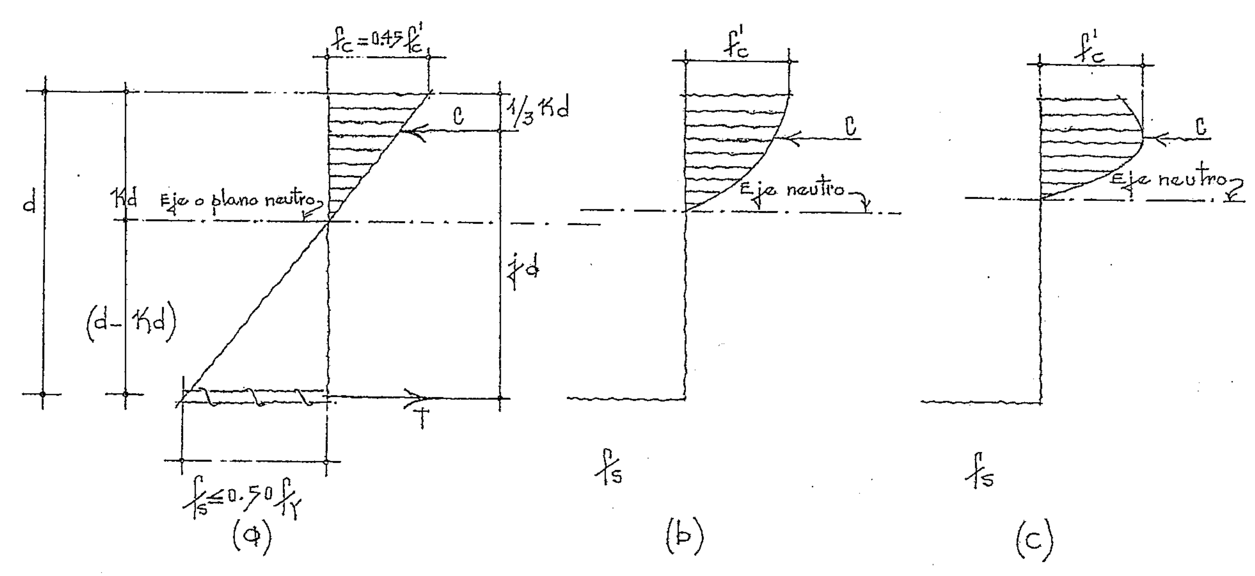
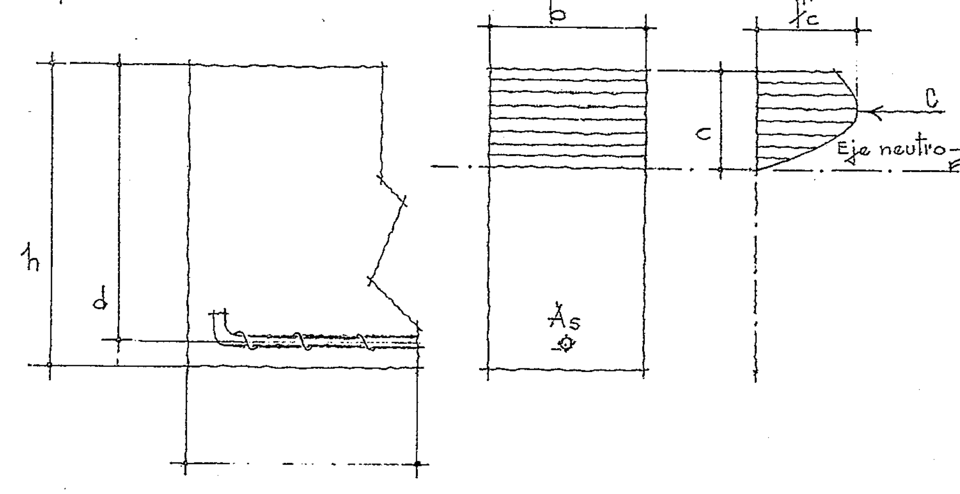


Fig. 3.9. Teoría elástica.

Fig. 3.10. Obsérvese como a mayor carga, el plano neutro se desplaza hacia arriba y, también la resultante de compresión.

Fig. 3.11. Obsérvese como los esfuerzos de compresión ya no son máximos en la fibra más alejada del plano neutro, cuando la carga es de ruptura.

Al respecto, el científico Charles S. Whitney, reemplaza la distribución del bloque de esfuerzos de concreto en compresión, por un rectángulo equivalente, lográndose una simplificación notable en los cálculos, figs. 3.15 y 3.16.



Tramo longitudinal de la viga. (a)

Sección transversal de la viga. (b)

Esfuerzo real próximo a la ruptura. (c)

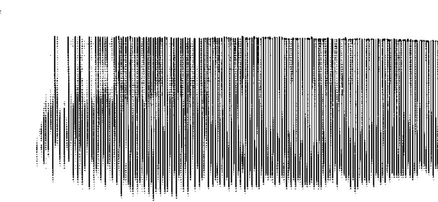
Fig. 3.12. Tramo de viga.

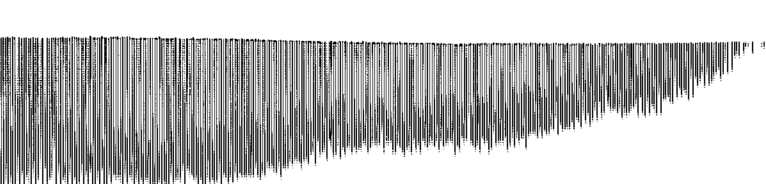
Fig. 3.13. Corte transversal de la viga.

Fig. 3.14.

La primera hipótesis que dice:

"Las secciones planas permanecen planas después de la deformación", es lo suficientemente exacta para fines de





diseño." Esta hipótesis deja de ser válida cuando se trata de vigas de gran peralte.

La distribución rectangular de esfuerzos tiene que cumplir dos condiciones:

1. El volumen rectangular representado por la resultante C, tiene que ser equivalente al volumen del bloque real de esfuerzos, fig. 3.15 y 3.16.

2. La distancia de la resultante C en la cuña rectangular equivalente, será la misma que la del bloque real de esfuerzos, fig. 3.15 y 3.16.

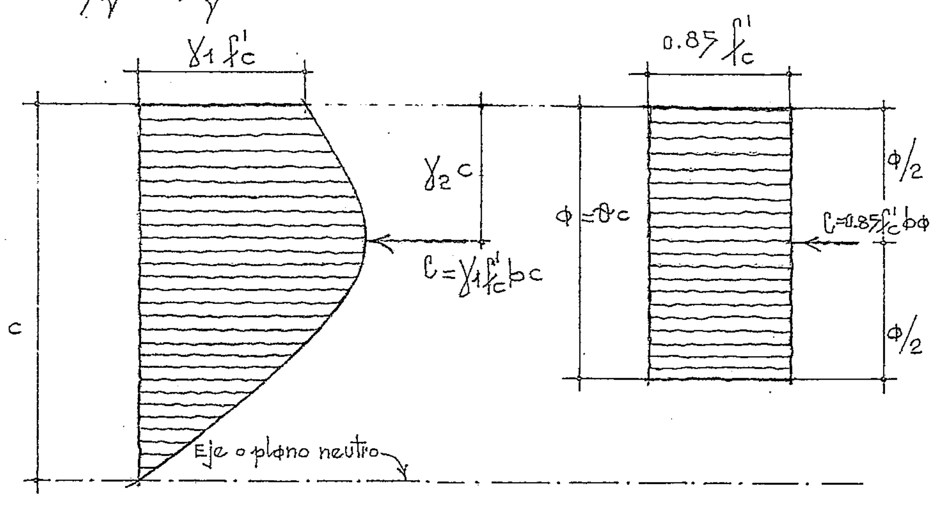


Fig. 3.15. Distribución real de esfuerzos en la zona de compresión.
Fig. 3.16. Distribución equivalente de esfuerzos en la zona de compresión.

Para cumplir con la primera condición, se tiene:

$$\gamma_1 f'_c bc = 0.85 f'_c ba \quad \ldots \quad (3.9)$$

$$\therefore \gamma_1 = \frac{0.85 f'_c ba}{f'_c bc} = 0.85 \frac{a}{c} \quad \ldots \quad (3.10)$$

y para simplificar

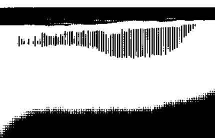
$$\frac{a}{c} = \theta \therefore a = \theta c \quad \ldots \quad (3.11)$$

Para la segunda condición, tendremos:

$$\gamma_2 c = \frac{a}{2} \therefore \gamma_2 c = 0.5a \therefore \gamma_2 = 0.5 \frac{a}{c} \quad (3.12)$$

Por tanto:

$$\gamma_1 = 0.85\theta \text{ y } \gamma_2 = 0.5\theta \quad \ldots \quad (3.13)$$



La fracción "Θ"* se tomará igual a 0.85 para concretos con $f'_c \leq 250$ Kg/cm²; esta fracción se reducirá a razón de 0.05 por cada 50 Kg/cm² de resistencia en exceso de 250 Kg/cm².

Para la obtención de fórmulas utilizadas en el diseño de vigas simplemente armadas (teoría plástica), véase la figs. 3.17 y 3.18

Una viga sometida a esfuerzos de flexión, puede fallar a:

φ) Tensión. Cuando la viga de concreto armado se encuentra reforzada con poca cantidad de acero, éste alcanza su resistencia de cedencia, antes que el concreto llegue a su máxima capacidad, $f_s = f_Y$.

$$\delta_s > \frac{f_Y}{E_s}$$

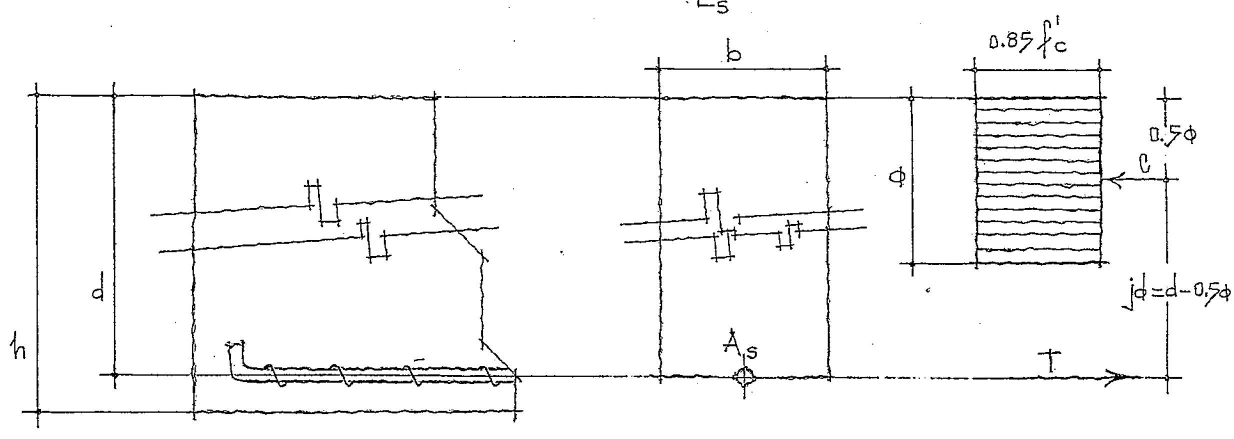


Fig. 3.17. Sección longitudinal y transversal de la viga.
Fig. 3.18. Rectángulo equivalente de esfuerzos.

Aplicando a las fuerzas C y T sus valores, se tiene:

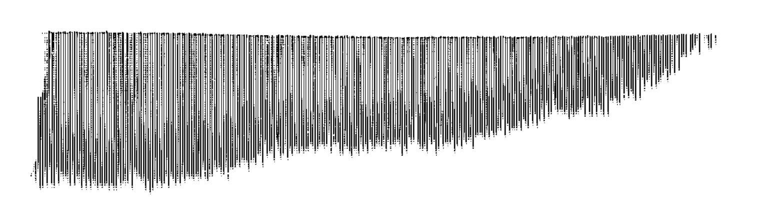
$$C = T$$

$$\therefore 0.85 f'_c \, b\phi = A_s f_Y \quad . \; . \; . (3.14) \quad \therefore \; \phi = \frac{A_s \, f_Y}{0.85 f'_c \, b} \quad . \; . \; . (3.15)$$

Sabemos también que el momento de diseño (M_U) es igual a:

$$M_U = C(d - 0.5\phi) = T(d - 0.5\phi) \quad . \; . \; . \; . (3.16)$$

*Muchas investigaciones se han realizado para determinar la magnitud del parámetro (Θ). El Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, recomienda un valor de Θ = 0.80. Otros autores toman para Θ = 0.85.



Dando a la distancia "a" su valor, se tiene:

$$A_s f_Y \left(d - 0.5 \frac{A_s f_Y}{0.85 f'_c b}\right) = A_s f_Y \left(d - 0.59 \frac{A_s f_Y}{f'_c b}\right) \quad . \; . (3.17)$$

y en relación con el porcentaje de acero, se tiene

$$\rho = \frac{A_s}{b\,d} \therefore A_s = \rho\, b\, d$$

$$\therefore \; \rho b d f_Y \left(d - 0.59 \frac{\rho b d f_Y}{f'_c b}\right) = \rho b d^2 f_Y \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_Y}{f'_c}\right)$$

Para simplificar la ecuación, designamos por $y = \frac{\rho f_Y}{f'_c}$, por tanto:

$$M_U = d^2 b f'_c \, y (1 - 0.59\, y) \quad . \; . \text{Momento en función del concreto}$$

y aplicando el factor de reducción correspondiente, obtenemos:

$$M_{UR} = F_R \, d^2 b f'_c \, y (1 - 0.59\, y) \quad . \; . \text{Momento resistente de diseño.}$$

Para obtener el momento de diseño en función del acero, se tiene:

$$M_U = T(d - 0.5a) = A_s f_Y \left(d - 0.5 \frac{A_s f_Y}{0.85 f'_c b}\right), \text{ y como}$$

$A_s = \rho b d$, se tiene:

$$A_s f_Y \left(d - 0.5 \frac{\rho b d f_Y}{0.85 f'_c b}\right) = A_s f_Y \left(d - 0.5 \frac{\rho d f_Y}{0.85 f'_c}\right)$$

y simplificando, obtenemos:

$$y = \frac{\rho f_Y}{f'_c} \therefore A_s f_Y (d - 0.59\, d\, y), \text{ y}$$

finalmente

$$M_U = A_s f_Y d (1 - 0.59\, y) \quad . \; . \text{Momento de diseño en función del acero}$$

Por tanto, el momento resistente de diseño en función del acero, vale:

$$M_{UR} = F_R A_s f_Y d (1 - 0.59\, y) \quad . \; . \text{Momento resistente de diseño.}$$

A mayor deformación, el momento resistente en la viga se reduce y el concreto falla por aplastamiento.





b) Compresión. Sucede cuando en una sección de concreto el porcentaje del refuerzo de acero es alto, ya que el concreto alcanza su máxima capacidad antes de la cedencia del acero, $f_S < f_Y$.

$$\delta_S < \frac{f_Y}{E_S}$$

Por necesidad de equilibrio, $C = T$

$$M_U = C\left(d - 0.5a\right) = 0.85 f'_c a b \left(d - 0.5a\right)$$

y aplicando el factor de reducción (F_R), se tiene:

$$M_{UR} = (F_R)\, 0.85 f'_c a b \left(d - 0.5a\right)$$

c) Falla balanceada. Se produce cuando ambos materiales (acero y concreto) alcanzan simultáneamente sus esfuerzos máximos, es decir, el acero llega a su esfuerzo de fluencia (f_Y) y el concreto alcanza su máxima deformación en la fibra más alejada en compresión $(\delta_c = 0.003)$.

De la ecuación general, obtenemos:

$$C = T \quad \therefore \quad 0.85 f'_c a b = A_s f_Y$$

Por comparación de triángulos en la fig. 3.19

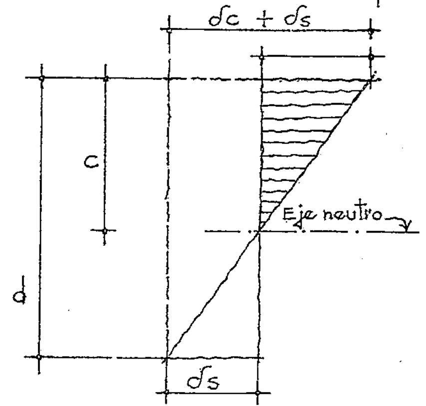


Fig. 3.19. Diagrama de deformaciones.

$$\frac{c}{d} = \frac{\delta_c}{\delta_c + \delta_s}$$, y las deformaciones valen:

$$\delta_c = 0.003 \quad y \quad \delta_s = \frac{f_Y}{E_s}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_Y}{E_s}}$$, y multiplicando todos los términos de la ecuación por E_s, se obtiene:

$$\frac{c}{d} = \frac{0.003\,E_s}{0.003\,E_s + \frac{f_Y E_s}{E_s}}$$, y el módulo elástico del acero vale $E_s = 2 \times 10^6 = 2\,000\,000\ Kg/cm^2$

por tanto, se tiene

$$\frac{c}{d} = \frac{6000}{6000 + \frac{f_Y \times 6000}{6000}} = \frac{6000}{6000 + f_Y}$$

y como $C = T$

$$\therefore 0.85\,f'_c\,b\,a = A_s f_Y$$, y recuérdese que

$$a = \theta c \quad y \quad A_s = \rho\,b\,d$$

$$0.85\,f'_c\,b\,\theta c = \rho\,b\,d\,f_Y$$

$$\therefore \rho = \frac{0.85\,f'_c\,b\,\theta c}{b\,d\,f_Y} = \frac{0.85\,f'_c\,\theta c}{d\,f_Y} = \frac{0.85\,f'_c\,\theta}{f_Y} \cdot \frac{c}{d}$$

$$y, \quad \frac{c}{d} = \frac{6000}{6000 + f_Y}$$

Substituyendo

$$\frac{0.85\,f'_c\,\theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y}$$, y finalmente

$$\rho_b = \frac{0.85\,f'_c\,\theta^{*}}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} = \frac{0.85\,f'_c}{f_Y} \cdot \frac{4800}{6000 + f_Y}$$ . . . Porcentaje de acero en la sección balanceada de una viga.

Cuando se trabaja con diferentes porcentajes de acero, se tendrá:

$\rho = \rho_b$, fallo balanceado

$\rho < \rho_b$, fallo a tensión

$\rho > \rho_b$, fallo a compresión

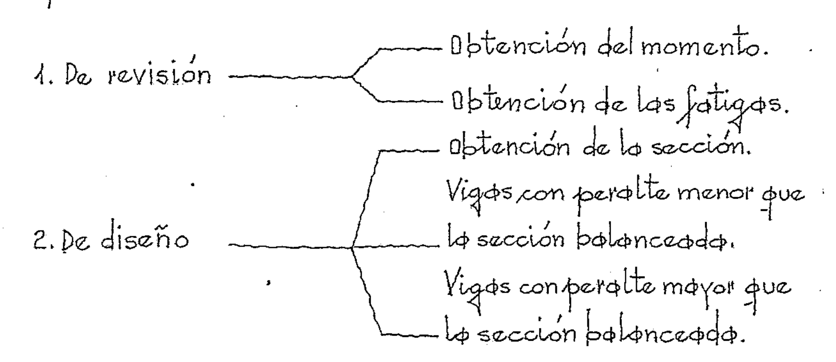
A continuación, se presentan varios ejemplos ilustrativos para mayor comprensión del lector. Los ejercicios serán resueltos aplicando la teoría elástica y el Diseño plástico.

* Se tomó ($\theta = 0.80$) siguiendo la recomendación dada por el Reglamento de Construcciones para el D.F.




Ejemplo ilustrativo (*Teoría Elástica*)

En las vigas simplemente armadas, se presentan dos casos diferentes de problemas:



Primer caso (*revisión*).

Ejemplo. Se tiene una viga simplemente armada donde se conocen sus fatigas (acero y concreto) y, también el área de acero. Calcular la capacidad del momento flexionante en la viga, figs. 3.20 a 3.22.

Fig. 3.20. Sección transversal de la viga.

Fig. 3.21. Área transformada de la sección.

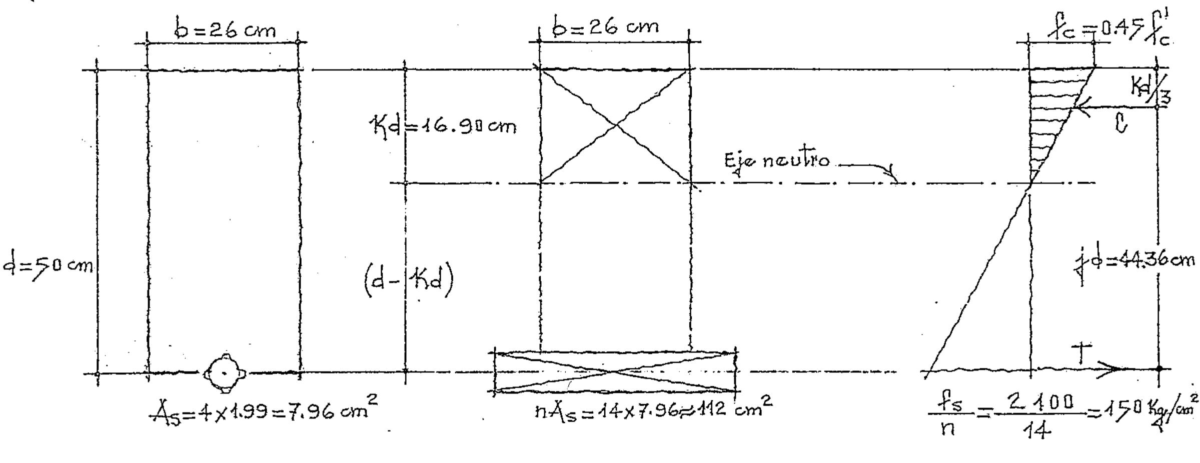
Fig. 3.22. Diagrama de fatigas.

Datos:

$b = 26$ cm $\quad f'_c = 200$ Kg/cm²

$d = 50$ cm $\quad f_y = 4200$ Kg/cm²

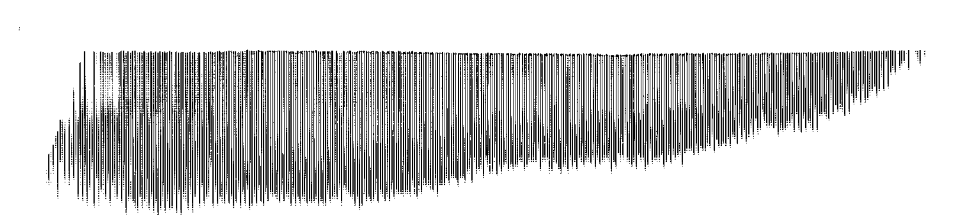
$A_s = 4 \phi 5/8''$

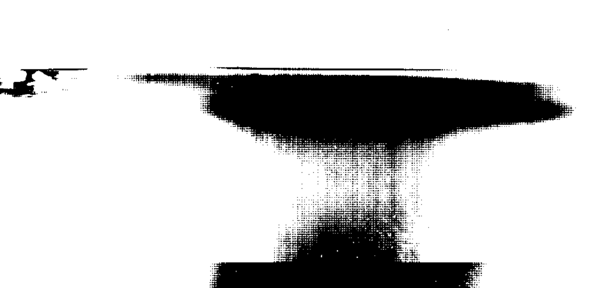


Primeramente obtenemos el valor de n:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{10000\sqrt{f'_c}} = \frac{2\,000\,000}{10000\sqrt{200}} \approx 14$$

$$n \approx 14$$





Antes de continuar con la solución del problema, será nece= homogeneizar la sección, es decir, se substituye el área de acero (7.9= por el área de concreto ideal nA_s, veamos:

$$nA_s = 14 \times 7.96 \approx 112 \text{ cm}^2$$

Haciendo momentos con respecto al eje neutro, obtenemos:

$$b \cdot Kd \cdot \frac{Kd}{2} - nA_s(d - Kd) = 0,$$ y dando valores a las li= les, se tiene $$\frac{26 \cdot Kd^2}{2} - 112(50 - Kd) = 0 \therefore 13Kd^2 + 112Kd - 5600 = 0$$

y dividiendo la ecuación entre 13, tendremos:

$$Kd^2 + 8.60\, Kd - 430 = 0$$

Aplicando la fórmula general de la ecuación de segundo grado, = tiene:

$$Kd = \frac{-(+8.60) \pm \sqrt{(8.60)^2 - 4(-430)}}{2} = \frac{-8.60 + \sqrt{74 + 172}}{2}$$

$$= \frac{-8.60 + \sqrt{1794}}{2} = \frac{-8.60 + 42.36}{2}$$

$$\therefore Kd \approx 16.90 \text{ cm}$$

El brazo de palanca (jd), vale:

$$jd = d - \frac{Kd}{3}$$

$$\therefore jd = 50 - \frac{16.90}{3} \approx 44.36 \text{cm}$$

La compresión total tiene como valor el volumen de la cuña triangular = esfuerzos y, se encuentra aplicada en el centro de gravedad de dicha cuña véase la figura 3.22

$$C = \frac{1}{2} f_c\, b\, Kd = 0.5 \times 90 \times 26 \times 16.90 \approx 19770 \text{ Kg}$$

El valor de la tensión total, es igual al área de acero por la fatiga del acero y localiza en el centro de gravedad del área del refuerzo, veamos:

$$T = A_s f_s = 7.96 \times 2100 = 16716 \text{ Kg}$$

ambas fuerzas no son iguales

$$C > T$$

En efecto, ambos materiales (acero y concreto) no alcanzan simultáneamente la totalidad de los esfuerzos, siendo el acero (16 716 Kg), el que llega primero a su fatiga máxima de trabajo y, por tanto, será el que gobernará la pieza.

Cuando ambas fatigas alcanzan simultáneamente su valor máximo, se dice que la viga está equilibrada o balanceada. Cuando esto ocurre, la viga se encuentra trabajando en las mejores condiciones de economía.

El momento de la sección es igual a la compresión (C) por el brazo de palanca (jd), o bien, la tensión (T) por el mismo brazo de palanca, veamos:

$$M_c = C\,jd = 19770 \times 44.36 \approx 877\,000 \text{ Kg cm}$$

$$M_s = T\,jd = 16716 \times 44.36 \approx 741\,520 \text{ Kg cm}$$

En el problema que nos ocupa, si deseamos que la viga se encuentre equilibrada, será necesario obtener el valor a que trabajará la fatiga del concreto para que ambos momentos sean iguales, veamos la fig. 3.23φ.

f_c

C

Kd = 16.90 cm

Eje neutro

d - Kd = 33.10 cm

jd

T

$\frac{f_s}{n}$

(φ)

Fig. 3.23φ. Diagrama de fatigas.

Por comparación de triángulos

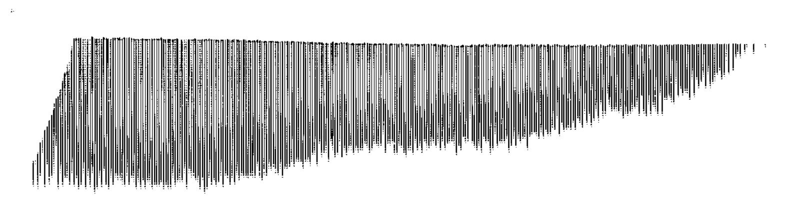
$$\frac{f_c}{16.90} = \frac{150}{33.10}$$

$$f_c = \frac{16.90 \times 150}{33.10} \approx 76.50 \text{ Kg/cm}^2$$

$$M_c = C\,jd = 0.5 \times 76.50 \times 26 \times 16.90 \times 44.36$$

$$\therefore M_c \approx 745\,560 \text{ Kg cm}$$

La viga se encuentra ya balanceada debido a que la compresión total es prácticamente igual a la tensión y en consecuencia, ambos momentos también serán iguales puesto que el brazo de palanca (jd), es el mismo para ambas resultantes (C y T).



Segundo caso (*revisión*).

Ejemplo. Se tiene una viga de sección rectangular sometida a un momento de 21000 Kgm. Se desea conocer sus fatigas. 3.23 a 3.25.

Datos:

$b = 22$ cm . . . . $f'_c = 250$ Kg/cm² (*supuesto*)

$d = 46$ cm . . . . $f_y = 4200$ Kg/cm² (*supuesto*)

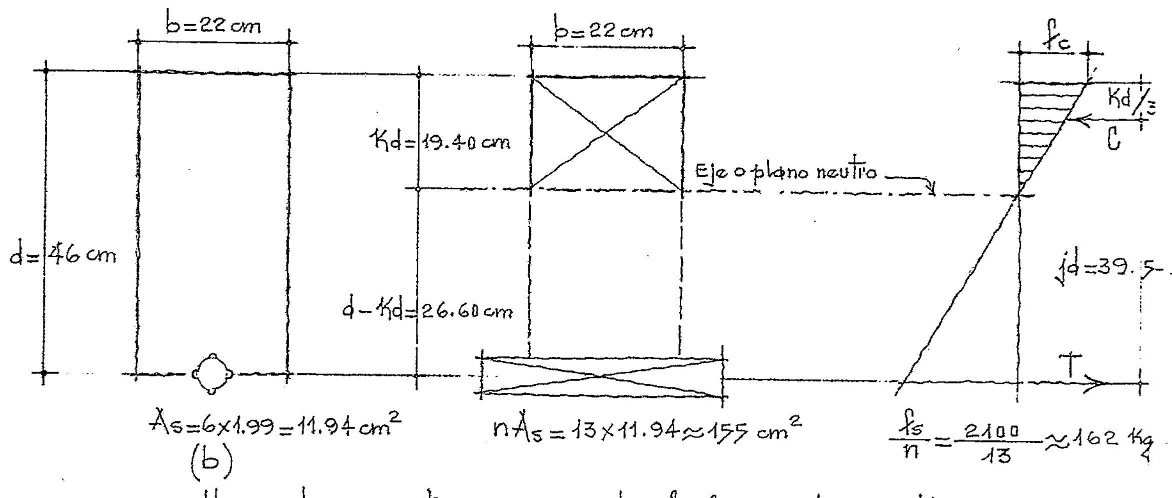
$$A_s = 6 \phi \# 5 = 6 \times 1.99 = 11.94 \text{ cm}^2$$

Obtenemos el valor de n:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{10000 \sqrt{f'_c}} = \frac{2\,000\,000}{10\,000 \sqrt{250}} \approx 13$$

Substituimos el área de acero por el área de concreto ideal, nA_s:

$$nA_s = 13 \times 11.94 \approx 155 \text{ cm}^2$$



(b)

Fig. 3.23 b. Corte transversal de la viga.
Fig. 3.24. Area transformada de la sección.
Fig. 3.25. Diagrama de fatigas.

Haciendo momentos con respecto al plano neutro, se tiene:

$$b \cdot Kd \cdot \frac{Kd}{2} - nA_s(d - Kd) = 0 \quad \therefore \quad \frac{b \cdot Kd^2}{2} - 155(46 - Kd) = 0$$

y dando valores obtenemos:

$$\frac{22 \cdot Kd^2}{2} + 155\,Kd - 7130 = 0 \quad \therefore \quad 11\,Kd^2 + 155\,Kd - 7130 = 0$$

y dividiendo entre 11 tendremos:

$$Kd^2 + 14.10 - 648 = 0$$

Aplicando la fórmula general de la ecuación de segundo grado, se tiene:

$$Kd = \frac{-(+14.10) \pm \sqrt{(14.10)^2 - 4(-648)}}{2} = \frac{-14.10 + \sqrt{199 + 2592}}{2}$$

$$= \frac{-14.10 + \sqrt{2791}}{2} = \frac{-14.10 + 52.83}{2}$$

$$\therefore Kd \approx 19.40 \text{ cm}$$

y (jd), vale:

$$jd = 46 - \frac{19.40}{3} \approx 39.54 \text{ cm}$$

Por razones de equilibrio, $C = T$, por tanto

$$M = C\,jd = T\,jd$$

$$\therefore C = T = \frac{M}{jd} = \frac{2100000}{39.54} \approx 53110 \text{ Kg}$$

y como

$$C = 0.5 f_c b K d = 0.5 \times f_c \times 22 \times 19.40$$

$$\therefore 53110 = 213.40 f_c$$

$$y \qquad f_c = \frac{53110}{213.40} \approx 249 \text{ Kg/cm}^2$$

Y la fatiga de ruptura (f'_c), valdrá:

$$f_c = 0.45 f'_c \quad \therefore f'_c = \frac{249}{0.45} \approx 554 \text{ Kg/cm}^2$$

El resultado nos indica que la fatiga supuesta para la solución del problema ($f'_c = 250$ Kg/cm^2), es inferior a la obtenida por cálculo ($f'_c = 554$ Kg/cm^2) y también,

$$T = A_s f_s = 11.94 \times f_s \quad \therefore 53110 = 11.94 f_s$$

$$y, \quad f_s = \frac{53110}{11.94} = 4448 \text{ Kg/cm}^2$$

La fatiga de trabajo del acero supuesta en el problema, está muy por abajo a la obtenida por cálculo.

Si deseamos conservar la misma sección en la viga y, la misma área de acero, será necesario, como ya se vió, aumentar las fatigas del concreto y también del acero. Sería más sencillo y práctico aumentar las dimensiones de la sección.

Primer caso (diseño)

Ejemplo. Diseñar las dimensiones de la viga y el área de acero. Se supone una viga simplemente apoyada con una longitud de 6.60 m.

Datos:

$b = ?$ . . . . . $f'_c = 200$ Kg/cm²

$d = ?$ . . . . . $f_y = 4200$ Kg/cm²

Relación obligada, $d = 2.2\,b$

Obtenemos primero el valor de n:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{10000\sqrt{f'_c}} = \frac{2\,000\,000}{10\,000\sqrt{200}} = 14.14 \approx 14$$

$$f_c = 0.45 f'_c = 0.45 \times 200 = 90 \text{ Kg/cm}^2$$

Haciendo referencia a la fig. 3.26 y 3.27

Fig. 3.26. Viga mostrando la carga y el claro.

$$M_{máx.} = \frac{wl^2}{8} = \frac{2600 \times 6.60^2}{8}$$

$$M_{máx.} \approx 14160 \text{ Kgm}$$

$$\frac{f_s}{n} = \frac{2100}{14} = 150 \text{ Kg/cm}^2$$

Fig. 3.27. Diagrama de fatigas.

$$\frac{Kd}{d} = \frac{f_c}{f_c + \frac{f_s}{n}} \therefore \frac{Kd}{d} = \frac{90}{90+150}$$

$$\frac{Kd}{d} = 0.375 \therefore Kd = 0.375d$$

$$y,\ jd = d - \frac{Kd}{3} = d - \frac{0.375\,d}{3}$$

$$\therefore jd = 1 - 0.125\,d = 0.875\,d$$

y como $M_c = \frac{1}{2} f_c b\, Kd\, jd = 0.5 \times 90 \times b \times 0.375d \times 0.875d \approx 15\,bd^2$

Es aconsejable que las relaciones entre d y b queden comprendidas entre 2 y 5. Cuando se tengan claros pequeños, se recomienda tomar $d = 2b$ y, para claros grandes será mejor suponer $d = 5b$.

De acuerdo con la relación obligada, se tiene:

$$M_c = 15 \times b \times 2.2b \times 2.2b = 1416000 \text{ Kg cm}$$

$$\therefore 72.6\, b^3 = 1416\,000 \text{ Kg cm}$$

$$\text{y,} \quad b = \sqrt[3]{\frac{1416\,000}{72.6}} \approx 27 \text{ cm}$$

y para d, tendremos:

$$d = 2.2b = 59.40 \text{ cm}$$

Calculamos ahora el área de acero, veamos:

$$M_s = A_s f_s\, jd = A_s \times 2100 \times 0.875 d$$

$$\therefore A_s = \frac{M_s}{2100 \times 0.875 \times 59.40} = \frac{1416\,000}{109\,148} \approx 12.98 \text{ cm}^2$$

Utilizando varillas del #6, se tiene:

$$\text{número de varillas} = \frac{12.98}{2.87} \approx 5\ \phi_s \# 6$$

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica que el área mínima de acero se calculará con la expresión

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y}\, bd = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200}\, 27 \times 59.40 \approx 3.80 \text{ cm}^2$$

$$12.98 \text{ cm}^2 > 3.80 \text{ cm}^2 \quad \text{(el área de acero es correcto)}$$

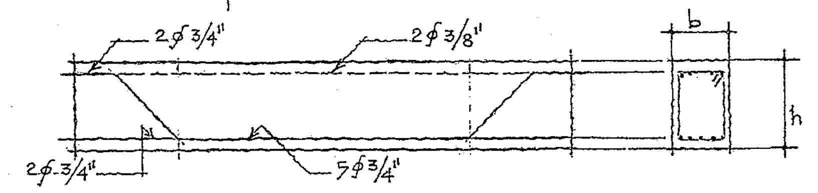
En las ilustraciones 3.28; 3.29; D-1 y D-2; se muestra esquemáticamente los armados en la viga.

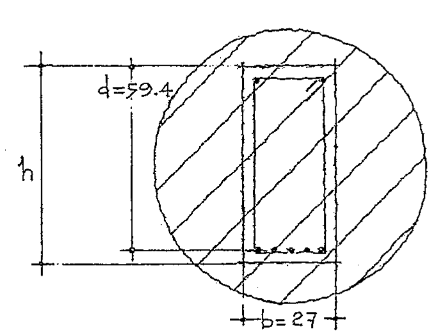
Fig. 3.28. Corte longitudinal de la viga. Armados.

Fig. 3.29. Corte transversal de la viga. Armados.

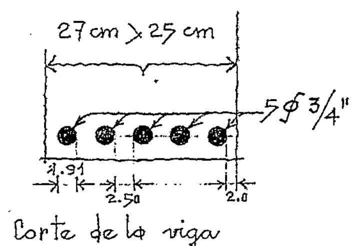
D-1. La viga mostrando sus armados. Esquema.

D-2. Los ϕ_s se pueden colocar en un solo lecho.





Las varillas caben en un lecho



Corte de la viga

Segundo caso (diseño).

Ejemplo. Vigas con peralte menor que la sección balanceada.

Tomando en cuenta las dimensiones de la viga del ejemplo anterior (27 x 59.4 cm) para un momento de 14160 Kgm., se desea en este ejemplo ... la sección a $b = 25$ cm y $d = 50$ cm.

Con los datos dados, calcular el área y la fatiga del acero.

Datos:

$b = 25$ cm $\qquad f'_c = 200$ Kg/cm²

$d = 50$ cm

Primeramente obtenemos el valor de n:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{10000\sqrt{f'_c}} = \frac{2\,000\,000}{10\,000\sqrt{200}} \approx 14.$$

$$f_c = 0.45 f'_c = 0.45 \times 200 = 90 \text{ Kg/cm}^2.$$

Haciendo referencia a la figura 3.30., obtenemos:

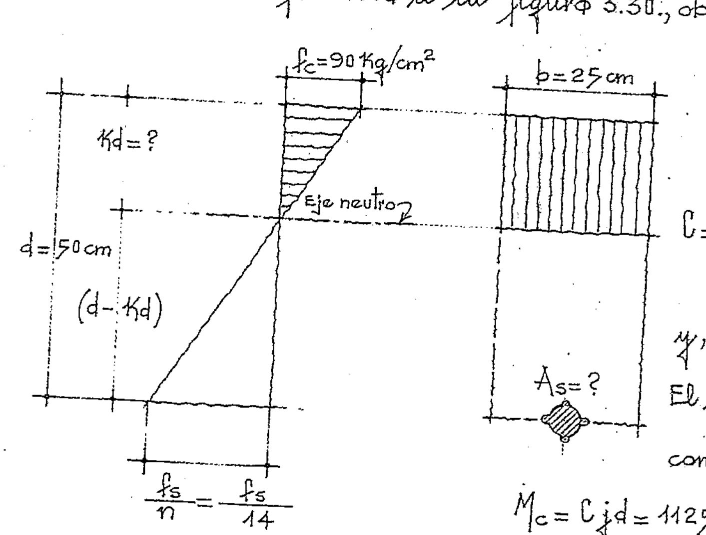


Fig. 3.30. Diagrama de fatigas y corte transversal de la viga.

La compresión vale.

$C = \frac{1}{2} f_c b Kd = 0.5 \times 90 \times 25(Kd)$
$= 1125(Kd)$

y, $jd = \left(d - \frac{Kd}{3}\right) = \left(50 - \frac{Kd}{3}\right)$

El momento en función del concreto:

$$M_c = C\,jd = 1125(Kd)\left(50 - \frac{Kd}{3}\right)$$

$$\therefore 1416000 = 56250\,Kd - \frac{1125\,Kd^2}{3}$$

y, $1416000 = 56250\,Kd - 375(Kd)^2$, y dividiendo entre 375, obtenemos:

$$3776 = 150\,Kd - Kd^2 \quad \therefore \quad Kd^2 + 150\,Kd - 3776 = 0$$

y, $Kd = \frac{-(+150) \pm \sqrt{(150)^2 - 4(-3776)}}{2} = \frac{-150 + \sqrt{37604}}{2} = \frac{-150 + 193.9}{2} = 21.95$

$$\therefore \quad Kd = 21.95 \text{ cm}$$

por tanto

$$jd = d - \frac{Kd}{3} = 50 - \frac{21.95}{3} \approx 42.70 \text{ cm}$$

Y como:

$$M_s = T(jd) \quad \therefore \quad T = \frac{1416\,000}{42.70} \approx 33162 \text{ Kg}$$

Por comparación de triángulos en la figura 3.31, tenemos:

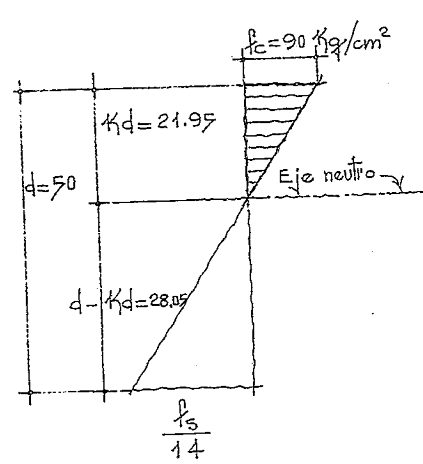


Fig. 3.31. Diagrama de fatigas.

$$\frac{21.95}{90} = \frac{28.05}{\frac{f_s}{n}} \quad \therefore \quad \frac{21.95 f_s}{n} = 90 \times 28.05$$

y, $90 \times 28.05 \times 14 = 21.95 f_s$

y finalmente

$$f_s = \frac{35343}{21.95} = 1610 \text{ Kg/cm}^2$$

A continuación calculamos el área de acero, veamos:

$T = A_s f_s$, y como $M_s = Tjd$, se tiene:

$$M_s = A_s f_s jd$$

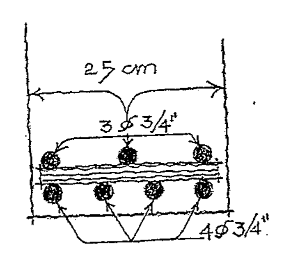
$$\therefore \; A_s = \frac{M_s}{f_s\, jd} = \frac{1416\,000}{1610 \times 42.70} = 20.60 \text{ cm}^2$$

Utilizando el mismo diámetro de varilla que en el ejemplo anterior, tendremos:

$$\text{número de varillas} = \frac{20.60}{2.87} = 7.18 \approx 7 \phi_s \# 6$$

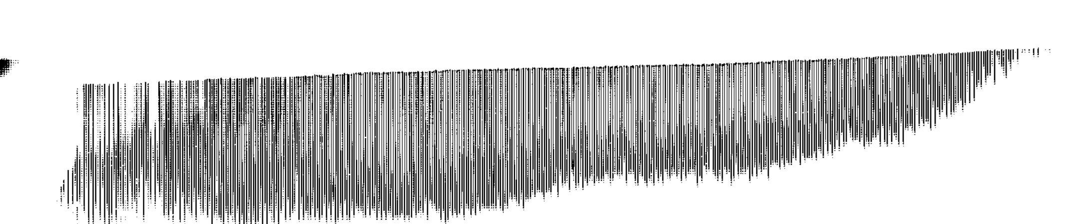
El acero no entra en un lecho, fig. 3.32., y será necesario colocarlo en dos lechos. Cuando esto ocurre, cambia el centroide y en consecuencia el brazo de palanca (jd).

Fig. 3.32. Las varillas se colocan en dos lechos.



Corte de la viga

El acero en el segundo lecho trabajará a una fatiga menor de 1610 Kg/cm², debido a que se aproxima al eje neutro



Tercer caso (diseño).

Ejemplo. Vigas con peralte mayor que la sección balanceada.

En este ejemplo se desea aumentar el peralte de la viga a ($d = 70$ cm), conservando el mismo espesor de $b = 25$ cm y el mismo momento de 14,160 Kgm.

Con los datos proporcionados, calcular el área de acero y la fatiga del concreto.

Datos:

$b = 25$ cm . . . . . $f_y = 4200$ Kg/cm²

$d = 70$ cm . . . . . $f'_c = 200$ Kg/cm²

$M_{máx.} = 14,160$ Kgm

Haciendo referencia a la fig. 3.33, se tiene:

$f_c = 90$ Kg/cm²

Kd=?

Eje neutro

d = 70 cm

d - Kd=?

$\frac{f_s}{n} = \frac{2100}{14} = 150$ Kg/cm²

Fig. 3.33. Diagrama de fatigas.

La compresión valdrá:

$$C = 0.5 f_c b Kd = 0.5 \times 90 \times 25 (Kd)$$
$$= 1125\ Kd$$

El brazo de palanca (jd), vale:

$$jd = \left(d - \frac{Kd}{3}\right) = 70 - \frac{Kd}{3}$$

Obtención del momento en función del concreto:

$$M_c = C\,jd = 1125 (Kd)\left(70 - \frac{Kd}{3}\right)$$

$$\therefore\ 1416000 = 78750\ Kd - \frac{1125\ Kd^2}{3}$$

y, $1416000 = 78750\ Kd - 375\ Kd^2$, y dividiendo entre 375, se tiene:

$$3776 = 210\ Kd - Kd^2\ \therefore\ Kd^2 + 210\ Kd - 3776 = 0$$

$$\therefore\ Kd = \frac{-(+210) \pm \sqrt{(210)^2 - 4(-3776)}}{2} = \frac{-210 + \sqrt{59204}}{2} = \frac{-210 + 243.3}{2}$$

$$Kd = 16.65 \text{ cm}$$

El brazo de palanca (jd), vale:

$$jd = d - \frac{Kd}{3} = 70 - \frac{16.65}{3} = 64.45 \text{ cm}$$

Obtención del momento en función del acero:

$$M_s = Tjd \quad \therefore \quad T = \frac{M_s}{jd} = \frac{1416000}{64.45} \approx 21970 \text{ Kg}$$

Por comparación de triángulos en la figura 3.34, obtenemos:

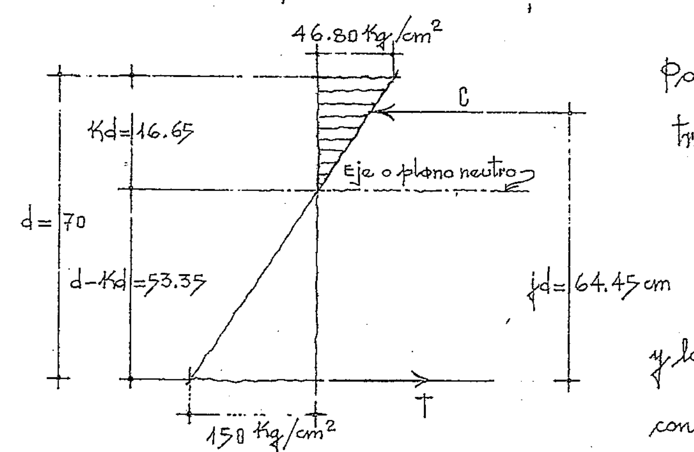


Fig. 3.34. Diagrama de fatigas.

Por comparación de triángulos; obtener (f_c)

$$\frac{f_c}{16.65} = \frac{150}{53.35}$$

$$\therefore f_c \approx 46.80 \text{ Kg/cm}^2$$

y la fatiga de ruptura del concreto, valdrá:

$$f_c = 0.45 f'_c \quad \therefore \quad f' = \frac{f_c}{0.45} = \frac{46.80}{0.45} = 104 \text{ Kg/cm}^2$$

A continuación calculamos el área de acero:

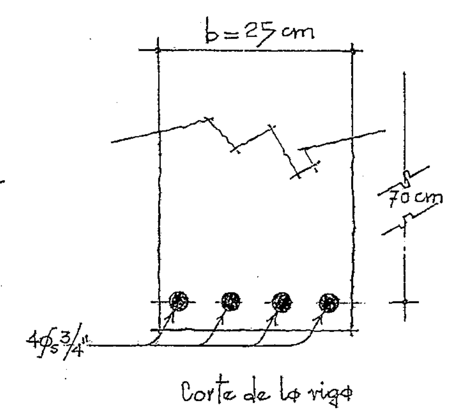
$$M_s = T jd = A_s f_s jd, \text{ y}$$

$$A_s = \frac{M_s}{f_s\, jd} = \frac{1416000}{2100 \times 64.45} = 10.46 \text{ cm}^2$$

Con el mismo diámetro de varilla de 3/4", tendremos:

$$\text{número de varillas} = \frac{10.46}{2.87} \approx 4 \phi_s \# 6$$

Como se puede observar en la figura 3.35, la fatiga del concreto disminuye considerablemente y por consiguiente disminuye el área de acero



Corte de la viga

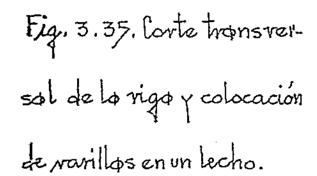
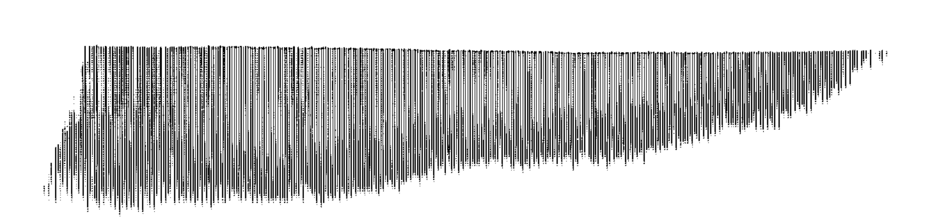


Fig. 3.35. Corte transversal de la viga y colocación de varillas en un lecho.



Ejemplo ilustrativo (Diseño Plástico)

En una viga de sección rectangular ($d = 60$ cm y $b = 30$ cm), arma con 4 varillas de 5/8", calcular el momento resistente de diseño.

Dígase si la viga falla a tensión, a compresión o se encuentra balanceada. La construcción se considera de tipo normal, figuras 3.36 a 3.38.

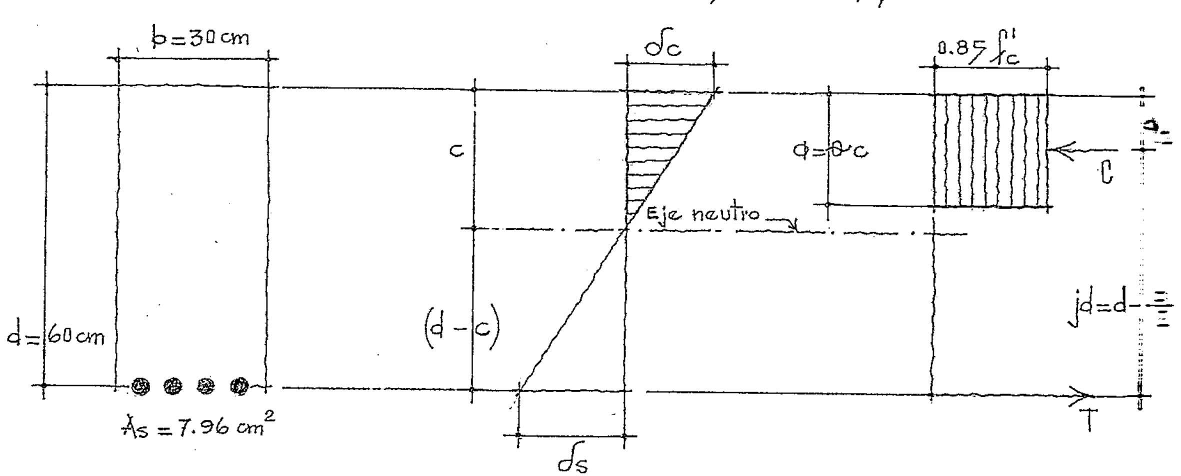


Fig. 3.36 Fig. 3.37 Fig. 3.38

La viga se supone con el máximo porcentaje de acero como viga balanceada:

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} = \frac{0.85 \times 200 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$= \frac{136}{4200} \cdot \frac{6000}{10\,200} = 0.032 \times 0.588 = 0.0188$$

y, $\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4 \times 1.99}{30 \times 60} = \frac{7.96}{1800} \approx 0.0044$

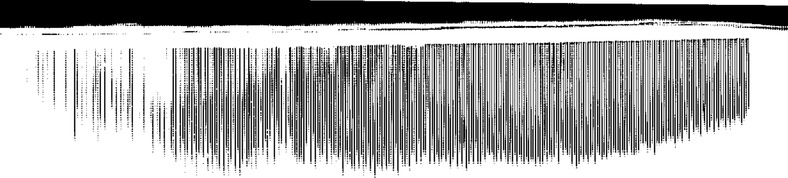
$\therefore\ \rho < \rho_b\ \therefore 0.0044 < 0.0188$ (la viga presenta falla a tensión

Cálculo del momento resistente de diseño:

El reglamento determina:

Al multiplicar la resistencia calculada con las hipótesis mencionadas, por el factor de resistencia o factor de reducción (F_R), obtenemos la resistencia de diseño (M_{UR}). Este factor se tomará igual a 0.9 para esfuerzos de flexión y, 0.8 para cortante, torsión y flexocompresión, cuando el núcleo se encuentre confinado y, de 0.7 cuando no lo esté. Para aplastamiento, se tomará $F_R = 0.7$.

Otros autores consideran para aplastamiento, $F_R = 0.75$.



Por lo mencionado anteriormente, tenemos:

$$M_{UR}=(F_R)A_s f_Y d(1-0.59\,y) \quad \therefore \quad y=\frac{\rho f_Y}{f'_c}$$

$$=0.90\times 7.96\times 4200\times 60\left(1-0.59\ \frac{0.0044\times 4200}{200}\right)$$

$$=1805300\,(1-0.0545)\approx 1707000\ Kg\text{-}cm$$

Ejemplo ilustrativo *(Diseño Plástico)*

En las figuras 3.39 a 3.42, se muestra una viga simplemente apoyada de concreto armado.

Diseñar la viga para las siguientes condiciones:

a) Con el mínimo porcentaje de acero.

b) Con el máximo porcentaje de acero.

c) Con la viga balanceada.

Solución (a).

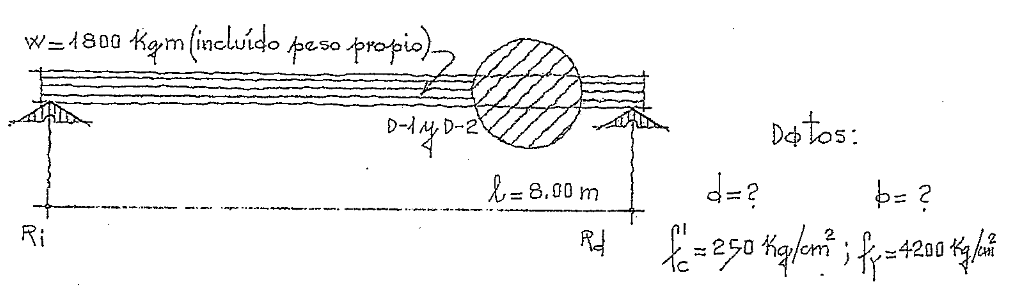


Fig. 3.39. Viga mostrando la carga y el claro.

Datos:

d=? b= ?

$f'_c=250\ Kg/cm^2$; $f_Y=4200\ Kg/cm^2$

$$M_{máx.}=\frac{wl^2}{8}=\frac{1800\times 8^2}{8}=\frac{115\,200}{8}=14\,400\ Kg\text{-}cm$$

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

$$A_{s\,mín.}=\frac{0.7\sqrt{f'_c}}{4200}\,bd=\frac{0.7\sqrt{250}}{4200}\,bd=0.0026\,bd$$

y, $$\rho=\frac{A_s}{bd}=\frac{0.0026\,bd}{bd}=0.0026,$$ y también

$$y=\rho\,\frac{f_Y}{f'_c}=0.0026\,\frac{4200}{250}=0.0437$$

Para estos casos, es común suponer un espesor para viga, tomando en cuenta que la relación peralte – espesor, se recomienda no sea mayor de 5 para evitar torsiones en la viga. Por lo anterior suponemos, b=35 cm.

$$d^2=\frac{M_U}{b f'_c\, y(1-0.59\,y)}=\frac{1440000}{35\times 250\times 0.0437(1-0.59\times 0.0437)}=3883\ cm^2$$

Como se supuso a $b = 35$ cm, tendremos:

$$d = \sqrt{3883} \simeq 63 \text{ cm}$$

$$\text{Relación} = \frac{63}{35} = 1.8$$

Cálculo del área de acero

$$A_s = \rho b d = 0.0026 \times 35 \times 63 \simeq 5.74 \text{ cm}^2$$

Al escoger otra relación entre d y b, la solución puede presentar ciertas diferencias.

Con varillas del #5, se tiene:

$$\text{número de varillas} = \frac{5.74}{1.99} \simeq 3\phi_s \#5$$

En las figuras 3.40 y 3.41; 3.42, se muestran los armados.

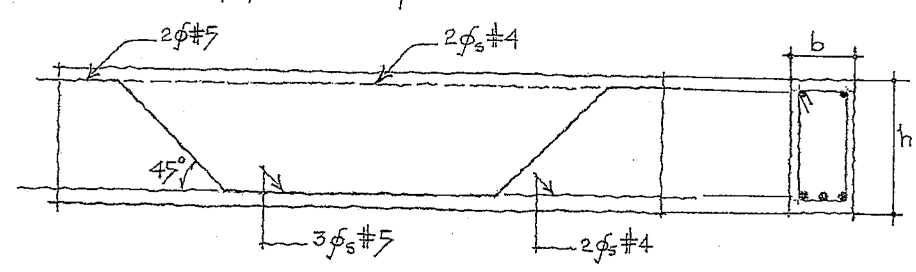


Fig. 3.40. Corte longitudinal de la viga. Armados.

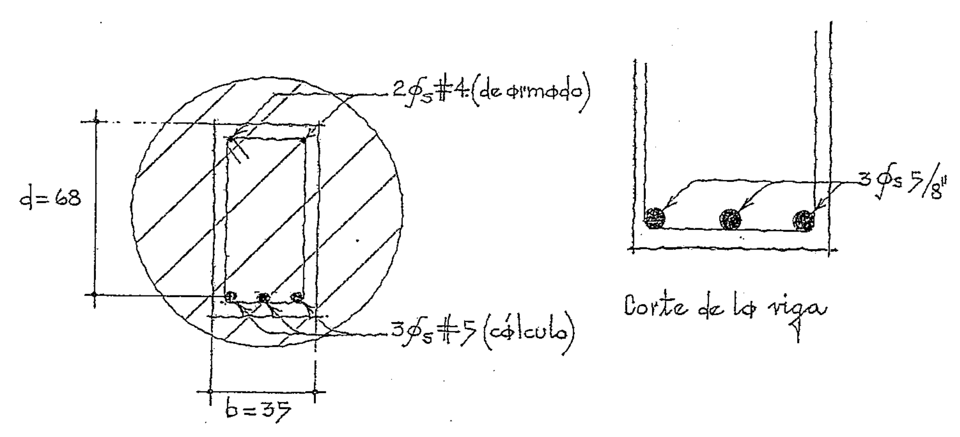


Fig. 3.41. Corte transversal de la viga. Armados.

D-1. La viga mostrando sus armados.

D-2. Las varillas caben en un lecho.

Fig. 3.42. Detalle de los armados.

Cuando una viga falla a tensión (falla dúctil $\rho < \rho_b$, poco porcentaje de acero), la viga se agrietará fuertemente, con deflexiones y fracturas que anuncian con anticipación, el colapso de la viga.

Solución (b).

Cuando la estructura no esté expuesta a resistir fuerzas sísmicas, el área máxima de acero en tensión en vigas simplemente armadas, será la misma que la correspondiente a la falla balanceada, es decir:

$$\rho_b^{*} = \frac{0.85\, f'_c\, \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y}$$

Si la estructura tiene que soportar fuerzas sísmicas, el reglamento determina que el área máxima de acero en tensión en vigas simplemente armadas, será:

$$\rho_{máx.}^{*} = 0.75\, \frac{0.85\, f'_c\, \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y}$$

Por lo expuesto, tendremos:

$$\rho_b = \frac{0.85 \times 250 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{4200 + 6000} = \frac{1\,020\,000}{42\,840\,000} \simeq 0.024$$

$q = \rho \dfrac{f_Y}{f'_c}$ $\therefore$ $q = 0.024\, \dfrac{4200}{250} \simeq 0.40$, y el reglamento especifica también:

"El espesor o ancho de la viga no será menor de 20 cm."

Por tanto:

$$d^2 = \frac{M_U}{b\, f'_c\, q\,(1 - 0.59\, q)} = \frac{1\,440\,000}{20 \times 250 \times 0.40\,(1 - 0.59 \times 0.40)} = 942.40\ cm^2$$

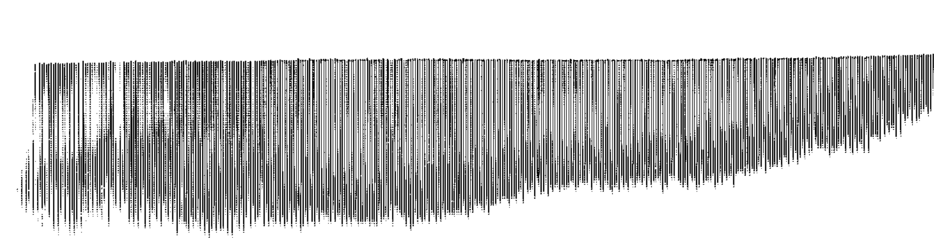
$$\therefore\ d \simeq 31\ cm$$

El peralte de 31 cm, es el mínimo que podrá tener la viga ya que se encuentra reforzada a su máximo porcentaje de acero permitido por el reglamento.

---

* Al respecto hay discrepancia en las mencionadas consideraciones, pues muchos autores para mayor seguridad y evitar una falla frágil, recomiendan aplicar la fracción (0.75) para estructuras expuestas o no a fuerzas sísmicas.

El autor, aplicará en los ejemplos lo especificado por el Reglamento de Construcciones del D.F., sin embargo, es indudable que la fracción mencionada permite que la estructura se agriete visiblemente, avisando que fallará inminentemente.



Calculamos a continuación el área de acero:

$$\text{como } \rho = \frac{A_s}{b\,d} \;\therefore\; A_s = \rho\, b\, d = 0.024 \times 20 \times 31 = 14.88 \text{ cm}^2$$

Utilizando varillas del #8, tendremos:

$$\text{número de varillas} = \frac{14.88}{5.07} \simeq 3\phi_s\#8$$

En las figuras 3.43 a 3.45, se muestran los armados

Fig. 3.43. Corte longitudinal de la viga. Armados.

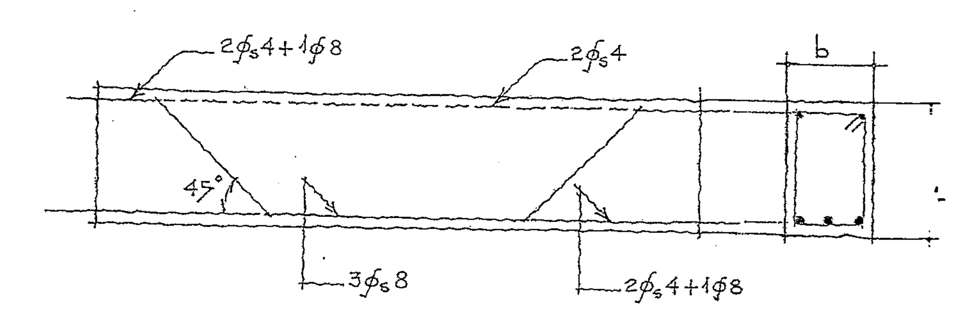
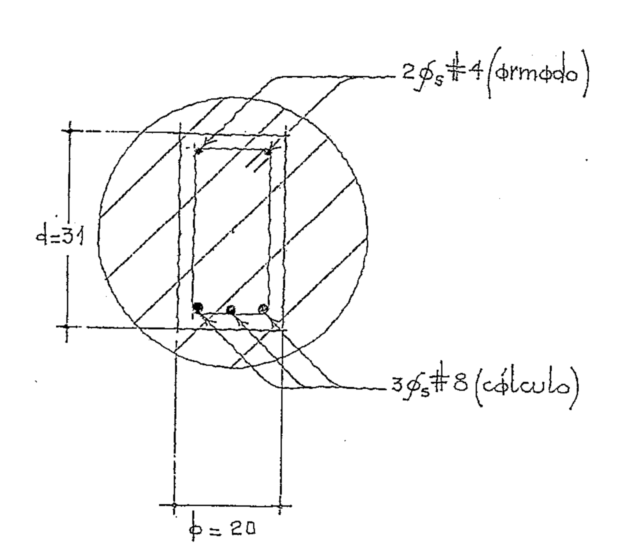
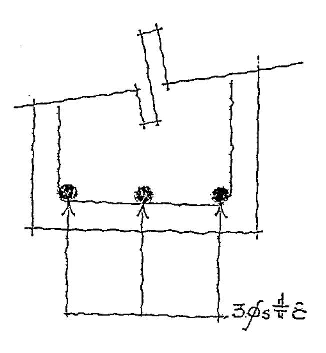


Fig. 3.44. Corte transversal de la viga. Armados.

Fig. 3.45. Detalle de los armados.

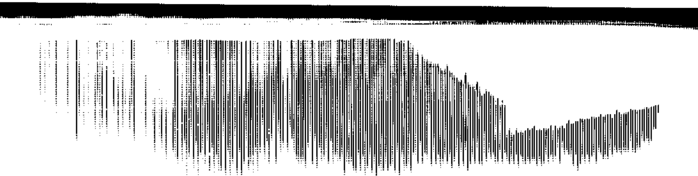


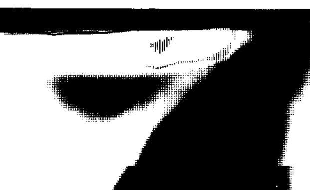


Corte transversal de la viga

Cuando una viga falla a compresión (falla frágil, $\rho > \rho_b$, viga con alto porcentaje de acero), la falla es extremadamente peligrosa, debido a que fallan con poca advertencia visible.

Cuando la viga falla a tensión (falla dúctil $\rho < \rho_b$, viga con bajo porcentaje de acero), la viga se agrietará lentamente del lado de la tensión, indicándonos fuertes deflexiones y fracturas que anuncian el colapso con anticipación.





Solución (c).

Cuando la viga se encuentra balanceada ($\rho_b = \rho_{máx.}$), entonces la solución (c) es idéntica a la solución (b).

A continuación se resuelve un ejemplo suponiendo que la estructura se encuentra expuesta a fuerzas sísmicas.

Ejemplo ilustrativo.

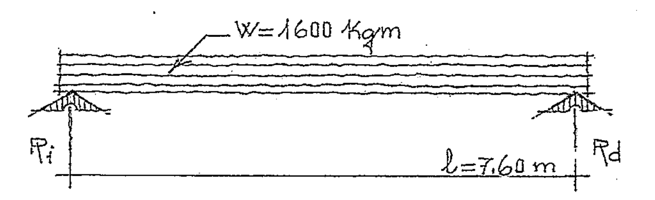
Utilizando una viga de concreto reforzado, se desea salvar un claro de 7.60 m. Calcular el momento resistente, el área de acero y la sección de concreto. Véanse las figuras 3.46 a 3.49.

Relación obligada de la viga: $d = 3b$.

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm^2 ; $f_Y = 4200$ Kg/cm^2

3.46. Viga mostran- [illegible] y el claro.



$$M_{máx.} = \frac{w\,l^2}{8} = \frac{1600 \times 7.60^2}{8} \simeq 11550 \text{ Kgm}$$

$$\rho_{máx.} = 0.75\,\frac{0.85\,f'_c\,\beta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} = 0.75\,\frac{0.85 \times 200 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$= \frac{0.6375 \times 200}{4200} \cdot \frac{4800}{10\,200} = 0.03 \times 0.47 \simeq 0.014$$

$$y = \rho\,\frac{f_Y}{f'_c} \quad \therefore \quad y = 0.014\,\frac{4200}{200} = 0.294$$

Se sabe que

$$M_u = d^2\,b\,f'_c\,y\,(1 - 0.59\,y)$$

$$\therefore\ d^2 = 3b \cdot 3b \quad y \quad M_u = 3b \cdot 3b \cdot b \cdot f'_c \cdot y\,(1 - 0.59\,y)$$

$$M_u = 9\,b^3 \times 200 \times 0.294\,(1 - 0.59 \times 0.294)$$

$$y, \quad b = \sqrt[3]{\frac{1155000}{9 \times 200 \times 0.294\,(1 - 0.59 \times 0.294)}} = \sqrt[3]{\frac{1155000}{437.65}} = \sqrt[3]{2639} = 13.8$$

Referente al espesor de una viga el reglamento, determina:

"El espesor o ancho de una viga de concreto reforzado, no será menor de 20 cm."

Atendiendo a la anterior especificación, se tiene:

$b \simeq 20$ cm, por especificación

por tanto

$$d = 3b = 3 \times 20 = 60 \text{ cm}$$

Obtención del área de acero

$$M_U = A_s f_y d (1 - 0.59\, y) \quad y, \quad y = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

$$\therefore A_s = \frac{M_U}{f_y d \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c}\right)} = \frac{1155000}{4200 \times 60 \left(1 - 0.59 \frac{0.014 \times 4200}{200}\right)}$$

$$\therefore A_s \simeq 5.55 \text{ cm}^2; \text{ con } \phi_s \#5 = \frac{5.55}{1.99} \simeq 3\phi_s$$

Para obtener el momento resistente de diseño (M_{UR}), recuérdese se tendrá que aplicar el factor de reducción (F_R), que vale 0.90.

En las figuras 3.47 y 3.48, se muestran los armados; en la fig. se muestra en detalle.

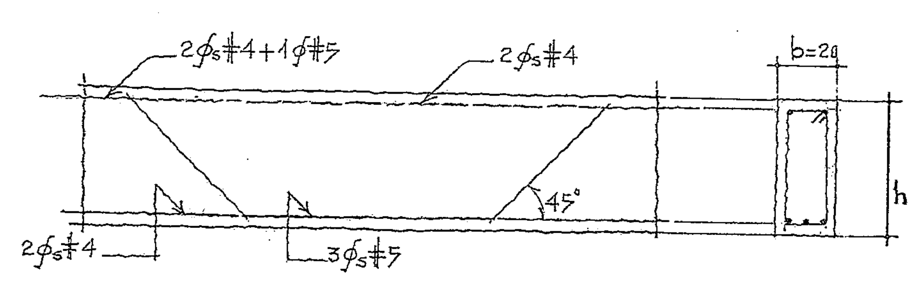


Fig. 3.47. Corte longitudinal de la viga. Armados.

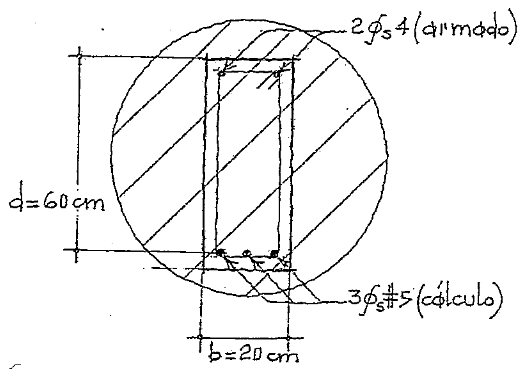


Fig. 3.48. Corte transversal de la viga. Armados.

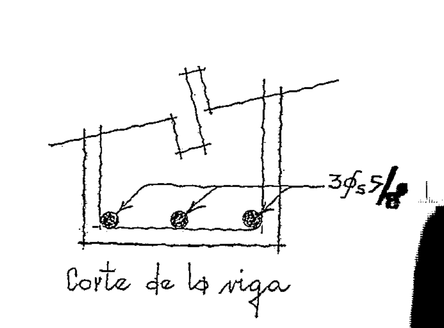


Fig. 3.49. Detalle de los armados.



En el ejemplo que se presenta a continuación, se aplicarán en forma completa las especificaciones referente a factores de carga (F_c), y de reducción (F_R), impuestas por el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal.

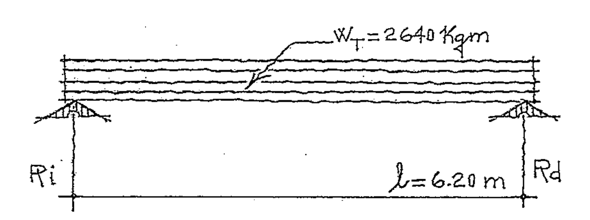
Ejemplo ilustrativo.

Se tiene una viga de concreto reforzado que salva un claro de 6.20 m (la viga se encuentra simplemente apoyada), en una sala de espectáculos donde se supone que intervienen únicamente acciones permanentes y variables, figuras 3.50 a 3.53.

Datos:

$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2 \quad ; \quad f_Y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_c = 1.5 \text{ (véase factores de carga)}$$



Sobrecarga = 1310 Kgm

Carga viva = 150 Kgm

3.50. Viga mostran- [illegible] carga y el claro.

Como se desconoce la sección de la viga, se desconoce también el peso propio de la misma. Por tanto, suponemos:

$$d \simeq \frac{1}{12} \text{ claro} \quad y \quad b = \frac{d}{2}$$

$$\therefore \; d = \frac{620}{12} \simeq 50 \text{ cm} \quad ; \quad b = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$$

Con la sección obtenida calculamos el peso propio de la viga:

$$p.p. = 0.25 \times 0.50 \times 2400 = 300 \text{ Kgm}$$

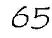
$$W = 1310 + 150 + 300 = 1760 \text{ Kgm}$$

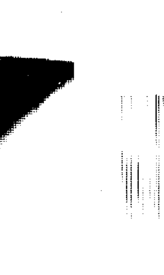
Aplicando el factor de carga correspondiente, se tiene

$$W_T = 1760 (1.5) = 2640 \text{ Kgm}$$

$$M_{máx.} = \frac{W_T l^2}{8} = \frac{2640 \, (6.2)^2}{8} \simeq 12686 \text{ Kgm} = 1268600 \text{ Kgcm}$$

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \, \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} = \frac{0.85 \times 200}{4200} \cdot \frac{4800}{10200} = 0.040 \times 0.47 \simeq 0.019$$





y, $\quad y = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.019 \frac{4200}{200} = 0.399$

y como

$$M_{UR} = (F_R)\, d^2 b f'_c\, y (1 - 0.59\, y)$$

$$d = \sqrt{\frac{1268600}{0.90 \times 25 \times 200 \times 0.399 (1 - 0.59 \times 0.399)}} = \sqrt{\frac{1268600}{1373}} \simeq 31\ cm$$

Para no cambiar la sección, dejamos el peralte de 50 cm
jamos el área de acero; con esta solución la viga resulta más
ca, además, al tener bajo contenido de acero ($\rho < \rho_b$), la viga pr
carácter dúctil, con falla a la tensión y advertencia muy visi
falla.

Cálculo del área del acero:

$$A_s = \frac{M_{UR}}{F_R f_y d (1 - 0.59\, y)} = \frac{1268600}{0.90 \times 4200 \times 50 (1 - 0.59 \times 0.39}$$

$\therefore A_s \simeq 8.78\ cm^2$; con $\phi_s \# 6 = \frac{8.78}{2.87} \simeq 3 \phi_s$

Dejando el peralte de 31 cm^2, el área de acero aumentaría a

$A_s = 14.15\ cm^2$; con $\phi_s \# 6 = \frac{14.15}{2.87} \simeq 5 \phi_s$

En las figuras 3.51 a 3.53, se muestran los armados y su co

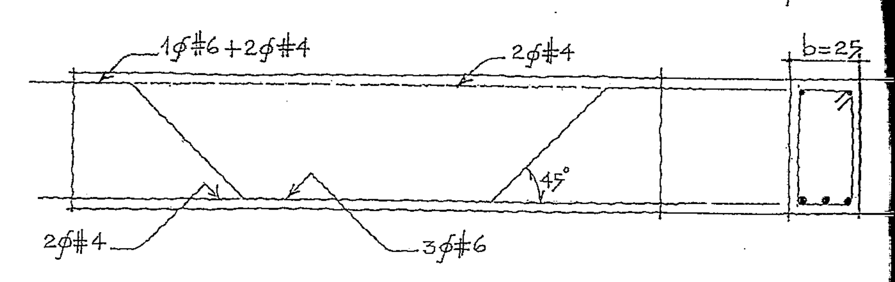
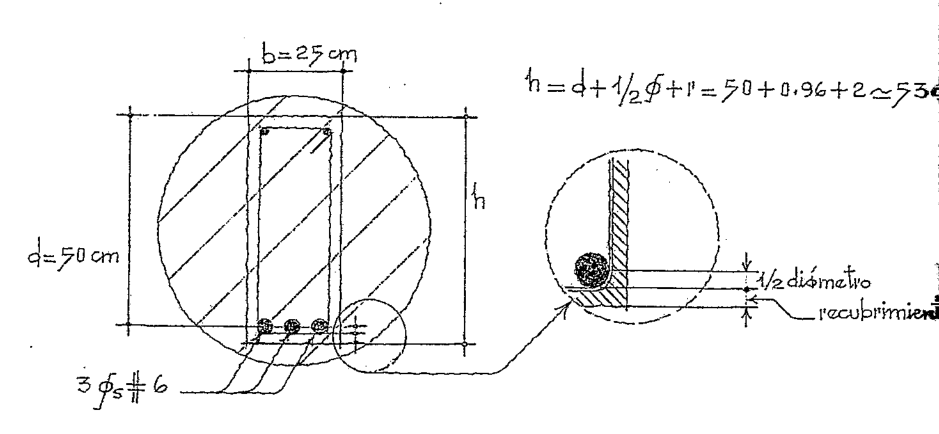


Fig. 3.51. Corte longitudinal de la viga. Armados.



$h = d + 1/2\phi + r' = 50 + 0.96 + 2 \simeq 53$

Fig. 3.52. Corte transversal de la viga. Armados.

Fig. 3.53. Detalle de armados y recubrimiento.

Referencias bibliográficas

Capítulo 3

Norris y Wilbur, *"Análisis Elemental de Estructuras,"* McGraw-Hill de México, 1977.

Whitney, S. Charles y E. Cohen, *"Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete,"* ACI Journal, noviembre, 1956.

"Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado," ACI 318-83, Detroit, 1983.

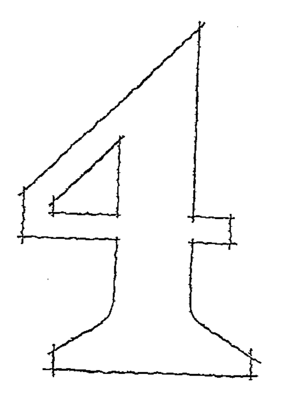
"Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal," México, 1988.

Hognestad, E., *"A study of combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members,"* University of Illinois Engineering Experimental Station, Boletín núm. 399, noviembre 1951.

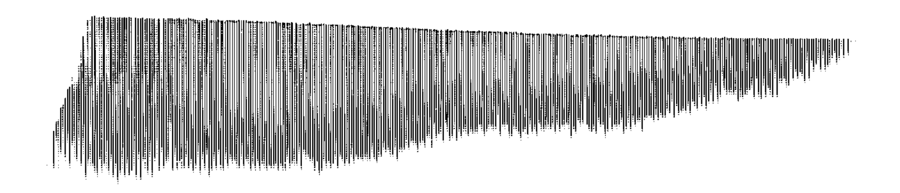
Whitney, S. Charles, *"Plastic Theory of Reinforced Concrete Design,"* Transactions ASCE, 1942.

ACI-ASCE Committee 327, *"Ultimate Strength"*, Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, 1956.

SP-43 American Concrete Institute, *"Deflections of Concrete Structures"*, Detroit, 1974.



VIGAS RECTANGULARES DOBLEMENTE REFORZADAS



4.1. Generalidades.- La viga doblemente reforzada se ... cuando por requerimientos arquitectónicos o de índole estructural ... ción transversal de la viga se encuentra limitada a una dim... determinada. Cuando esto ocurre, el área de concreto destinada ... la compresión resulta insuficiente y la única manera de abs... es colocando acero en la zona de compresión, originándose l... doblemente armada.

En estas condiciones donde se trabaja con una sección ... da, la viga resulta costosa pues el acero se sabe que no es un ... muy recomendable para resistir compresiones.

En vigas doblemente reforzadas el reglamento del ACI, pr...

"Tomando en cuenta las deformaciones plásticas, el esfuerzo en el hierro de compresión en piezas sometidas a flexión, se tomará igual al doble de la calculada con la hipótesis elástica, pero sin exceder, en ningún momento, de la fatiga de tensión f_s"; veamos:

$$f_{sc} = 2n f_{cs} \leq f_s \quad \therefore \; f_{cs} = f_{sc}/2n \qquad (4.\ldots$$

El área transformada después del desplazamiento que s... concreto por el acero en compresión, será igual a:

$$(2n-1)A'_s \qquad (4.\ldots$$

A continuación, analizaremos casos típicos de revisión.

Ejemplo ilustrativo (Teoría Elástica).

Determinar las fatigas de trabajo en una viga con doble arma... sometida a un momento de 18 000 Kgm.

$b = 25$ cm ; $f'_c = 200$ Kg/cm² $n = 14$ (ver tabla de constante...

$d = 50$ cm ; $f_y = 4200$ Kg/cm²

$A_s = 4\phi_s \# 6 = 4 \times 2.87 \text{ cm}^2 = 11.48 \text{ cm}^2$; $A'_s = 3\phi_s \# 4 = 3 \times 1.27 \text{ cm}^2 = 3.81$...

En las figuras 4.1 a 4.3 se muestra la viga doblemente reforzada:

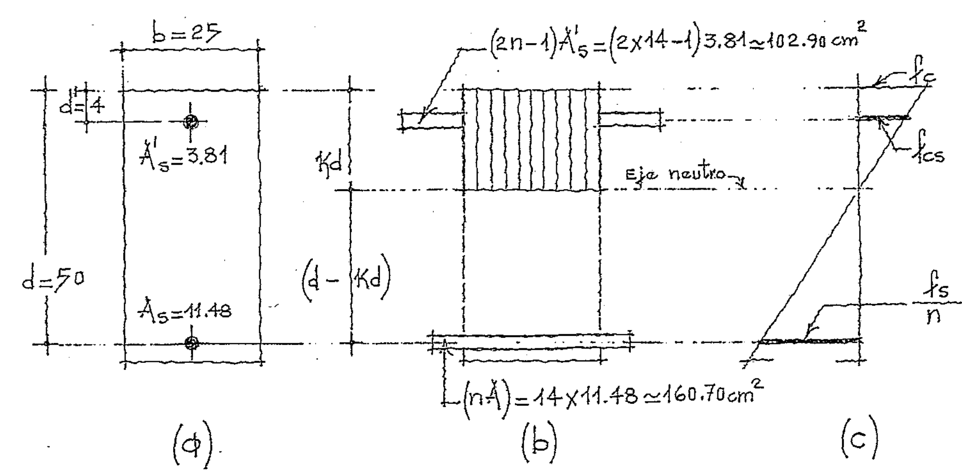


Fig. 4.1. Sección transversal de una viga doblemente armada, (a).
Fig. 4.2. Área transformada de la sección, (b).
Fig. 4.3. Diagrama de fatigas, (c). Análisis semielástico.

Obtención de la profundidad del eje neutro (Kd). Hacemos momentos en el plano neutro:

$$b \cdot Kd \cdot \frac{Kd}{2} + (2n-1)A'_s\,(Kd-d') - nA_s\,(d-Kd) = 0$$

y dando valores, se tiene

$$25\,\frac{Kd^2}{2} + (2\times14-1)\,3.81\,(Kd-4) - 14\times11.48\,(50-Kd) = 0\ , \quad y$$

$$12.5\ Kd^2 + 102.90\,Kd - 411.50 - 8036 + 160.70\,Kd = 0$$

dividiendo la ecuación entre 12.5, obtenemos:

$$Kd^2 + 21\,Kd - 676 = 0$$

$$\therefore\quad Kd = \frac{(-)+21 \pm \sqrt{(21)^2-4(-676)}}{2} = \frac{-21+\sqrt{3145}}{2} = \frac{-21+56}{2} = 17.50\ cm$$

$$Kd = 17.50\ cm$$

En las vigas doblemente armadas cuando la falla ocurre a tensión el acero a tensión cede, pero si la falla es a compresión, el acero en la zona de tensión permanece en estado elástico.

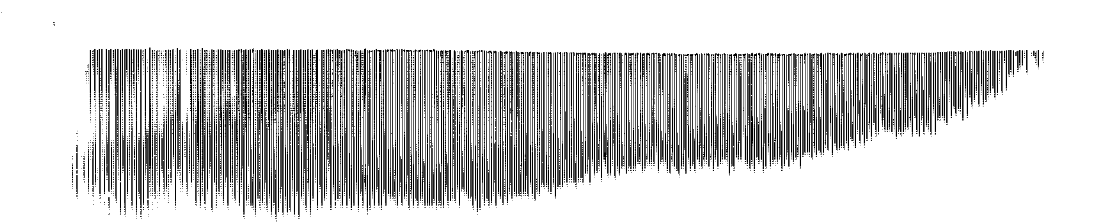
Al igual que en las vigas simplemente armadas, será necesario que el acero a tensión ceda para evitar fallas frágiles en las vigas doblemente armadas.

f_{sc}, fatiga del acero en la zona de compresión.

f_{cs}, fatiga del concreto en el centroide donde se encuentra el acero en compresión.

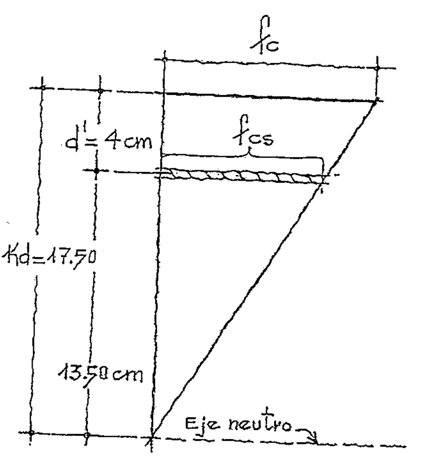
A'_s, área de acero en compresión. El área transformada se apega más al diseño plástico que al elástico.





Obtención de la fatiga de compresión, figura 4.4.

Fig. 4.4. Diagrama de fatigas. Detalle.



Por comparación de tri[illegible] se tiene:

$$\frac{f_c}{17.50} = \frac{f_{cs}}{13.50}$$

$$\therefore f_{cs} = \frac{13.50\, f_c}{17.50} \simeq 0.772\, f_c$$

Posición del centro de compresión:

Fuerzas	Distancias	Momen[illegible]
$C_c = 0.5\, f_c\, b\, Kd = 0.5 f_c \times 25 \times 17.50 \simeq 219\, f_c$	$Kd/3 \simeq 5.84$	$1279\, f_c$
$C_s = (2n-1) A' f_{sc} = 27 \times 3.81 \times 0.772 f_c \simeq 79 f_c$	4.00	$316\, f_c$
$C = 298 f_c$		$M = 1595\, f_c$

$$\therefore z^{*} = \frac{M}{C_T} = \frac{1595\, f_c}{298\, f_c} \simeq 5.35 \text{ cm}$$

y el brazo de palanca vale

$$jd = d - z = 50 - 5.35 = 44.65 \text{ cm}$$ (brazo de pal[illegible] el acero de com[illegible]

El valor de ambas resultantes (Compresión y tensión), será [illegible]

$$C = T = \frac{M}{jd} = \frac{1\,800\,000}{44.65} \simeq 40314 \text{ Kg.}$$

y como $C = 298\, f_c$, se tiene:

$$f_c = \frac{C}{298} = \frac{40314}{298} \simeq 135 \text{ Kg/cm}^2$$

Al inicio del ejemplo se supuso una fatiga para el concre[illegible] $f'_c = 200$ Kg/cm², pero en realidad la fatiga es de:

$$f_c = 0.45\, f'_c$$

$$\therefore f'_c = \frac{f_c}{0.45} = \frac{135}{0.45} = 300 \text{ Kg/cm}^2$$

* Distancia de la cara de compresión (fibra más alejada), al centroide de compresión.

Y para la fatiga del acero en compresión, la obtenemos haciendo referencia a las figuras 4.5 a 4.7.

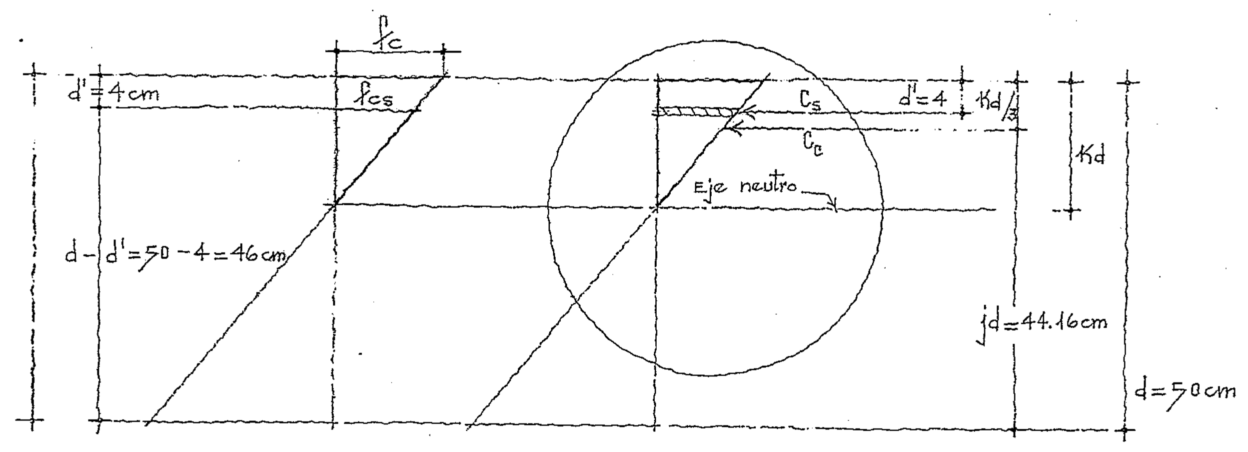


Fig. 4.5. Diagrama de fatigas.

Fig. 4.6. Prisma triangular (zona de compresión)

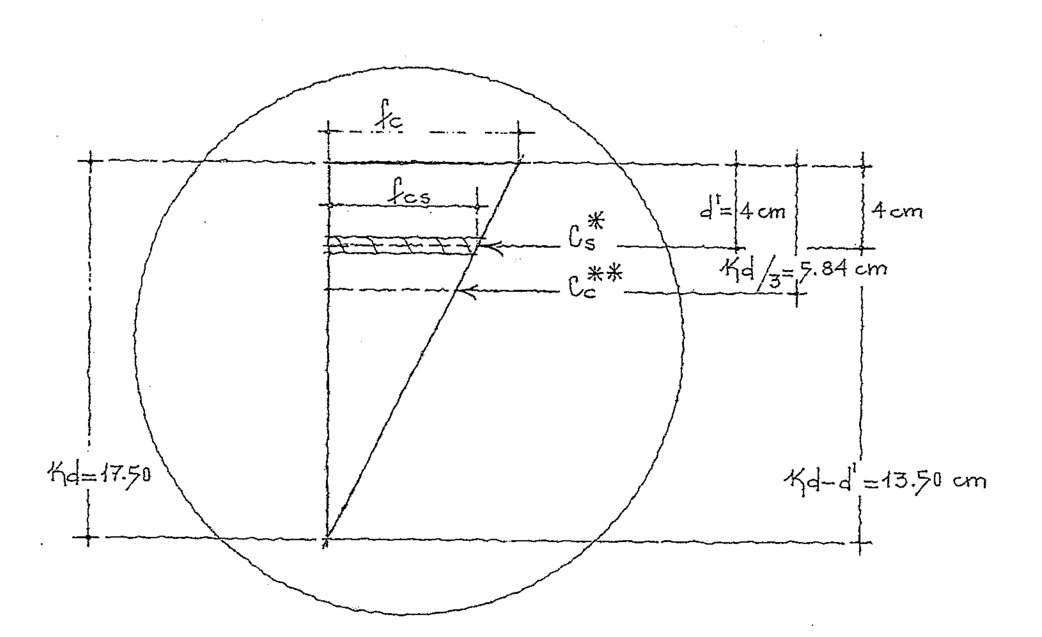


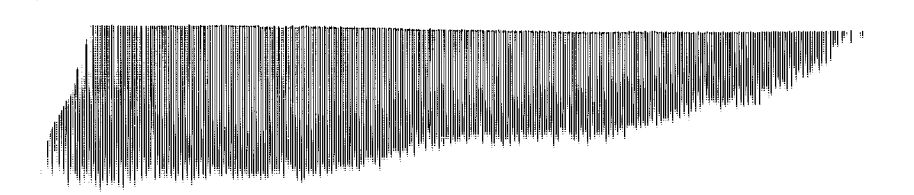
Fig. 4.7. Prisma triangular (detalle). Zona de compresión.

$$f_{sc} = 2n f_{cs} = 2 \times 14 \times 0.772 \times 135 \simeq 2918\ Kg/cm^2$$

y

$$f_s = 0.5 f_Y = 0.5 \times 4200 = 2100\ Kg/cm^2 < f_{sc}$$

El valor de (f_{sc}) resultó excesivo, sin embargo, esto no significa que se tenga que reducir "f_c", únicamente nos indica que el acero, en la zona de compresión, solamente contribuirá con 2100 Kg/cm². Lo anterior, modifica la suposición inicial (*método semielástico*), de que ($f_{sc} = 2nf_{cs}$) y que el área trans-



formado es igual a $(2n-1)A'_s$.

Para solucionar el problema, será necesario comenzar suponiendo para "f_{sc}" un valor de 2100 Kg/cm^2 en lugar de $2nf_{cs}$.

La fatiga del acero en tensión, será de:

$$T = A_s f_s \quad \therefore \quad f_s = \frac{T}{A_s} = \frac{40\,314}{11.48} \simeq 3512 > 2100$$

Para que la viga pueda soportar el momento supuesto en el ejemplo (18 000 Kgm), será necesario recurrir a varias soluciones, veamos:

a) Aumentar ambas fatigas, concreto y acero.

b) Si el proyecto lo permite, aumentar la sección de la viga.

c) Aumentar el refuerzo de acero en la zona de tensión, de la de compresión o bien en ambas zonas.

d) Disminuir el momento.

Como las soluciones (a, b y c) han quedado ya expuestas, se verá a continuación la solución (d), que es igualmente sencilla

$$C_c = 219\, f_c = 219 \times 135 = 29565\ Kg \quad \therefore \quad M_c = C_c\, j\, d^{*}$$

$$\therefore M_c = 29565 \times 44.16 \simeq 1305\,600\ Kg\,cm$$

$$f_{cs} = 0.772\, f_c = 0.772 \times 135 \simeq 104\ Kg/cm^2$$

y el esfuerzo efectivo valdrá:

$$f_{sc} = f_s - f_{sc} = 2100 - 104 = 1996\ Kg/cm^2$$

$$C_s = A'_s f_{sc} = 3.81 \times 1996\,Kg/cm^2 \simeq 7605\ Kg$$

$$\therefore \quad M_{sc} = C_s (d - d') = 7605 \times 46 \simeq 350\,000\ Kg\,cm$$

$$\therefore M_T = M_c + M_{sc} = 13056 + 3500 = 16556\ Kgm < 18\,000\ Kgm$$

Si se quiere conservar la escuadría de la viga (25 x 50) y las fatigas permisibles dadas para el ejemplo ($f'_c = 200\ Kg/cm^2$ y $f_s = 2100\ Kg/cm^2$) será necesario bajar el momento a:

$$M_T = 16556\ Kgm.$$

---

* Brazo de palanca entre el centroide del prisma triangular (zona de compresión), y el acero de tensión.

Ejemplo ilustrativo (*Teoría Elástica*).

Calcular el momento resistente en una viga doblemente armada.

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$

$f_s = 2100\ Kg/cm^2$

$n = 14$ (ver tablas)

$b = 30\ cm$

$d = 60\ cm$

$d' = 6\ cm$

$A_s = 5\phi_s\#5 = 5\times1.99 = 9.95\ cm^2$

$A'_s = 3\phi_s\#5 = 3\times1.99 = 5.97\ cm^2$

En las figuras 4.8 a 4.10 se muestra la viga doblemente armada

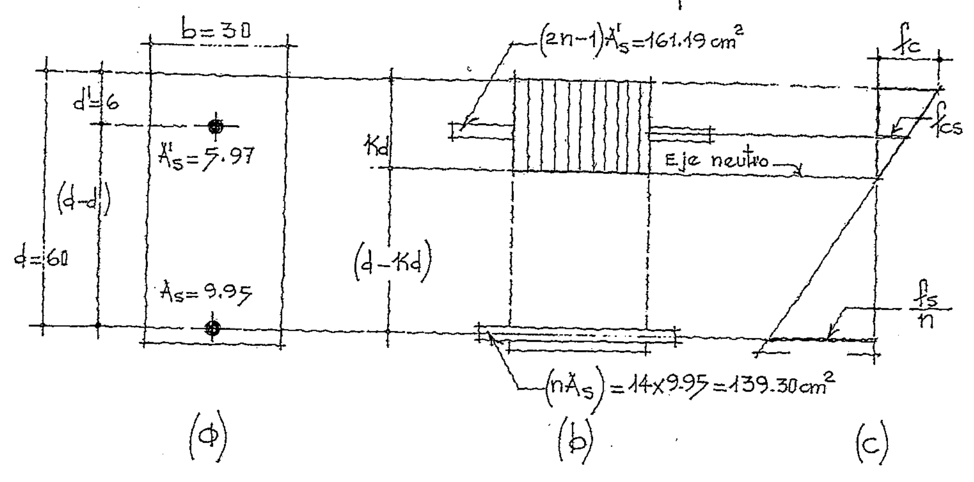


Fig. 4.8. Sección transversal de una viga doblemente armada, (a).
Fig. 4.9. Área transformada de la sección (b).
Fig. 4.10. Diagrama de fatigas, (c). Análisis semielástico.

Haciendo momentos en el eje neutro, se obtiene:

$$Kd = 16.87\ cm$$

f_c
d'=6
f_{cs}
Kd=16.87cm
Kd−d'=10.87
Plano neutro

Fig. 4.11. Prisma triangular (detalle). Zona de compresión.

La fatiga de compresión la obtenemos haciendo referencia a la fig. 4.11

Por comparación de triángulos:

$$\frac{f_c}{16.87} = \frac{f_{cs}}{10.87}$$

$$\therefore\ f_{cs} = \frac{10.87\,f_c}{16.87} \simeq 0.645\,f_c$$

---

* C_s, resultante de fuerza del acero en compresión.

** C_c, resultante de fuerza del volumen del prisma triangular de concreto.

y la fatiga del acero en compresión valdrá:

$$f_{sc} = 2n f_{cs} = 2 \times 14 \times 0.645 \times 90 \simeq 1626\ Kg/cm^2 < f_s$$

como resultó menor que f_s, se tomará este valor. En caso de que resultado mayor que f_s, recuérdese que f_{sc} nunca se trabajará a mayor que f_s.

Posición del centro de compresión:

Fuerzas	Distancias	Mome
$C_c = 0.5 f_c\, bKd = 0.5 f_c \times 30 \times 16.87 \simeq 253 f_c$	5.62	1423
$C_s = (2n-1) A'_s f_{cs} = 27 \times 5.97 \times 0.645 f \simeq 104 f_c$	6.00	624
$C = 357 f_c$		$M = 2047$

$$\therefore z = \frac{M}{C} = \frac{2047 f_c}{357 f_c} \simeq 5.74\ cm$$

y el brazo de palanca valdrá:

$$jd = d - z = 60 - 5.74 = 54.26\ cm$$

Cálculo del Momento Resistente*

Concreto:

$$M_{rc} = Cjd = 357 \times 90 \times 54.26 \simeq 1743400\ Kgcm$$

Acero:

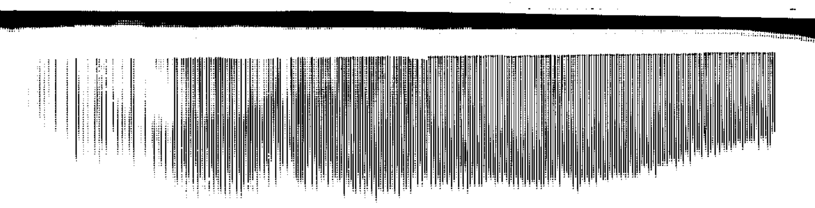
$$M_{rs} = Tjd = 9.95 \times 2100 \times 54.26 \simeq 1133800\ Kgcm$$

Se aceptará el momento de:

$$M_{rs} = 1133800\ Kgcm$$

En el ejemplo se colocó el acero en compresión a una de 6 cm de la fibra más alejada en compresión (solución no recomen pues cuanto más nos acerquemos al eje neutro, el acero bajará tencia notablemente.

* Momento resistente de una sección, es el momento capaz de desarrollar esa sección sin que los materiales se exceda de su fatiga máxima de trabajo. Se tomará siempre el menor momentos. En una viga de sección balanceada, ambos momentos serán iguales.




4.2. Diseño de vigas doblemente armadas.- Para que se produzca la viga doblemente armada, será condición indispensable que la sección de la viga se encuentre determinada, para que el momento natural de la sección, resulte menor que el momento flexionante al que se somete la viga.

A continuación se presenta un ejemplo para mayor claridad en la exposición.

Ejemplo ilustrativo (*Teoría Elástica*).

Para una sección determinada, calcular las áreas de acero en tensión y compresión de una viga doblemente reforzada.

La viga se encuentra sometida a un momento de 19200 Kgm.

Datos:

$d = 58$ cm ; $f'_c = 200$ Kg/cm^2 ; $n = 14$ (ver tabla)*

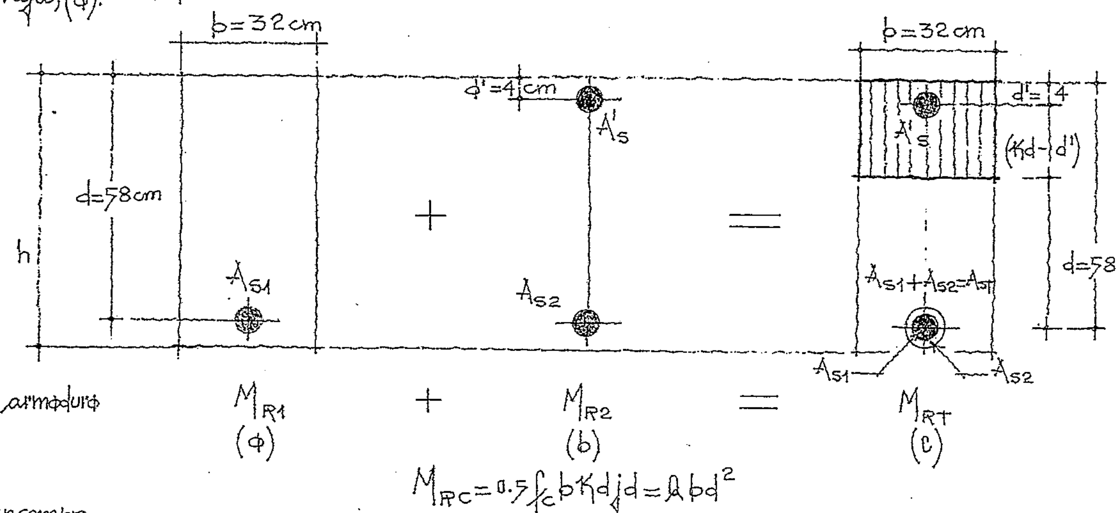
$b = 32$ cm ; $f_y = 4200$ Kg/cm^2 ; $R = 15$ (ver tabla)*

Primeramente se calcula el momento resistente natural de la sección para determinar si la viga es simple o doblemente armada, figuras 4.12 a 4.14.

Fig. 4.12. Sección transversal de una viga, (a).

Fig. 4.13. Doble armadura en la viga, (b).

Fig. 4.14. Acero en compresión, en tensión y acero complementario en tensión.



$$M_{RC} = 0.5 f_c b K d j d = R b d^2$$

$\therefore M_{RC} = 15 \times 32 (58)^2 \simeq 1\,615\,000$ Kgcm $< 1\,920\,000$ Kgcm

por tanto, la viga requiere de doble armadura.

*Al final del libro se presenta una tabla donde aparecen los valores de todas las constantes.

En momento restante será igual a:

$$M_{restante} = M_{RT} - M_{RC} = 1920000 - 1615000 = 305000 \text{ Kg cm}$$

La viga como sección natural (balanceada) necesita una á- acero de:

$$A_{s1} = \frac{M_{R1}}{f_s\, j\, d} = \frac{1615000}{2100 \times 0.87 \times 58} = \frac{1615000}{105966} = 15.24 \text{ cm}^2$$

Fig. 4.15. Diagrama de fatigas. Detalle.

f_c; $d' = 4$ cm; f_{cs}; $Kd_1 = 22$ cm; $Kd - d' = 18$ cm; Eje neutro

Profundidad del eje neutro:

$$Kd = 0.38 \times 58 \simeq 22 \text{ cm}$$

Obtención del valor de f_{cs}

$$\frac{f_c}{f_{cs}} = \frac{22}{18} \therefore f_{cs} = \frac{18 \times 90}{22} \simeq$$

y, $f_{sc} = 2n f_{cs} = 2 \times 14 \times 73.60 \simeq 206$

Como resultó menor que f_s, to- el valor de f_{sc}.

$$A'_s = \frac{M_{restante}}{f_{sc}(d-d')} = \frac{305000}{2061(58-4)} = \frac{305000}{2061(54)} = 2.74 \text{ cm}^2$$

Y el área de acero complementaria en tensión valdrá:

$$A_{s2} = \frac{M_{R2}}{f_s(d-d')} = \frac{305000}{2100(54)} = \frac{305000}{113400} \simeq 2.70 \text{ cm}^2$$

Areas de acero finales:

Tensión: $A_{sT} = A_{s1} + A_{s2} = 15.24 + 2.70 = 17.94 \text{ cm}^2; \frac{17.94}{5.07} \simeq 4\phi_s =$

Compresión: $A'_s = 2.74 \text{ cm}^2; \frac{2.74}{1.99} \simeq 2\phi_s \#5$

En las figuras 4.16 y 4.17., se muestran los armados en la v-

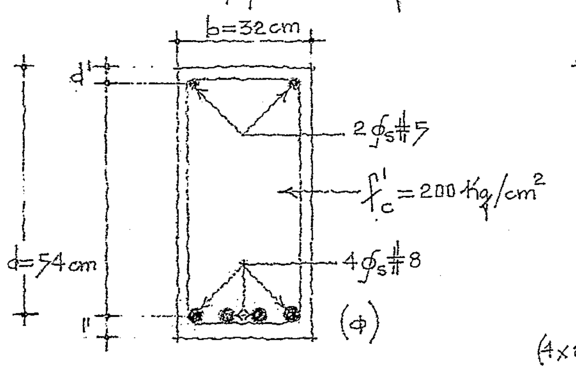


Fig. 4.16. Armados en la viga, (a). Corte.

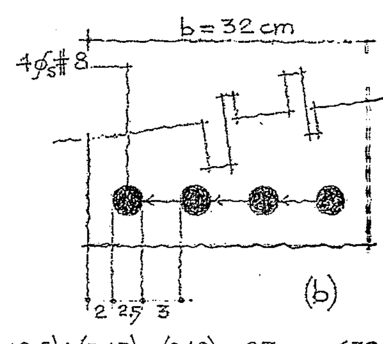


Fig. 4.17. Separación de las varillas.

$(4 \times 2.5) + (3 \times 3) + (2 \times 2) = 23 \text{ cm} < 32$

4.3. Vigas doblemente reforzadas.- Según la teoría plástica en las vigas doblemente armadas se supone que todo el acero (a tensión o a compresión), alcanzan su límite de fluencia; en caso de no ser así, se modifican posteriormente los cálculos.

Cuando todo el acero se encuentra en cedencia, se tiene:

$$f_s = f_{sc} = f_Y$$

Haciendo referencia a las figuras 4.18 a 4.23, obtenemos:

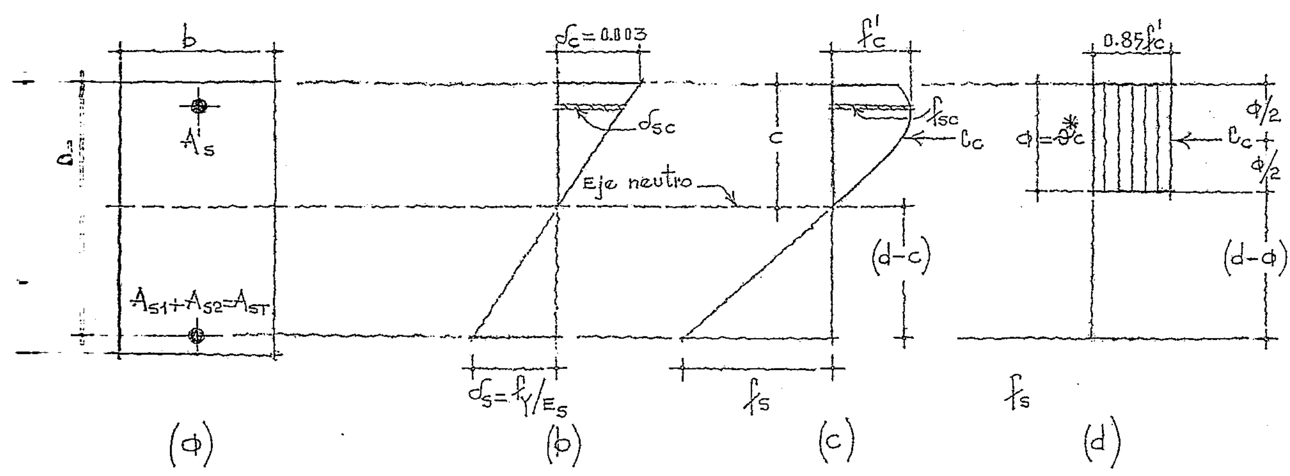
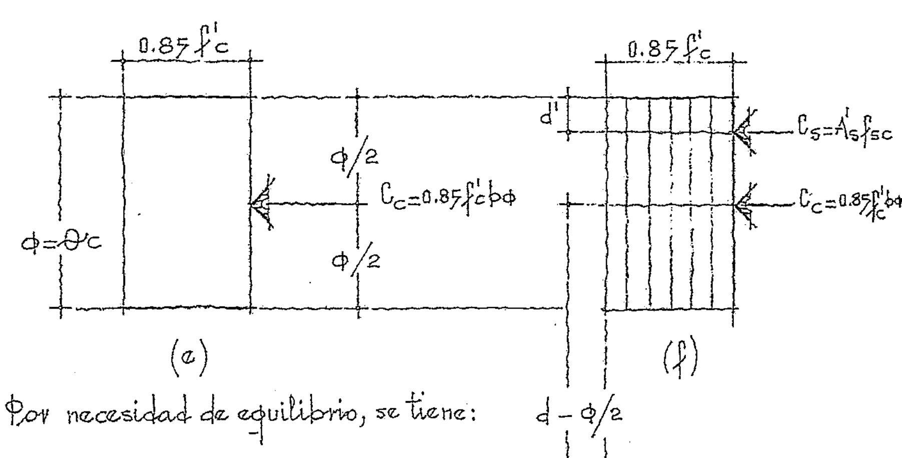


Fig. 4.18. Sección transversal de la viga, (a).
Fig. 4.19. Deformación de la viga, (b).
Fig. 4.20. Esfuerzos reales en la viga rectangular, (c).
Fig. 4.21. Rectángulo de esfuerzos, (d). Equivalentes.
Fig. 4.22. Retángulo de esfuerzos equivalentes, (e).
Fig. 4.23. Fuerzas internas en viga doblemente reforzada, (f).



Por necesidad de equilibrio, se tiene:

$$C = T$$

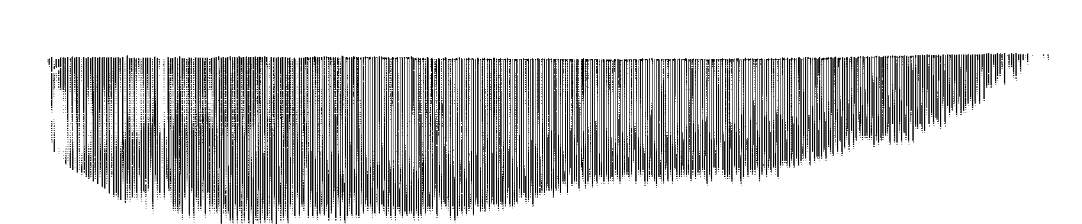
$$\therefore\ C_c + C_s = C_T \quad \text{y} \quad T = A_s f_Y$$

$$\therefore\ 0.85 f'_c b a + A'_s f_Y = A_s f_Y \ ,$$

$$\text{y}\ \ 0.85 f'_c b a = A_s f_Y - A'_s f_Y \quad \quad \ldots (4.3)$$

$$\text{y,}\quad a = \frac{(A_s - A'_s) f_Y}{0.85 f'_c b}$$

* Recuérdese que el reglamento da un valor de, $\vartheta = 0.80$.



Además, hemos visto que,

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \therefore A_s = \rho bd, \text{ y también } \rho' = \frac{A'_s}{bd} \therefore A'_s = \rho' bd$$

En consecuencia, el valor de "a" en función del porcentaje

será:
$$a = \frac{(\rho bd - \rho' bd) f_Y}{0.85 f'_c b} = \frac{\rho bd f_Y - \rho' bd f_Y}{0.85 f'_c b} = \frac{(\rho - \rho') f_Y d}{0.85 f'_c}$$

Cuando la deformación excede de $\frac{f_Y}{E_s}$, el acero se encontra fuerzo de cedencia.

Por comparación de triángulos en el diagrama de deforma unitarias de la figura 4.24, se tiene:

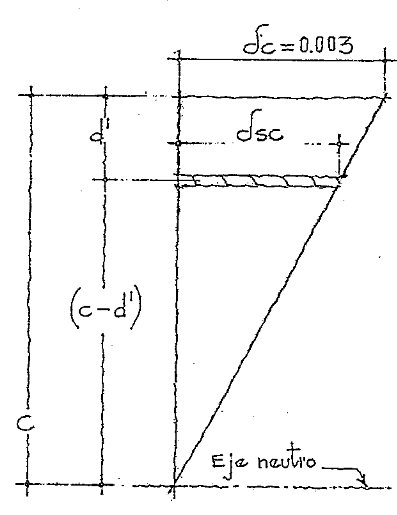


Fig. 4.24. Diagrama de deformaciones.

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_{sc}}{c-d'}, \quad y$$

$$\delta_{sc} = \delta_c \frac{c-d'}{c} \geq \frac{f_Y}{E_s}, \text{ cuando esta}$$

$f_{sc} = f_Y$ (el acero en compresión alcanza su lí fluencia)*

y también

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_s}{d-c}, \quad y \quad \delta_s = \delta_c \frac{d-c}{c}, \text{ ento}$$

$f_s = f_Y$ (el acero en tensión alcanza su lí fluencia).

Cuando ambos aceros no alcanzan su límite de fluencia, se tend

$$f_{sc} < f_Y \quad y \quad f_s < f_Y$$

$$\therefore 0.85 f'_c ba + A'_s f_{sc} = A_s f_s \quad . \quad . \quad (4.4)$$

$$\therefore \quad a = \frac{A_s f_s - A'_s f_{sc}}{0.85 f'_c b}$$

Para el valor de "a" en función del porcentaje de acero cuando no se al la fluencia, se tiene:

$$a = \frac{\rho bd f_s - \rho' bd f_{sc}}{0.85 f'_c b} = \frac{\rho d f_s - \rho' d f_{sc}}{0.85 f'_c}$$

---

* El autor recomienda trabajar $f_{sc} = f_s$, tomando en cuenta que el acero difícilmente en zona de compresión, llegará a igualar el valor de f_Y.

Supóngase ahora que el acero en tensión se encuentra en cedencia, pero el acero en compresión no fluye, veamos:

$$f_s = f_Y, \quad \text{pero} \quad f_{sc} < f_Y$$

$$0.85 f'_c b a + A'_s f_{sc} = A_s f_Y \quad \therefore \quad a = \frac{A_s f_Y - A'_s f_{sc}}{0.85 f'_c b}$$

y "a" en función del porcentaje de acero, vale:

$$a = \frac{\rho b d f_Y - \rho' b d f_{sc}}{0.85 f'_c b} = \frac{\rho d f_Y - \rho' d f_{sc}}{0.85 f'_c} = \frac{(\rho f_Y - \rho' f_{sc}) d}{0.85 f'_c}$$

Si todo el acero alcanza su esfuerzo de cedencia, se analizará primero la viga como simplemente reforzada, aplicando para la obtención de sus momentos, las ecuaciones siguientes:

$$M_{RC} = 0.85 f'_c b a \left(d - \frac{a}{2}\right) \text{ . . . concreto únicamente como viga simplemente armada.}$$

$$M_{RS} = A_{s1} f_Y \left(d - \frac{a}{2}\right) \text{ . . . acero en tensión como viga simplemente armada.}$$

Cuando el momento máximo en la viga, es mayor que el momento resistente, se necesitará colocar acero en la zona de compresión y también, acero complementario en tensión para equilibrar la viga, la que será capaz de absorber la diferencia entre ambos momentos (*momento restante*), veamos:

$$M_{restante} = A'_s f_Y (d - d') \text{ . . . acero en compresión.}$$

$$M_{restante} = A_s f_Y (d - d') \text{ . . . acero complementario en tensión.}$$

Haciendo referencia a las ecuaciones anteriores y aplicando el factor de reducción (F_R), obtenemos el momento resistente total de diseño de una viga doblemente reforzada, bajo la consideración de que todo el acero se encuentra cediendo

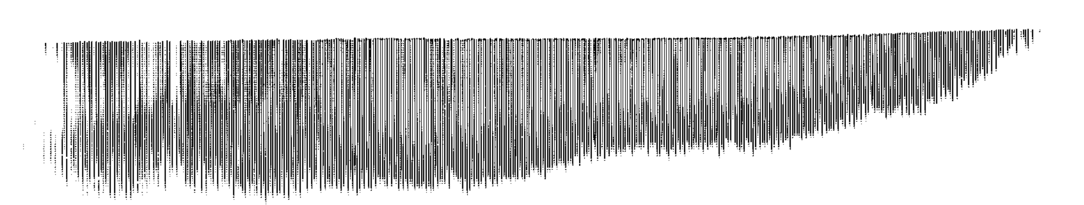
$$M_{RT} = F_R \left[(A_s - A'_s) f_Y \left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_Y (d - d') \right]$$

Para que el acero en compresión fluya, será necesario que $\delta_{sc} \geq \frac{f_Y}{E_s}$, por tanto:

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_{sc}}{c - d'} \quad \therefore \quad \frac{\delta_c}{c} = \frac{\frac{f_Y}{E_s}}{c - d'}, \quad y \quad \delta_c (c - d') = c \frac{f_Y}{E_s}$$

$$\delta_c (c - d') E_s = c f_Y$$

El Reglamento de Construcciones para el D.F., da para "δ_c" un valor de 0.003 y para $E_s = 2 \times 10^6$ Kg/cm².



Dando valores a la ecuación, obtenemos:

$$0.003 \times 2\,000\,000\,(c - d') = c f_Y, \quad y$$

$$6000\,(c - d') = c f_Y$$

$$\therefore \; 6000\,(c) - 6000\,(d') = c f_Y$$

$$\therefore \quad 6000\,(c) - c f_Y = 6000\,(d') \quad y \quad c\,(6000 - f_Y) = 6000\,(d'$$

despejando a "c", tendremos:

$$c = \frac{6000\, d'}{6000 - f_Y} \quad \ldots\ldots$$

De la ecuación de equilibrio, deducimos:

$$0.85 f'_c\, b\phi + A'_s f_Y = A_s f_Y, \quad y$$

$$0.85 f'_c\, b\phi = A_s f_Y - A'_s f_Y \quad \ldots\ldots (4.3)$$

$$0.85 f'_c\, b\phi = (A_s - A'_s) f_Y \quad \ldots\ldots (4.5)$$

y también

$$A_s = \rho b d \quad y \quad A'_s = \rho' b d$$

se sabe que

$$\phi = \theta c$$

Substituyendo el valor de "ϕ", se tiene:

$$0.85 f'_c\, b\theta c = (\rho b d - \rho' b d) f_Y, \quad y$$

$$0.85 f'_c\, b\theta c = \rho b d f_Y - \rho' b d f_Y, \text{ donde}$$

$$\theta c = \frac{\rho b d f_Y - \rho' b d f_Y}{0.85 f'_c\, b} = \frac{(\rho - \rho')\, d f_Y}{0.85 f'_c}, \text{ por tanto}$$

$$0.85 f'_c\, \theta c = (\rho - \rho')\, d f_Y$$

$$(\rho - \rho') \geq \frac{0.85 f'_c\, \theta c}{d f_Y}$$

Dando a "c" su valor, se tiene

$$(\rho - \rho') \geq 0.85\theta \frac{f'_c\, d'}{f_Y\, d} \cdot \frac{6000}{6000 - f_Y}$$

o también, representándola como lo indica el Reglamento de Const para el D.F.

$$(\rho - \rho') \geq \frac{4800}{6000 - f_Y} \cdot \frac{d'}{d} \cdot \frac{f''_c}{f_Y}$$

Ambas ecuaciones presentan resultados diferentes, pero poco significativos.

Ahora bien, cuando (f_{sc}) es menor que (f_Y), es decir, que el acero en compresión no alcanza el estado de cedencia, se tomará el esfuerzo real (f_{sc}) en lugar de (f_Y), veamos:

$$M_{UR} = F_R\left[(A_s - A'_s)\, f_Y\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s\, f_{sc}\,(d - d')\right]$$

Para falla balanceada (cuando ambos materiales alcanzan simultáneamente su máximo esfuerzo, es decir, el acero a tensión alcanza la cedencia y el concreto una deformación en su fibra extrema de 0.003), se deduce de la ecuación de equilibrio

$$0.85 f'_c\, b a + A'_s f_{sc} = A_s f_Y$$

Substituyendo, obtenemos:

$$0.85 f'_c\, b \theta c + \rho' b d f_{sc} = \rho b d f_Y$$

$$0.85 f'_c\, b \theta c = (\rho f_Y - \rho' f_{sc})\, b d$$

$$\therefore (\rho f_Y - \rho' f_{sc}) = \frac{0.85 f'_c \theta c b}{b d}$$

$$(\rho f_Y - \rho' f_{sc}) = \frac{0.85 \theta c f'_c}{d}$$

y

$$(\rho f_Y - \rho' f_{sc})\, d = 0.85 f'_c \theta c$$

asignándole a "c" su valor, se tiene:

$$\rho f_Y d - \rho' f_{sc} d = 0.85 f'_c \theta \frac{6000\, d}{6000 + f_Y}, \quad y$$

$$\rho f_Y d = 0.85 f'_c \theta \frac{6000\, d}{6000 + f_Y} + \rho' f_{sc} d$$

Dividiendo todos los términos de la ecuación por $(f_Y d)$, se obtiene:

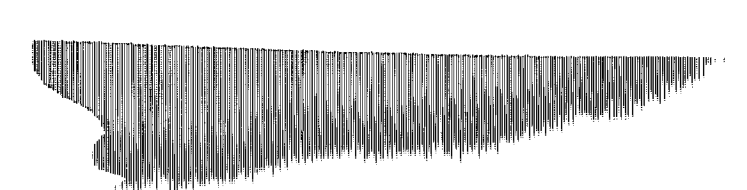
$$\rho_b^* = \frac{0.85 f'_c \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} + \frac{\rho' f_{sc}}{f_Y}$$

. . . la ecuación demuestra que el acero en compresión no alcanza el esfuerzo de cedencia, es decir, $f_{sc} < f_Y$

Cuando el acero en la zona de compresión alcanza el esfuerzo de ce-

---

* porcentaje de acero para falla balanceada.



dencia, la ecuación queda con la expresión

$$f_{sc} = f_Y$$

por tanto

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} + \rho'$$

Para diseñar y tener la seguridad de que en caso de ... dúctil (evitar la falla frágil), se aconseja que la cantidad de ac... en una viga con doble armadura no exceda del 75% de ρ... con lo anterior, se tendrá para ambas ecuaciones:

Cuando $f_{sc} < f_Y \cdots \rho_b \leq 0.75 \frac{0.85 f'_c \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} + \rho'$...

Cuando $f_{sc} = f_Y \cdots \rho_b \leq 0.75 \frac{0.75 f'_c \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} + \rho'$

A continuación, se presentan ejemplos ilustrativos ... doblemente armadas (Diseño plástico).

Ejemplo ilustrativo.

Calcular el momento resistente en una viga de sección ... área de acero dada. Dígase si el acero en tensión y en compresi... tran en esfuerzo de cedencia.

Fig. 4.25. Corte transversal de la viga, (a)

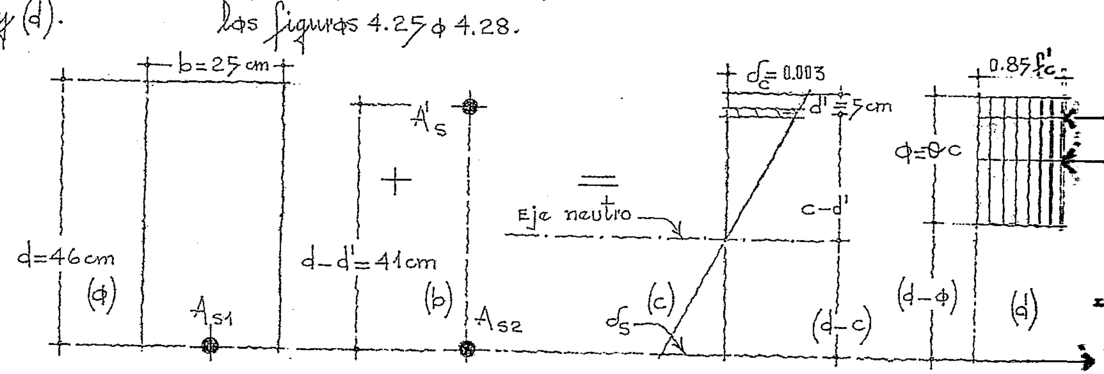
Figs. 4.26; 4.27 y 4.28. Deformaciones y esfuerzos en una viga doblemente armada, (b), (c) y (d).

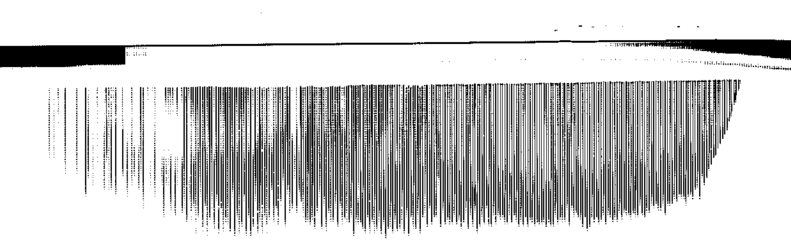
Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm² ; $f_Y = 4200$ Kg/cm² ; $n = 14$; $d = $...

$b = 25$ cm ; $d' = 5$ cm ; $A_s = 7\phi_s \# 6$; $A'_s = 3\phi_s \# 4$; ...

Ya se mencionó, que el acero en ambas zonas (tensión ... el acero puede o no alcanzar su esfuerzo de fluencia. Para el ... supone primeramente que todo el acero se encuentra cediendo, ... las figuras 4.25 a 4.28.







Obtenemos el valor de ϕ:

$$\phi = \frac{(A_s - A'_s)\, f_Y}{0.85\, f'_c\, b} = \frac{(20.09 - 3.81)4200}{0.85 \times 200 \times 25} = \frac{68376}{4250} \simeq 16.10 \text{ cm}$$

$$A_{sT} = 7 \times 2.87 = 20.09 \text{ cm}^2 \quad ; \quad A'_s = 3 \times 1.27 = 3.81 \text{ cm}^2$$

y, $\phi = \theta c \quad \therefore c = \frac{\phi}{\theta} = \frac{16.10}{0.80} \simeq 20.13$ cm

A continuación, vamos a comprobar si el acero alcanza el esfuerzo de cedencia como se supuso. Por comparación de triángulos en la fig. 4.29, se tiene:

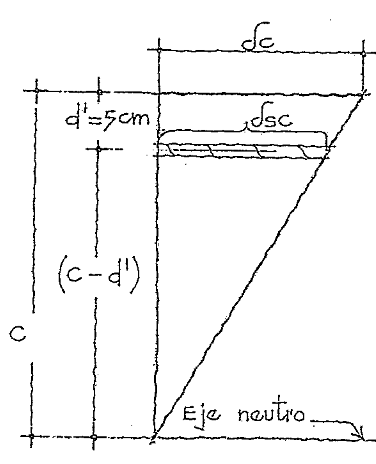


Fig. 4.29. Prisma triangular mostrando la zona de compresión.

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_{sc}}{c - d'}$$

$$\therefore \delta_{sc} = \delta_c \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{20.13 - 5}{20.13} \simeq 0.0023$$

El acero en compresión se encontrará cediendo cuando, $\delta_{sc} \geq \frac{f_Y}{E_s}$

$$0.0023 \geq \frac{4200}{2000000} = 0.0021$$

(el acero en compresión se encuentra cediendo).

De igual manera comprobamos el acero en tensión, veamos la fig. 4.30.

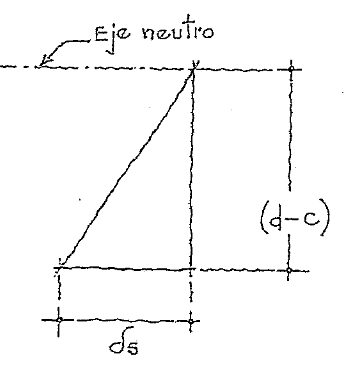


Fig. 4.30. Prisma triangular mostrando la zona de tensión.

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_s}{d - c}$$

$$\therefore \delta_s = \delta_c \frac{d - c}{c} = 0.003 \frac{46 - 20.13}{20.13}$$

$\therefore 0.0039$, donde

$$0.0039 \geq 0.0021$$

(el acero en tensión también fluye).

En efecto, ambos aceros alcanzan el esfuerzo de cedencia como se supuso.

Cálculo del momento resistente de diseño

$$M_{UR} = F_R \left[(A_s - A'_s) f_Y \left(d - \frac{\phi}{2}\right) + A'_s f_Y (d - d') \right]$$

$$= 0.90 (20.09 - 3.81)\, 4200 \left(46 - \frac{16.10}{2}\right) + 3.81 \times 4200 (46 - 5) = 0.90 (3251000)$$

$$M_{UR} \simeq 2\,926\,000 \text{ Kg cm}$$

A continuación coprobamos el resultado obteni[do con] otras ecuaciones, véanse las figs. 4.31 y 4.32.

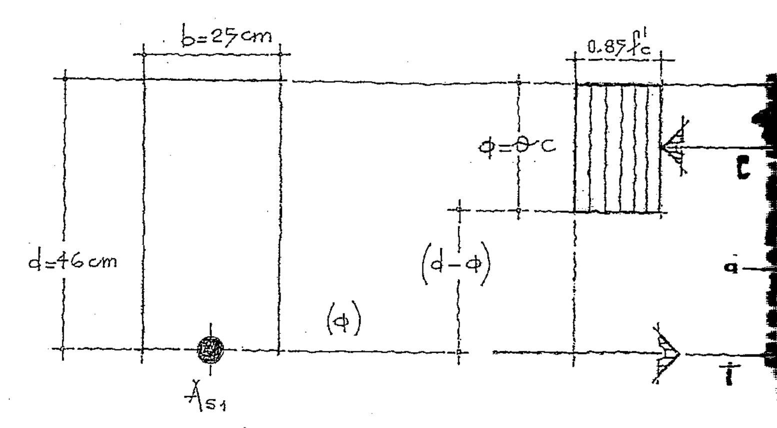


Fig. 4.31. Corte transversal de la viga, (a).
Fig. 4.32. Rectángulo de esfuerzos, (b).

Primero se calcula la viga como simplemente armada

$$M_{UR} = F_R\left[0.85\, f'_c\, b a \left(d - \frac{a}{2}\right)\right] = 0.90\left(0.85 \times 200 \times 25 \times 16.\ldots\right.$$

$$M_{UR} \simeq 2337100 \text{ Kg cm}$$

Para equilibrar la viga (concreto), se necesita una cantida[d de acero] en tensión como viga simplemente armada, de:

$$M_{UR} = F_R\left[A_{S1}\, f_Y \left(d - \frac{a}{2}\right)\right] \therefore A_{S1} = \frac{M_{UR}}{F_R f_Y \left(d - \frac{a}{2}\right)} = \frac{233\ldots}{0.9\ldots}$$

$$A_{S1} \simeq 16.29 \text{ cm}^2$$

Calculamos ahora el área de acero en compresión y [el] complementario en tensión; figuras 4.33 y 4.34.

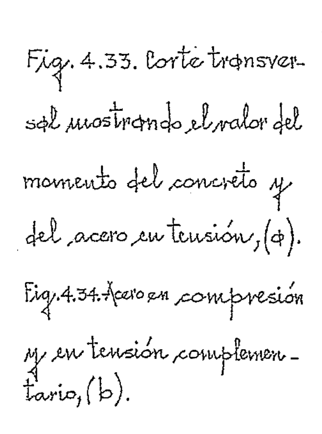
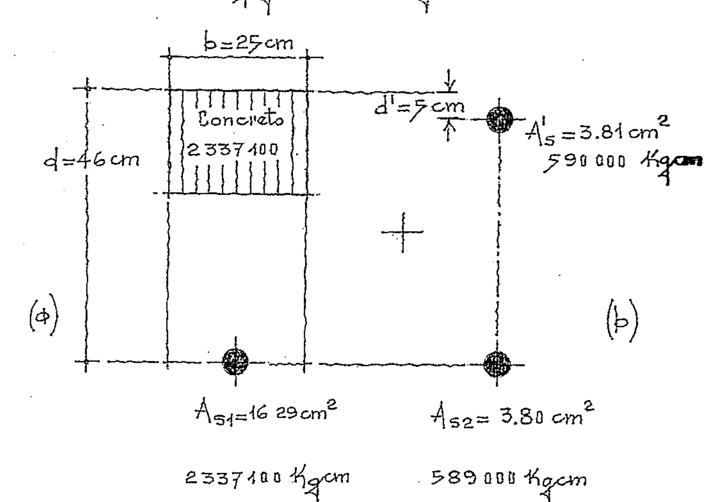


Fig. 4.33. Corte transversal mostrando el valor del momento del concreto y del acero en tensión, (a).
Fig. 4.34. Acero en compresión y en tensión complementario, (b).



Momento que proporciona el acero en compresión

$$M_{UR} = F_R\left[A'_s f_Y (d-d')\right] = 0.90\left[3.81 \times 4200 (46-5)\right]$$

$$\therefore M_{UR} \simeq 590\,000 \text{ Kgcm}$$

Momento proporcionado por el acero complementario en tensión

$$A_{sT} = A_{s1} + A_{s2} \quad \therefore A_{s2} = A_{sT} - A_{s1} = 20.09 - 16.29 = 3.80 \text{ cm}^2$$

$$\therefore M_{UR} = F_R\left[A_{s2} f_Y (d-d')\right] = 0.90\left[3.80 \times 4200 (46-5)\right] \simeq 589\,000 \text{ Kgcm}$$

Veamos las figuras 4.35 a 4.37.

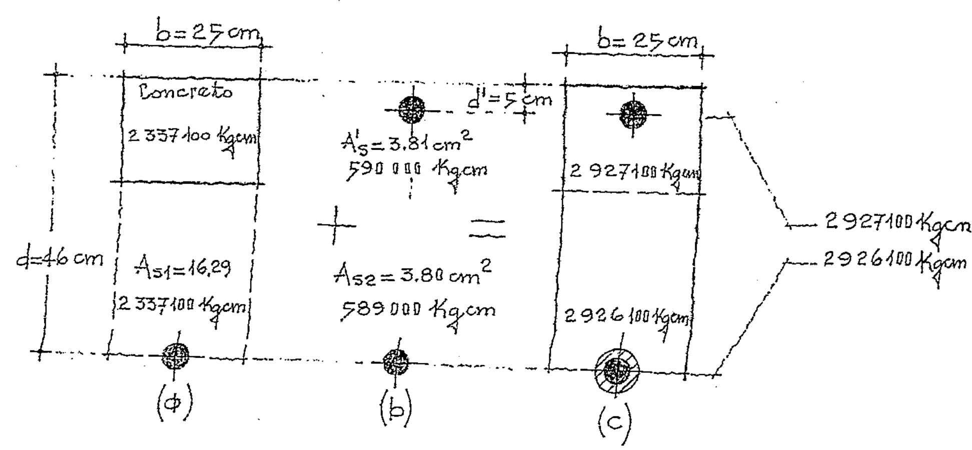


Fig. 4.35. La viga mostrando el momento que resiste el concreto y lo que resiste el acero en tensión, (a).

Fig. 4.36. Areas de acero en compresión y en tensión complementaria (b).

Fig. 4.37. La viga mostrando la capacidad de resistencia de ambos momentos iguales, (c).

Varillas en tensión

$$\frac{20.09}{2.87} = 7 \phi_s \# 6$$

Varillas en compresión

$$\frac{3.81}{1.27} = 3 \phi_s \# 4$$

Queda comprobado, que los momentos obtenidos aplicando ecuaciones diferentes, son prácticamente iguales.

Faltará por comprobar la colocación de las varillas para ver si entran en un lecho, en caso contrario, será necesario calcular el valor de la fatiga del acero en ese lecho y hacer la corrección. En efecto, cuando el acero lo acercamos al eje neutro su resistencia disminuye considerablemente.

Este es un fenómeno al que generalmente no se le da importancia.

Seguramente se podrán obtener resultados idénticos, cuando se tenga mayor exactitud en las operaciones, sin embargo, en las estructuras, la exactitud matemática no es práctica.

Ejemplo ilustrativo

En una viga de sección retangular doblemente armada, ... mento resistente. Dígase si ambos aceros (tensión y compresió... tran en esfuerzo de cedencia.

Datos:

$d = 60$ cm ; $f'_c = 200$ Kg/cm² ; $A_s = 6\phi_s\#5 = 6\times1.99 =$

$b = 26$ cm ; $f_Y = 4200$ Kg/cm² ; $A'_s = 3\phi_s\#5 = 3\times1.99 =$

$d' = 4$ cm ; $n = 14$

Como ya hemos visto, se supone primeramente que todo el ... cuentra cediendo, figuras 4.38 a 4.41.

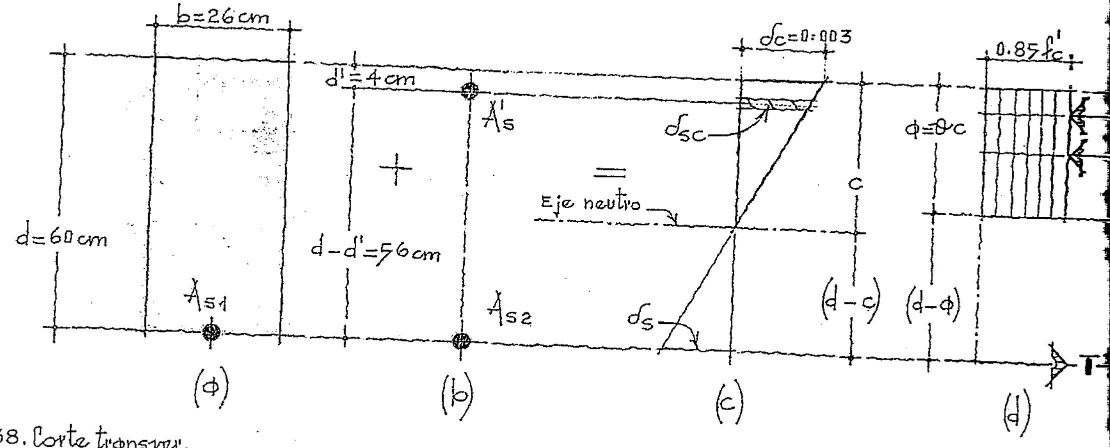


Fig. 4.38. Corte transversal de la viga, (a).
Fig. 4.39. Areas de acero en compresión y en tensión complementaria, (b).
Fig. 4.40. Deformaciones en la viga, (c).
Fig. 4.41. Esfuerzos equivalentes en una viga doblemente armada, (d).

Al igual que en el ejemplo anterior, obtenemos primero el ... veamos:

$$a = \frac{(A_s - A'_s)\,f_Y}{0.85\,f'_c\,b} = \frac{(11.94 - 5.97)\,4200}{0.85\times200\times26} = \frac{25074}{4420} \simeq 5.68 \text{ cm}$$

y,

$$a = \theta c \quad \therefore \quad c = \frac{a}{\theta} = \frac{5.68}{0.80} = 7.10 \text{ cm}$$

Del diagrama de deformaciones, obtenemos:

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_{sc}}{c-d'} \quad \therefore \quad \delta_{sc} = \delta_c\,\frac{c-d'}{c} = 0.003\,\frac{7.10-4}{7.10} \simeq 0.0013$$

El acero en compresión alcanzará la fluencia cuando $\delta_{sc} \geq \frac{f_Y}{E_s}$

$$\therefore \quad \frac{4200}{2\,000\,000} = 0.0021 \quad \therefore \quad \delta_{sc} < \frac{f_Y}{E_s}$$

(el acero en compresión no fluye).

Veamos ahora el acero en tensión

$$\frac{\delta_c}{c}=\frac{\delta_s}{d-c} \therefore \delta_s=\delta_c\frac{d-c}{c}=0.003\,\frac{60-7.10}{7.10}\simeq 0.022$$

por tanto

$$\delta_s>\frac{f_Y}{E_s} \therefore 0.022>0.0021$$ (el acero en tensión sí fluye).

Como el acero en compresión no se encuentra en cedencia, el valor obtenido para "a" no es correcto y se debe corregir, veamos:

$$\frac{\delta_c}{\delta_{sc}}=\frac{c}{c-d'} \therefore \delta_{sc}=\delta_c\frac{c-d'}{c}, \quad y \quad \delta_{sc}=\frac{f_{sc}}{E_s}$$

donde

$$f_{sc}=\delta_{sc}E_s, \quad y \quad f_{sc}=\delta_c E_s\frac{c-d'}{c}, \quad y \text{ como } c=\frac{\phi}{\theta}$$

tenemos:

$$f_{sc}=\delta_c E_s\frac{\frac{\phi}{\theta}-d'}{\frac{\phi}{\theta}}, \quad y$$

multiplicando todos los términos de la ecuación por el coeficiente "θ", se obtiene

$$f_{sc}=\delta_c E_s\frac{\phi-\theta d'}{\phi}=0.003\times 2\,000\,000\,\frac{\phi-0.80\times 4}{\phi}=6000\,\frac{\phi-3.20}{\phi}$$

Por necesidad de equilibrio

$$C_c+C_s=T$$

Valor de las fuerzas en compresión y en tensión.

$$C_c=0.85f'_c\,b\phi=0.85\times 200\times 26(\phi)=4420(\phi)$$

$$C_s=A'_s\,f_{sc}=5.97\,f_{sc}$$

$$\therefore \quad T=A_s\,f_Y=11.94\times 4200=50\,148 \text{ Kg}$$

Dando a f_{sc} su valor, se tiene:

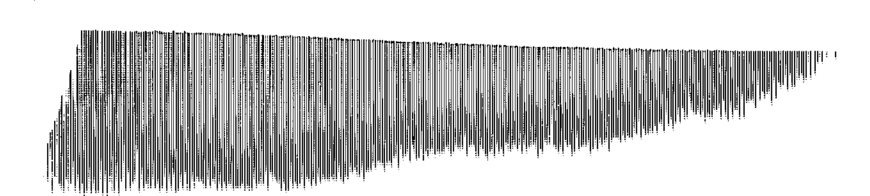
$$C_s=5.97\times 6000\,\frac{\phi-3.20}{\phi}=35\,820\,\frac{\phi-3.20}{\phi}$$

Haciendo referencia a la ecuación de equilibrio, se obtiene

$$4420\,\phi+35820\,\frac{\phi-3.20}{\phi}=50\,148$$

$$\therefore \quad 4420\,\phi+\frac{35820\,\phi}{\phi}-\frac{114600}{\phi}=50148$$

Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 4420, queda la expresión: $\phi+8.10-\frac{25.93}{\phi}\simeq 11.35 \therefore \phi-11.35+8.10-\frac{25.93}{\phi}=0$



Multiplicamos ahora todos los términos de la ecua-

$$\phi^2 - 11.35\phi + 8.10\phi - \frac{25.93\phi}{\phi} = 0$$

$$\therefore \phi^2 - 3.25\phi - 25.93 = 0$$

Y finalmente, se tiene

$$\phi = \frac{(-)-3.25 \pm \sqrt{(3.25)^2 - 4(-25.93)}}{2} = \frac{3.25 + \sqrt{10.56}}{2}$$

$$\phi \simeq 7 \text{ cm}$$

Con el valor de "ϕ", calculamos "f_{sc}"

$$f_{sc} = 6000\ \frac{7 - 3.20}{7} \simeq 3\,257\ Kg/cm^2 < f_Y$$

El valor de la compresión total es de:

$$C_c + C_s = 4420 \times 7 + 5.97 \times 3257 \simeq 50400\ Kg$$

Por equilibrio

$$T = C_c + C_s = 50400\ Kg$$

Como el acero en compresión no alcanzó el esfuerz cia, el momento resistente de diseño valdrá:

$$M_{UR} = 0.90\left[0.85 \times 200 \times 26 \times 7\left(60 - \frac{7}{2}\right) + 5.97 \times 3257\left(60 - 4\right)\right]$$

$$\therefore M_{UR} \simeq 2\,553\,000\ Kgcm$$

A continuación calculamos la viga como viga simpl

Concreto

$$M_{UR} = 0.90\left[0.85 \times 200 \times 26 \times 7\left(60 - \frac{7}{2}\right)\right] \simeq 1573300\ Kgcm$$

Acero en tensión

$$M_{UR} = 0.90\left[A_{s1} f_Y \left(d - \frac{\phi}{2}\right)\right] \therefore A_{s1} = \frac{1573300}{0.90 \times 4200 \times 56.50} \simeq 7.3$$

Momento que proporciona el acero en compresión

$$M_{UR} = F_R\left[A'_s f_{sc}(d - d')\right] = 0.90\left[5.97 \times 3257(60-4)\right] \simeq 980000\ Kg$$

Momento que proporciona el acero en tensión complementario

$$A_{sT} = A_{s1} + A_{s2} \quad \therefore A_{s2} = 11.94 - 7.37 = 4.57\ cm^2$$

$$M_{UR} = F_R\left[A_{s2} f_Y (d - d')\right] \quad \therefore \quad 0.90\left[4.57 \times 4200 \times 56\right] \simeq 96741$$

El resultado es prácticamente el mismo.

En las figuras 4.42 a 4.44., se muestra la viga doblemente reforzada.

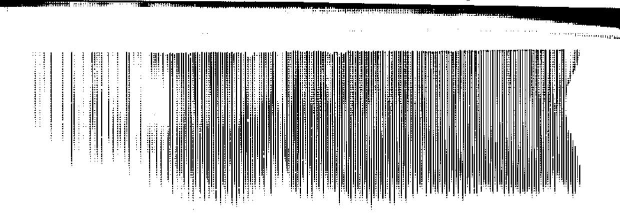
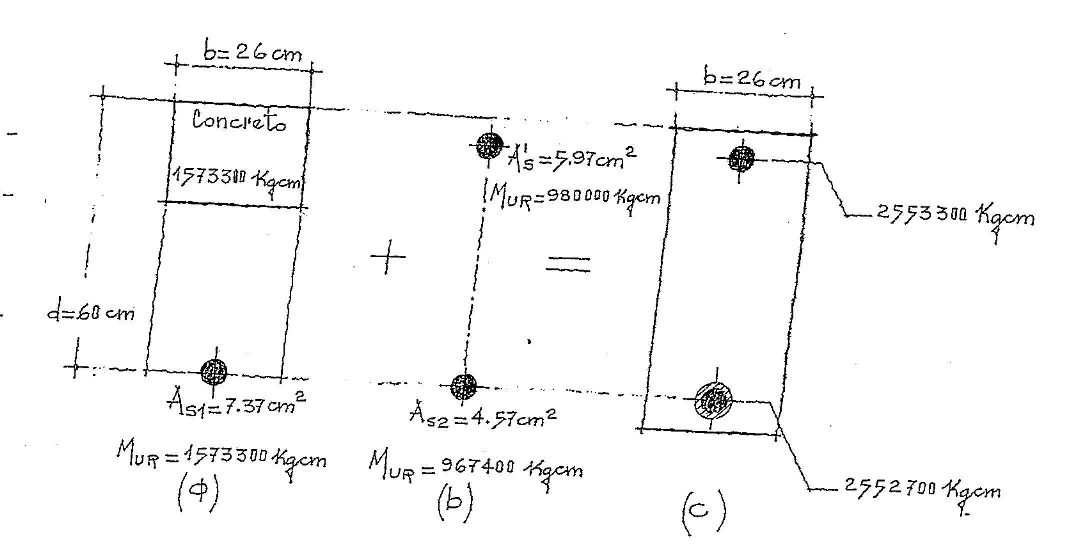


Fig. 4.42. La viga mostrando el valor del momento del concreto y del acero en tensión, (a).

Fig. 4.43. Áreas de acero en compresión y en tensión complementaria, (b).

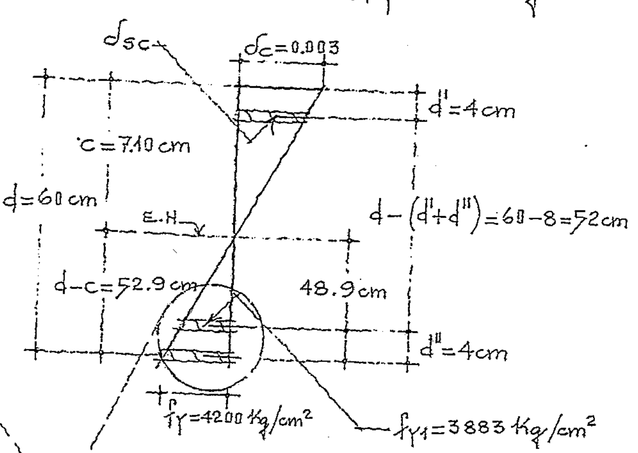
Fig. 4.44. La viga mostrando la capacidad de resistencia final, (c).



Supóngase ahora que las seis varillas no caben en un lecho, en estos casos, será necesario calcular el valor de la fatiga del acero en tensión en ese plano, veamos las figuras 4.45 y 4.46.

Fig. 4.45. Deformaciones en la viga, (a).

Fig. 4.46. Detalle de armados en tensión, (b).



Por comparación de triángulos

$$\frac{4200}{52.9} = \frac{f_{Y1}}{48.9}$$

$$\therefore f_{Y1} \simeq 3883 \text{ Kg/cm}^2$$

2 cm
2 cm
separador

(b)

Momento que proporciona el acero en tensión complementaria

$$M_{UR} = 2553300 - 1573300 = 980000 \text{ Kgcm}$$

$$A_{s2} = \frac{980000}{0.90 \times 3883\,(60-8)} \simeq 5.39 \text{ cm}^2 > 4.57 \text{ cm}^2$$

La misma viga requiere de una área de acero de 12.76 cm², en lugar de 11.94 cm² que necesitó originalmente.

Ya se mencionó que al acercarse al eje neutro, la fatiga bajará de resistencia, en efecto, la fatiga en tensión bajó de 4200 Kg/cm² a 3883 Kg/cm².

Siempre que sea posible, resultará mejor solución y de mayor economía, colocar el acero en un solo lecho.

Ejemplo ilustrativo

Diseñar la viga que aparece en la fig. 4.47. Viga simple o doblemente armada.

Se trata de una estructura para una escuela donde únicamente acciones permanentes y variables.

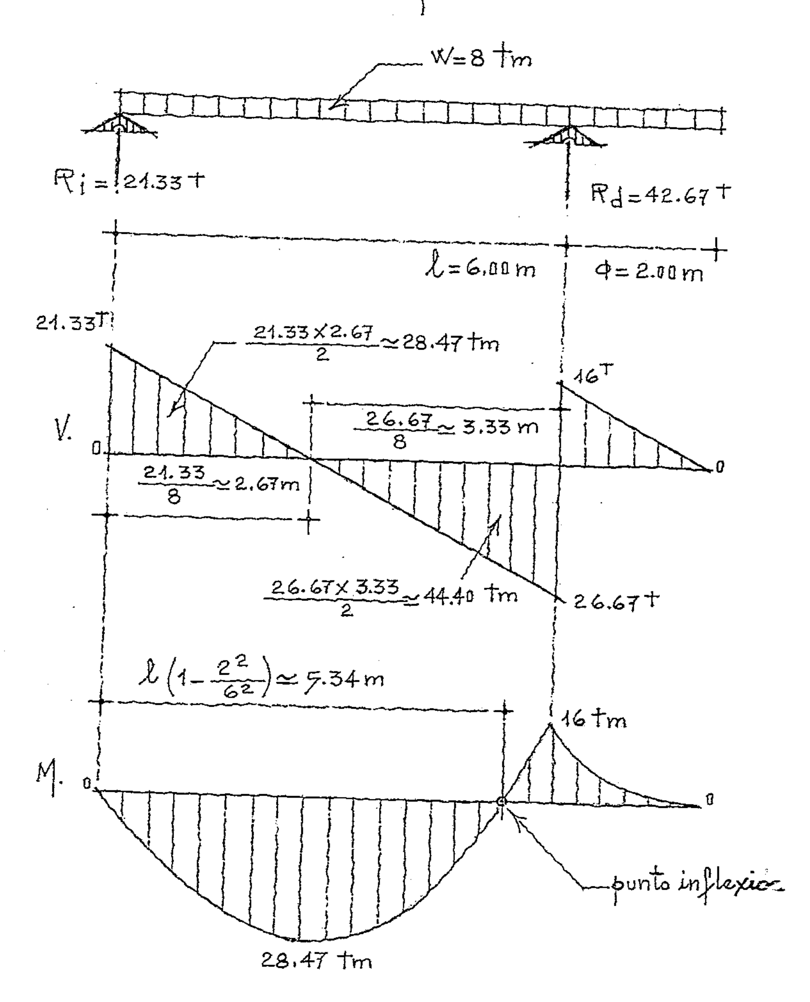


Fig. 4.47. Viga mostrando reacciones y carga. Diagrama de cortantes. Diagrama de momentos flexionantes.

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm² ; $f_y = 4200$ Kg/cm² ; d = 45 cm ; b = ...

$d' = 5$ cm ; $n = 14$

Factor de carga, $F_c = 1.5$

Carga en la viga, $w = 5.30$ tm (supuesto)

$W = 5.30 \times 1.5 = 7.95 \simeq 8$ tm

Suma de fuerzas verticales

$$R_i + R_d - (8 \times 8) = 0$$

Haciendo momentos en R_i, se tiene:

$$\Sigma M_{R_i} = R_d \times 6 - 8 \times 8 \times 4 = 0$$

$$\therefore R_d = \frac{256}{6} \simeq 42.67\ T$$

y,

$$R_i + 42.67 - 64 = 0$$

$$\therefore \quad R_i = 21.33\ T$$

Aplicando fórmulas, se obtiene

$$R_i = \frac{w}{2\ell}(\ell^2 - a^2) = \frac{8}{2 \times 6}(6^2 - 2^2) \simeq 21.34\ T$$

$$R_d = \frac{w}{2\ell}(\ell + a)^2 = \frac{8}{2 \times 6}(6+2)^2 \simeq 42.66\ T$$

Los resultados son idénticos.

Como ya hemos visto, primeramente suponemos que todo el acero fluye.

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \beta}{f_Y} \cdot \frac{0.003\,E_s}{0.003\,E_s + f_Y} = \frac{0.85 \times 200}{4200} \cdot \frac{0.80 \times 0.003 \times 2000000}{0.003 \times 2000000 + 4200}$$

$$\therefore \quad \rho_b = 0.04 \times 0.47 = 0.0188$$

Cálculo del acero como viga simple

$$\rho = \frac{A_{s1}}{bd} \quad \therefore \quad A_{s1} = \rho bd = 0.0188 \times 20 \times 45 = 16.92\ cm^2$$

De la ecuación de equilibrio obtenemos, figuras 4.48 a 4.51.

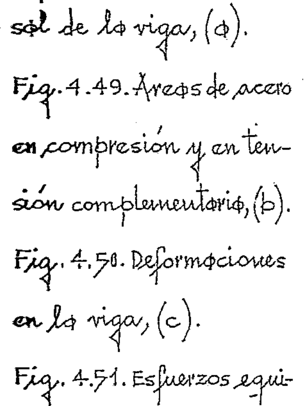
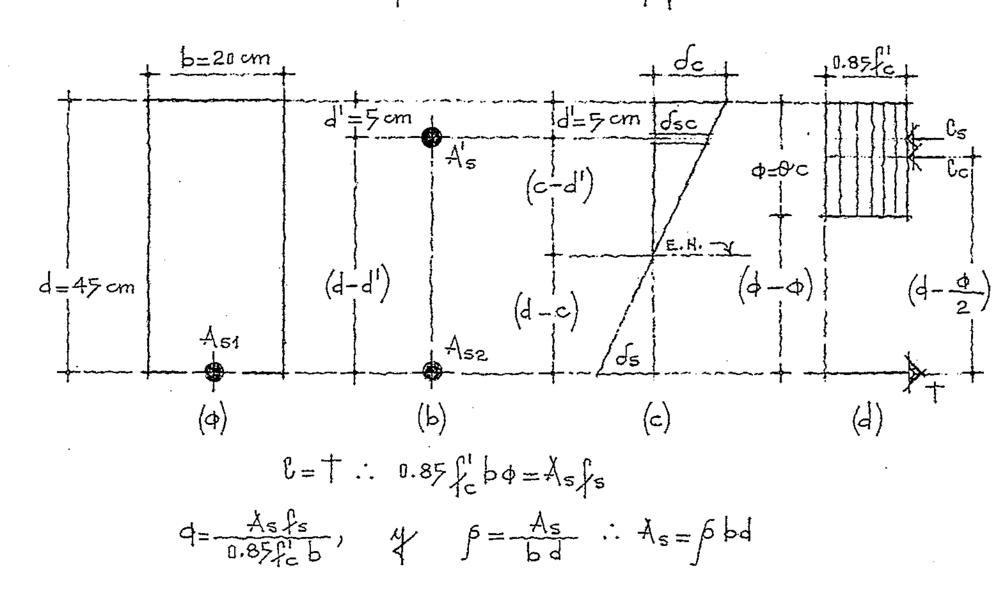


Fig. 4.48. Corte transversal de la viga, (a).
Fig. 4.49. Areas de acero en compresión y en tensión complementaria, (b).
Fig. 4.50. Deformaciones en la viga, (c).
Fig. 4.51. Esfuerzos equivalentes en una viga doblemente armada, (d).



$$C = T \quad \therefore \quad 0.85 f'_c\, b a = A_s f_s$$

$$a = \frac{A_s f_s}{0.85 f'_c\, b}, \quad y \quad \rho = \frac{A_s}{bd} \quad \therefore \quad A_s = \rho bd$$

Substituyendo, se tiene

$$\phi = \frac{\rho b d f_Y}{0.85 f'_c b} = \frac{\rho d f_Y}{0.85 f'_c}\ , \text{ por tanto}$$

$$\phi = \frac{0.0188 \times 45 \times 4200}{0.85 \times 200} = 20.90 \text{ cm}$$

Calculamos el momento resistente de la viga con

$$M_{UR1} = F_R\left[A_{s1} f_Y \left(d - \frac{\phi}{2}\right)\right] = 0.90\left[16.92 \times 4200 \left(45 - \frac{20.91}{2}\right.\right.$$

$$\therefore M_{UR_1} \simeq 2\,210\,000 \text{ Kgcm}$$

El momento máximo en la viga es de 28.47 tm

$$\therefore 2\,847\,000 \text{ Kgcm} > 2\,210\,000 \text{ Kgcm (la viga}$$

La diferencia de momentos se absorbe con un par de
do que el acero en compresión también alcanza la fluencia,

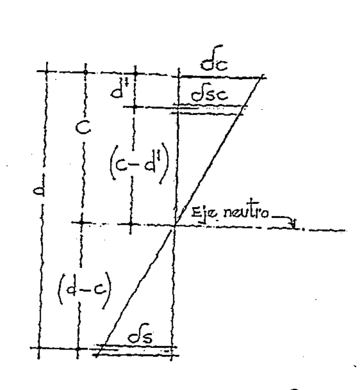
$$M_{UR2} = M_{Umáx.} - M_{UR_1} = 637\,000 \text{ Kgcm}$$

$$M_{UR_2} = \left[A'_s f_Y (d - d')\right] F_R \therefore A'_s = \frac{M_{UR2}}{0.90\left[4200(45-5)\right]} = \frac{637000}{151200}$$

$\therefore A_{s2} = A'_s$ (serán iguales cuando los aceros fluyan)

Como se supuso que ambos aceros (tensión y compresión) alcan
zo de fluencia, falta por verificar que ambos aceros se encuentren
la fig. 4.52.

Fig. 4.52. Deformaciones en la viga.



Por comparación de triángulos

$$\phi = \theta c \quad \therefore c = \frac{\phi}{\theta} = \frac{20.90}{0.80} \simeq$$

$$\frac{\delta c}{\delta sc} = \frac{c}{c - d'} \quad \therefore \delta_{sc} = \delta_c \frac{c - d'}{c}$$

$$\therefore 0.003 \frac{26.13 - 5}{26.13} \simeq 0.0024$$

Para que el acero en compresión
necesario que

$$\delta_{sc} \geq \frac{f_Y}{E_s} = \frac{4200}{2\,000\,000} = 0.0021 \quad \therefore \delta_{sc} > 0.0021$$

El acero en compresión alcanza la fluencia como se supuso
Veamos ahora si el acero en tensión también alcanza la fl

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta s}{d - c} \quad \therefore \delta_s = \delta_c \frac{d - c}{c} = 0.003 \frac{45 - 26.13}{26.13} \simeq 0.0022$$

Para que fluya: $\delta_s > 0.0021 \therefore 0.0022 > 0.0021$ (el acero en tensión

Veamos las figuras 4.53 a 4.55.

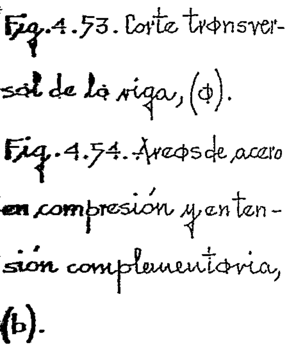
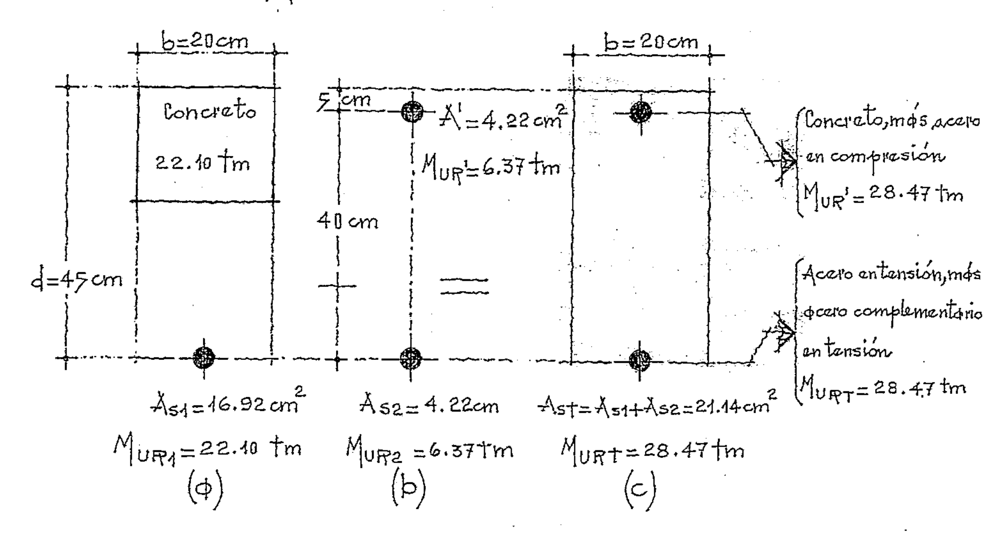


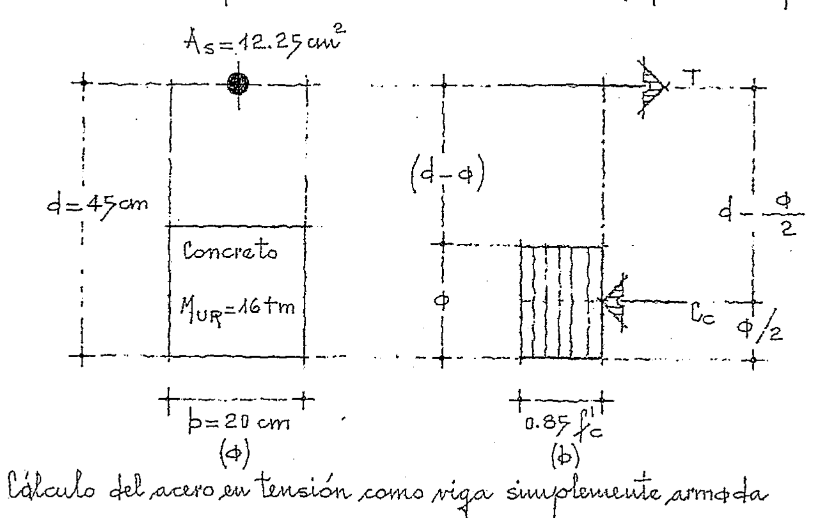
Fig. 4.53. Corte transversal de la viga, (a).

Fig. 4.54. Areas de acero en compresión y en tensión complementaria, (b).

Fig. 4.55. Tramo de la viga en el momento de (28.47 tm), (c).



Tramo de la viga en el momento de (16 tm)*, figuras 4.56 y 4.57.



Cálculo del acero en tensión como viga simplemente armada

$$M_{UR} = F_R\left[A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right)\right] \quad \therefore A_s = \frac{M_{UR}}{F_R\left[f_y\left(d - \frac{a}{2}\right)\right]} = \frac{1600000}{0.90\left[4200\left(45 - \frac{20.90}{2}\right)\right]}$$

$$\therefore A_s = 12.25 \text{ cm}^2$$

Número de varillas en la viga; figs. 4.58 a 4.61

Momento de 28.47 tm: Acero en tensión . . . $\frac{21.14}{5.07} \simeq 4\phi_s\#8$; Compresión . . . $\frac{4.22}{1.99} \simeq 2\phi_s 5$

Momento de 16.00 tm: Acero en tensión . . . $\frac{12.25}{5.07} \simeq 3\phi_s\#8$

---

* Obsérvese que la sección de concreto (45 x 20), proporciona un momento de (22.10 tm) como viga simple y, el momento por absorber en el segundo tramo de viga es de (16 tm). Esto indica que el concreto en esa zona se encuentra sobrado y la viga no trabaja en forma balanceada.

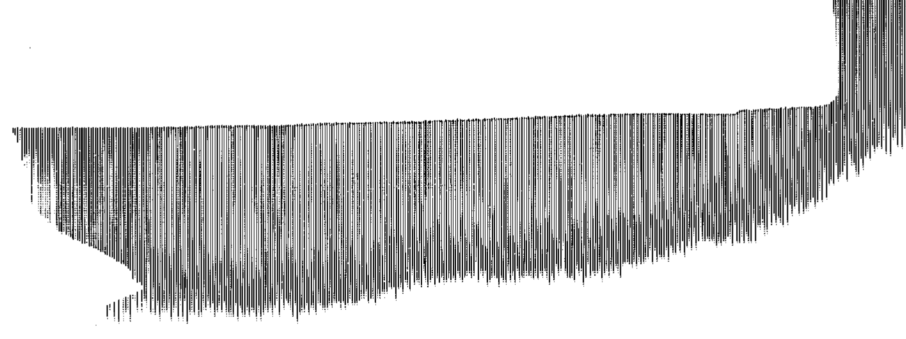


Fig. 4.58. Corte longitudinal mostrando los armados de la viga, (a).

Fig. 4.59. Corte transversal mostrando las áreas de acero de la viga, (b).

Fig. 4.60. Corte transversal sección X-X, (c).

Fig. 4.61. Corte transversal sección Y-Y, (d).

2 ϕ_s 5 — 2 ϕ_s 4 (armado) opcional — 3 ϕ_s 8

d = 45 cm

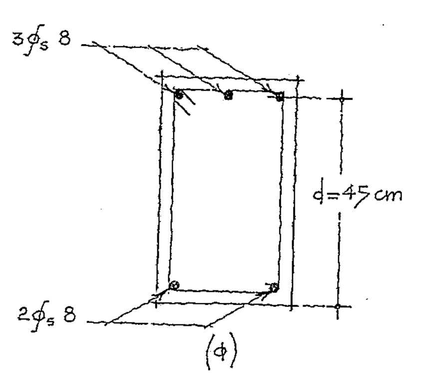
puntos de inflexión

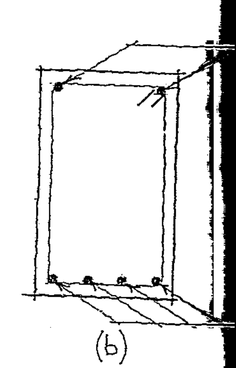
4 ϕ_s 8 — 2 ϕ 4

Y-Y — X-X

(a)

l = 6.00 m — a = 2.00 m





Hay otras posibilidades de armar la viga, figuras 4.62 ...

Fig. 4.62. Sección X-X, (a). Otra posibilidad de armar la viga.

Fig. 4.63. Sección Y-Y, (b). Otra posibilidad de armar la viga.

3 ϕ_s 8

d = 45 cm

2 ϕ_s 8

(a) (b)

Muchos constructores prefieren esta última solu... pues aunque lleva más acero, resulta más rápida y se... cución.

Referencias bibliográficas

Capítulo 4

Whitney, S. Charles y E. Cohen, "*Guide for ultimate Strength Design of Reinforced Concrete,*" ACI Journal, noviembre, 1956.

Whitney, S. Charles, "*Design of Reinforced Concrete Members Under Flexure or Combined Flexure and Direct Compression,*" 1937.

Whitney, S. Charles, "*Plastic Theory of Reinforced Concrete Design,*" 1942.

Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, México, 1988.

ACI-ASCE Committee 327, "*Ultimate Strength,*" Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, 1956.

Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado, ACI 318-83, Detroit, 1983.

5

SECCIONES T, L e I

5.1. Generalidades

En una estructura, al unirse una losa co- una la viga "T"; en ocasiones la viga "T" es únicamente pues en realidad trabaja como una viga rectangular p-

En efecto, para que una viga sea realmen- sario que la profundidad del eje neutro sea mayor que e- tín, fig. 5.1.

Fig. 5.1. Viga "T", el eje neutro se encuentra abajo del patín, (a).

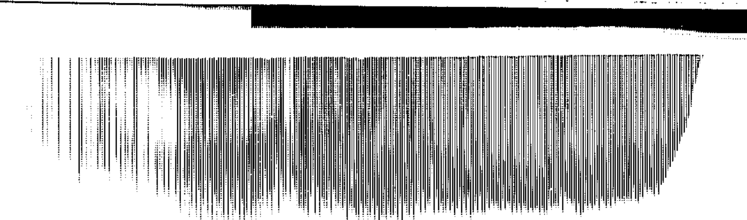
Fig. 5.2. Viga en forma de "T", el eje neutro se encuentra dentro del patín, (b).

Cuando el eje neutro cae dentro del espesor del p- el límite de éste, la viga "T" es únicamente en apariencia, - ción trabajará como una viga rectangular y deberá calcu- fig. 5.2. Cuando esto ocurre, la viga es una viga "I".

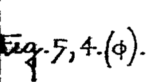
En estas vigas, el ancho del patín es difícil de de- fuerzos máximos de compresión que se encuentran localiza- sección se van disminuyendo conforme se alejan de dicho eje. - genera, principalmente, por los esfuerzos cortantes en la losa.

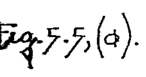
Tomando en consideración las investigaciones realiz- mento de Construcciones para el D.F., determina que el ancho - limitado al menor valor de las tres especificaciones siguientes, - secciones "T", como para las secciones "L", a cada lado -

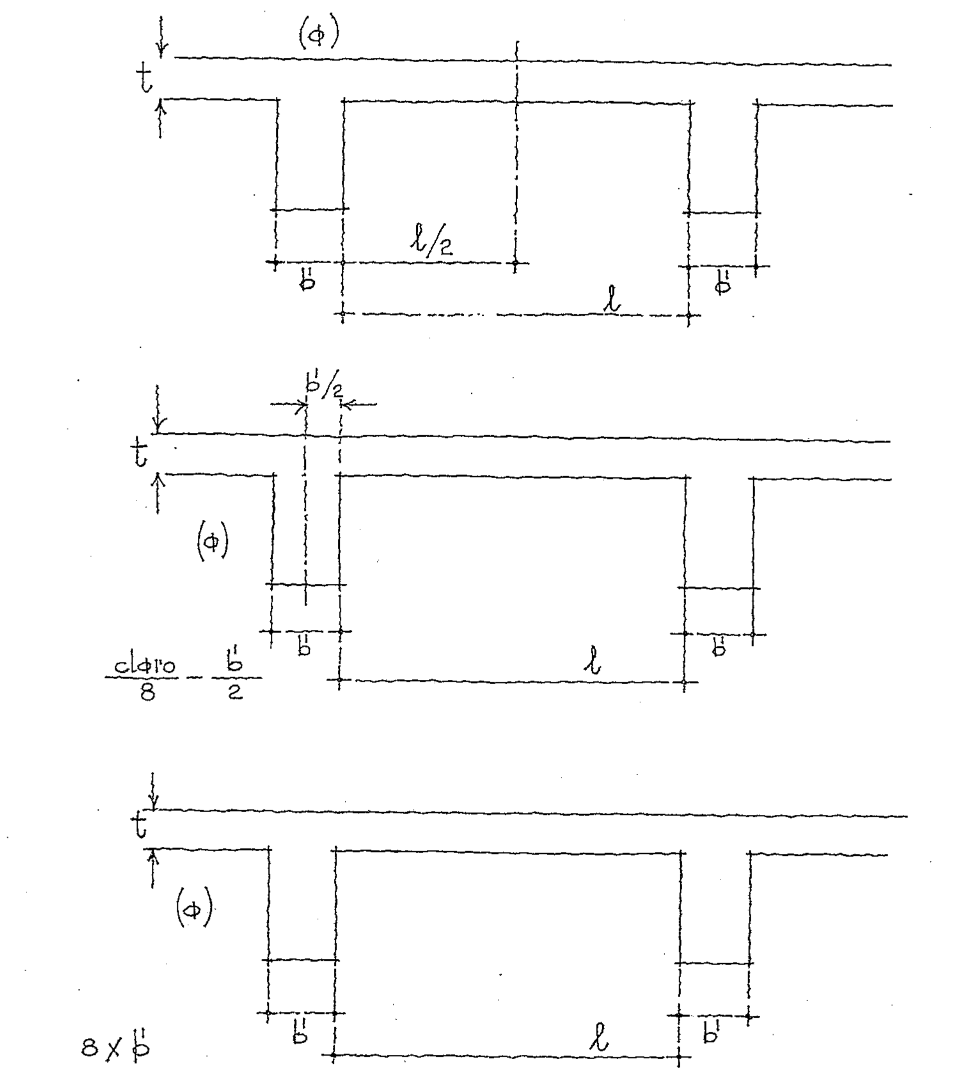
1. Mitad de la distancia al paño del alma del - cercano, figura 5.3.
2. Octava parte del claro menos la mitad del ancho d-



3. Ocho veces el espesor del patín, fig. 5.5.


Fig. 5.3, (a).

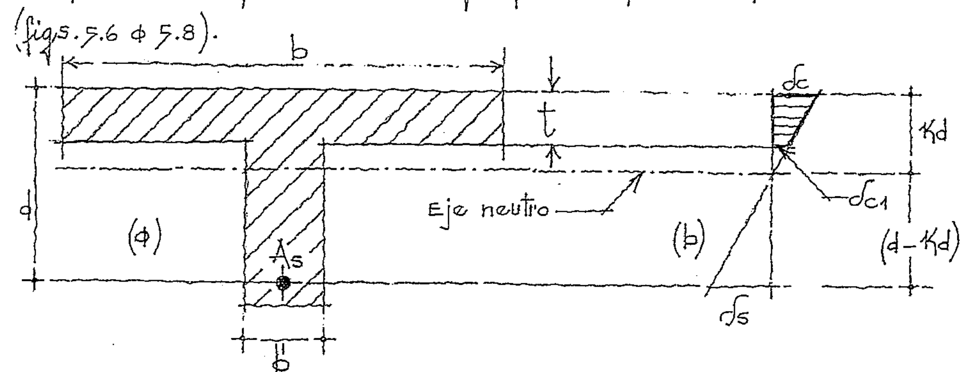

Fig. 5, 4. (a).



Cuando la distancia desde la fibra más alejada de concreto en compresión al eje neutro, es mayor que el espesor del patín t, se tendrá: (figs. 5.6 a 5.8).

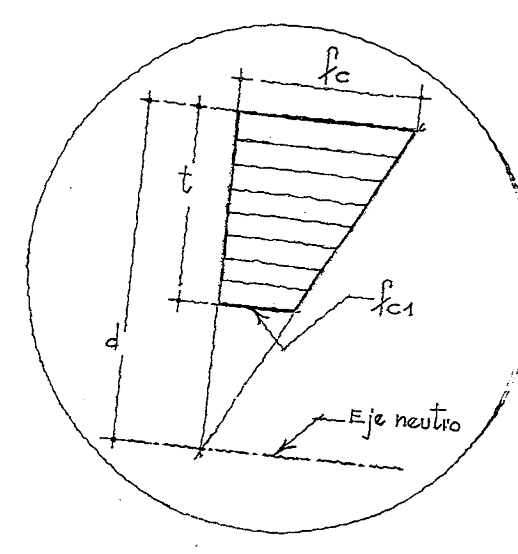
Fig. 5.6 Viga "T", (a).

Fig. 5.7. Esfuerzos en la zona de compresión (b).



En la fig. 5.8, se muestra la cuña de
de compresión a escala mayor para más clarid

Fig. 5.8. Cuña de esfuerzos.



A continuación se muestra la cuña de esfue
fig. 5.9.

Fig. 5.9. Volumen de la cuña de esfuerzos. Compresiones.

Tomando en cuenta las recomendaciones del reglame
"T" se analizarán de acuerdo a:

a) Diseño por esfuerzos de trabajo (Teoría Elás
b) Diseño por resistencia máxima y servicio (Diseño .

a) *Diseño por esfuerzos de trabajo (Teoría Elástica).*

Ejemplo ilustrativo

Calcular el área de acero para la viga "T" de la figura 5.10 y 5.11. Se supone un momento flexionante de 30 000 Kgm.

Datos:

$b' = 20$ cm $\qquad f'_c = 200$ Kg/cm^2

$b = ? = 1.90$ m $\qquad f_y = 4200$ Kg/cm^2

$d = 60$ cm $\qquad t = 12$ cm

$A_s = ?$ $\qquad j = 0.87$ $\qquad n = 14$

$L = 7.60$ m $\qquad S = 3.10$ m

Fig. 5.10. Planta de la estructura, (a).

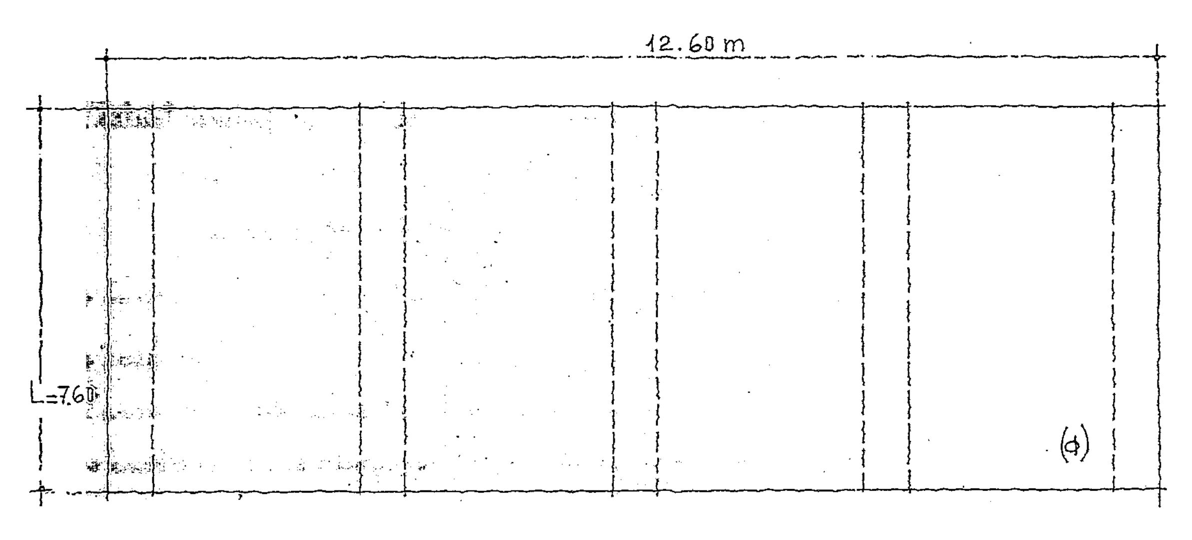
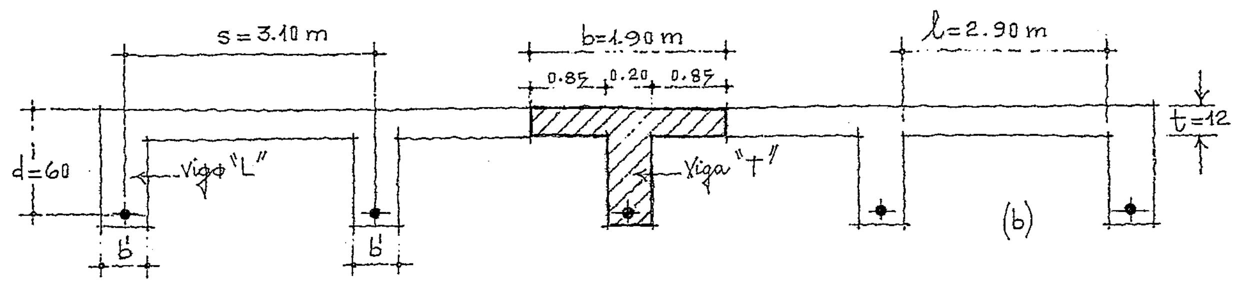


Fig. 5.11 Corte de la estructura, (b).



Cálculo del ancho efectivo del patín:

1. $\frac{l}{2} = \frac{2.90}{2} = 1.40$ m

2. $\frac{7.60}{8} - \frac{20}{2} = 0.95 - 0.10 = 0.85$ m $\quad \therefore \; (0.85)2 + 0.20 = 1.90$ m

3. $8 \times 12 = 0.96$ m

El reglamento especifica que se tomará el menor de los tres, es decir 0.85.

Además de las especificaciones mencionadas, ... te considerar una recomendación más:

"el ancho efectivo de la viga (b), no exceder... de la cuarta parte de la longitud o claro de la viga".

Para nuestro ejemplo:

$$\frac{L}{4} = \frac{7.60\ m}{4} = 1.90\ m\ ;\ \text{se en...}$$

mite de la especificación.

A continuación, se calcula el brazo de pala... será la distancia del centro del acero en tensión, has... dentro del espesor del patín que varía entre t/2 y ... con lo anterior, se puede intentar como un primer ta...

$$1.\ jd = d - \frac{t}{2} = 60 - \frac{12}{2} = 54\ cm$$

$$2.\ jd = d - \frac{t}{3} = 60 - \frac{12}{3} = 56\ cm$$

Tomando el promedio,

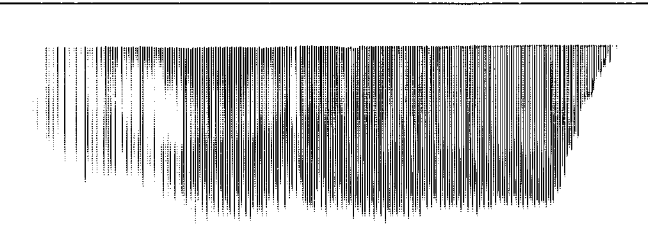
$$jd = 55\ cm$$

A continuación, se calcula el área de acero par... la profundidad del eje neutro (Kd), después se comproba... A_s, es o no correcto.

$$A_s = \frac{3\ 000\ 000}{2100 \times 55} = 25.97\ cm^2$$

Fig. 5.12. Areas para el cálculo de una viga "T".

Para calcu... mos referenc...



* Generalmente este primer tanteo da como resultado, un valor ... pre es similar al obtenido con el cálculo.

$$b' \cdot Kd \cdot \frac{Kd}{2} + (85)\,2 \cdot 12\,(Kd-6) - nA_s\,(60-Kd) = 0$$

$$20\,\frac{Kd^2}{2} + 2040\,(Kd-6) - 14 \times 25.97\,(60-Kd)$$

$$10\,Kd^2 + 2040\,Kd - 12240 + 364\,Kd - 21815$$

dividiendo todos los términos de la ecuación entre 10, se tiene:

$$Kd^2 + 240.4\,Kd - 3405.5 = 0$$

$$\therefore\; Kd = \frac{-240.4 + \sqrt{(240.4)^2 - 4\,(3405.5}}{2} = \frac{-240.4 + 267.2}{2}$$

finalmente

$$Kd = 13.40 \text{ cm}$$

$\therefore\; Kd = 13.40 \text{ cm} > t$ (la viga es viga "T").

Por comparación de triángulos en la fig. 5.13, obtenemos:

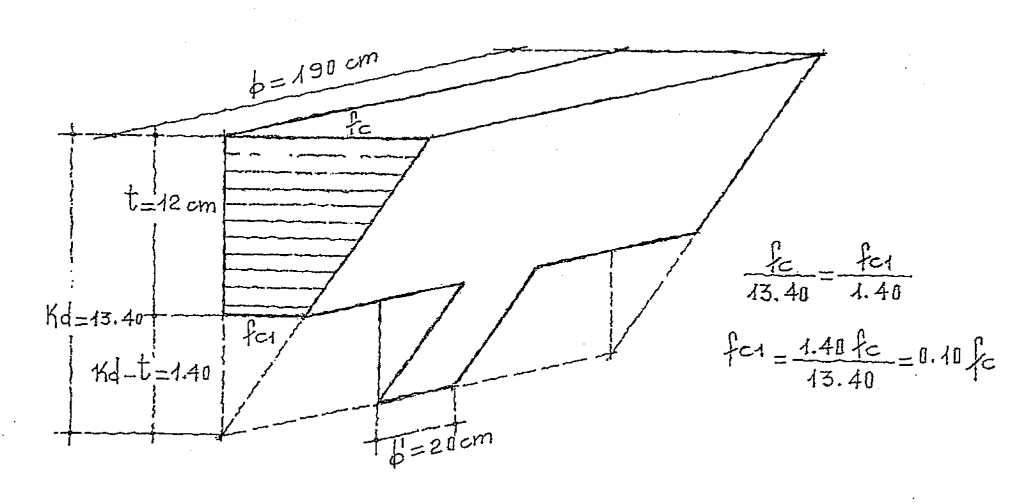


Fig. 5.13. Cuña de esfuerzos en la zona de compresión.

$$\frac{f_c}{13.40} = \frac{f_{c1}}{1.40}$$

$$f_{c1} = \frac{1.40\,f_c}{13.40} = 0.10\,f_c$$

Posición del centro de compresión

Volumen de las cuñas (Fuerzas)	Distancias	Momentos
$0.5\,f_c\,b\,Kd = 0.5\,f_c \times 190 \times 13.40 = 1273\,f_c$	4.47	$5690\,f_c$
$-0.5\,f_{c1}(b-b')(Kd-t) = -0.5 \times 0.10\,f_c \times 170 \times 1.40 = -11.90\,f_c$	12.47	$-149\,f_c$
$C = 1261.10\,f_c$		$M = 5541\,f_c$

$$\therefore\; z = \frac{M}{C} = \frac{5541\,f_c}{1261.10\,f_c} \simeq 4.39 \text{ cm}$$

El brazo de palanca será igual al peralte efectivo menos la distancia del centro de compresión a la fibra más alejada del concreto, veamos:

$$jd = d - z = 60 - 4.39 = 55.61 \text{ cm}$$

Cuando se hizo el primer tanteo, el brazo de palanca = 55 cm; vemos que ambos resultados prácticamente son iguales.

En la figura 5.14, se muestran las posiciones de los = los prismas triangulares.

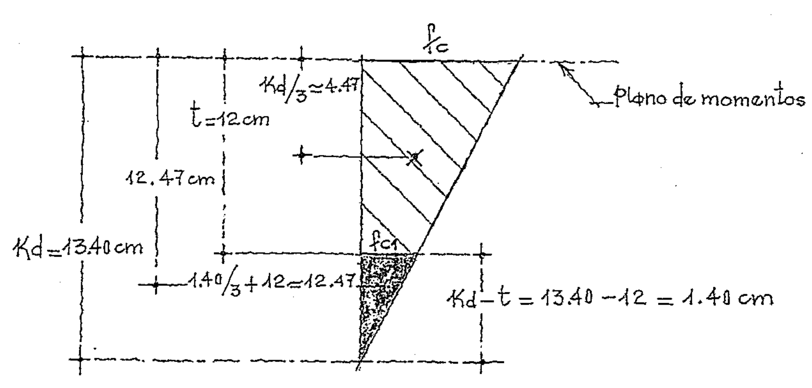


Fig.5.14. Localización de los centroides.

Cálculo de la nueva área de acero

$$A_s = \frac{3\,000\,000}{2100 \times 55.61} \simeq 25.70 \text{ cm}^2$$ (prácticamente igual a l...)

Veremos a continuación si la fatiga del concreto se encuentra dentro de las condiciones normales de trabajo:

$$M = Cjd = 1261.10 f_c (jd)$$

$$f_c = \frac{M}{1261.10 (jd)} = \frac{3\,000\,000}{1261.10 \times 55.61} \simeq 42.8\ldots$$

$$\therefore f_c = 0.45 f'_c = 0.45 \times 200 \text{ Kg/cm}^2 = 90 \text{ Kg/cm}^2 > 42.8\ldots$$

La fatiga del concreto queda dentro de las condiciones de trabajo.

Cuando la fatiga de trabajo del concreto resulte mayor permisible, será necesario recurrir al aumento del peralte. Después los mismos pasos que los vistos en el ejemplo.

La solución es siempre adecuada, además, la viga resulta económica al disminuir el área de acero.

Ejemplo ilustrativo

Se cuenta con un espacio de 8.10 m X 16.20 m, a ejes. Diseñar la estructura a base de vigas "T" doblemente empotradas. Para el ejemplo se supone un espesor en la losa de 8 cm (el autor recomienda utilizar espesores no menores de 8 cm.), de lo contrario, se corre el riesgo que la losa transmita muchos ruidos y, además, que vibre demasiado. Ver figuras 5.15 a 5.17.

Datos:

$$f'_c = 200\ Kg/cm^2 \quad ; \quad f_Y = 4200\ Kg/cm^2$$

Fig. 5.15. Planta del local y gráfico de momentos flexionantes.

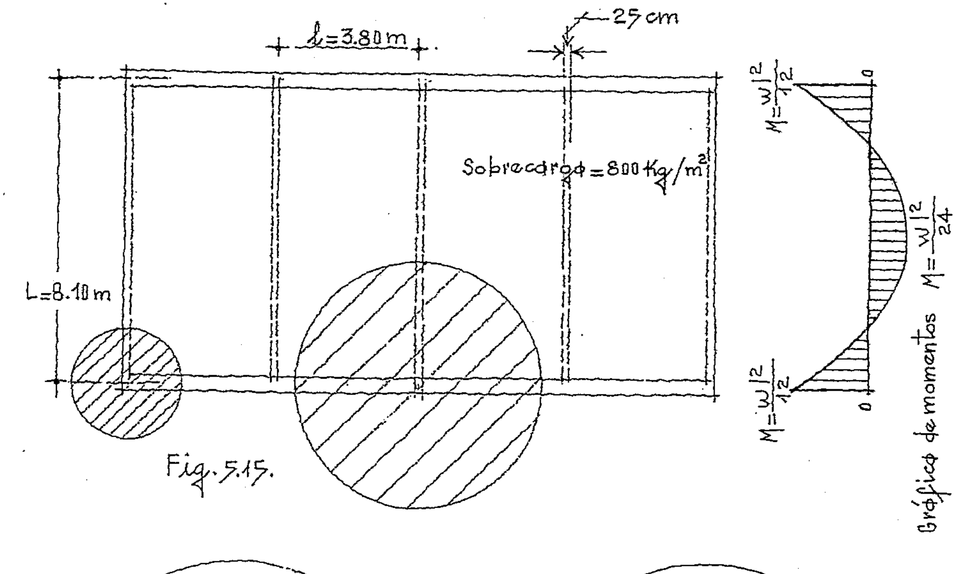


Fig. 5.15.

Fig. 5.16 Viga "L". Detalle.

Fig. 5.17. Viga "T". Detalle.

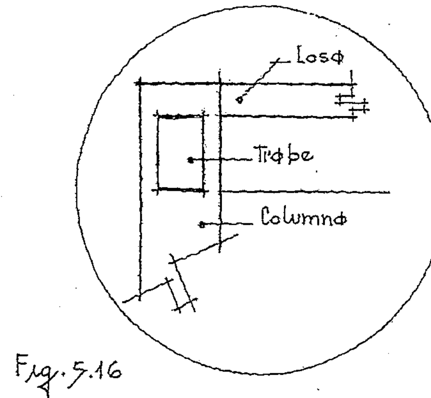


Fig. 5.16

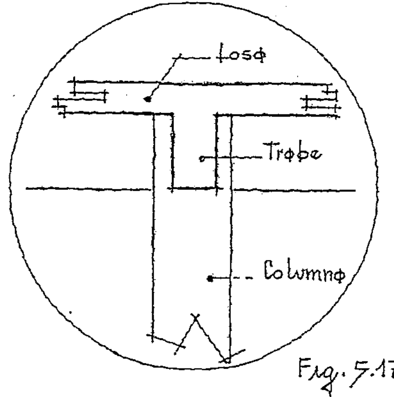


Fig. 5.17

Como se desconoce la sección de la viga, suponemos:

Peralte de la viga $\simeq$ 1/15 del claro $= \frac{8.10}{15} = 54\ cm \simeq 50\ cm$

Espesor de la viga $\simeq$ 1/2 del peralte $\therefore\ b = \frac{50}{2} = 25\ cm$

p.propio de la viga $= 0.25 \times 0.50 \times 8.10 \times 2400 = 2430\ Kg$

Obtención de cargas; fig. 5.18.

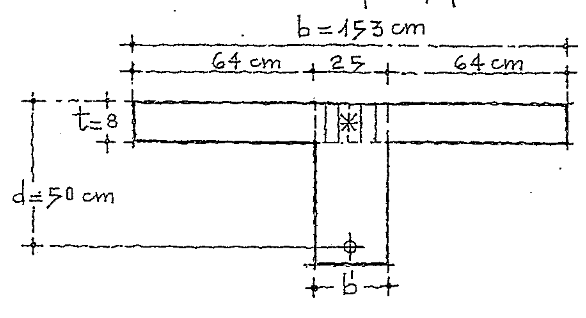


Fig. 5.18. Dimensiones de la viga "T". Corte.

Cálculo de... tivo del pa...

1. $\frac{380}{2} = 190$ ...
2. $\frac{8.10}{8} - \frac{25}{2}$ = ...
3. $8 \times 8 = 64$ ...

Tomamos el valor de 64 cm.

El ancho efectivo de la viga no excederá de 1/4 ... tud de la viga, veamos:

$$\frac{8.10}{4} \simeq 2.03 = 203 \text{ cm} > 153 \text{ cm}, \text{ correc...}$$

Losa de concreto	$= 0.08 \times 2400$ Kg/m³	$= 192$ Kg/m²	(...
Sobrecarga	=	= 800 "	(sup...
Carga viva	=	= 220 "	(sup...
	w	$= 1212$ Kg/m²	

En la fig. 5.19, se muestra la carga total que ... ga "T".

Área ≃ 12.40 m²

L = 8.10 m

b = 1.53 m

Fig. 5.19. Medidas que indican el ancho y largo de la viga "T". Planta.

Peso trabe . . . . .

Peso losa (12.40 x 1212) . =

Carga por metro lineal ...

$$\frac{2430 + 15030}{8.10} \simeq 2160 \ldots$$

Cálculo del brazo de pa...

1. $jd = d - \frac{t}{2} = 50 - \frac{8}{2} = \ldots$

2. $jd = d - \frac{t}{3} = 50 - \frac{8}{3} = \ldots$

Tomamos el promedio

$$\frac{46 + 47.40}{2} = 46.70 \text{ cm}$$

*No se descontó el peso del concreto ocupado por la parte rayada.

Calculamos ahora el momento flexionante

$$M_{máx.} = \frac{wl^2}{12} = \frac{2160 \times 8.10^2}{12} \simeq 11810 \text{ Kgm (extremo de la viga)}$$

$$M_{máx.} = \frac{wl^2}{24} \simeq 5905 \text{ Kgm (centro de la viga)}$$

Cálculo del área de acero:

$$A_s = \frac{1181000}{2100 \times 46.70} = 12 \text{ cm}^2 \text{ (extremos de la viga)}$$

Obtención de la profundidad del eje neutro (Kd), fig. 5.20.

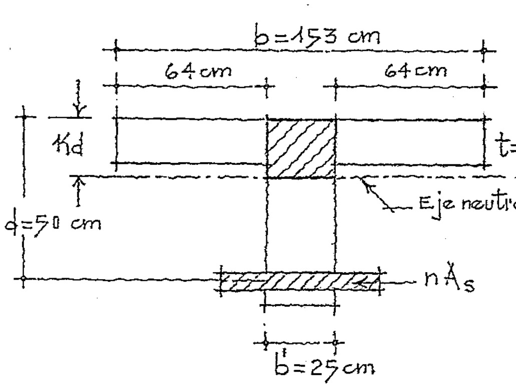


Fig. 5.20. Areas para calcular la profundidad del eje neutro (jd).

$$25 \cdot Kd \frac{Kd}{2} + (64)2 \cdot 8(Kd-4) - nA_s(d-Kd) = 0$$

$$25\frac{Kd^2}{2} + 1024\,Kd - 4096 - 13 \times 12(50-Kd)$$

$$25\frac{Kd^2}{2} + 1024\,Kd - 4096 + 156\,Kd - 7800 = 0$$

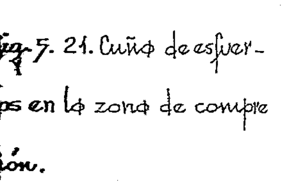
Dividiendo entre 25, se tiene:

$$Kd^2 + 47Kd - 476 = 0, \quad y$$

$$Kd = \frac{-47 + \sqrt{(47)^2 - 4(-476)}}{2} = \frac{-47 + \sqrt{4113}}{2} \simeq 8.60 \text{ cm}$$

$$\therefore Kd = 8.60 \text{ cm} > t \text{ (la viga es viga "T").}$$

Por comparación de triángulos, obtenemos; fig. 5.21.



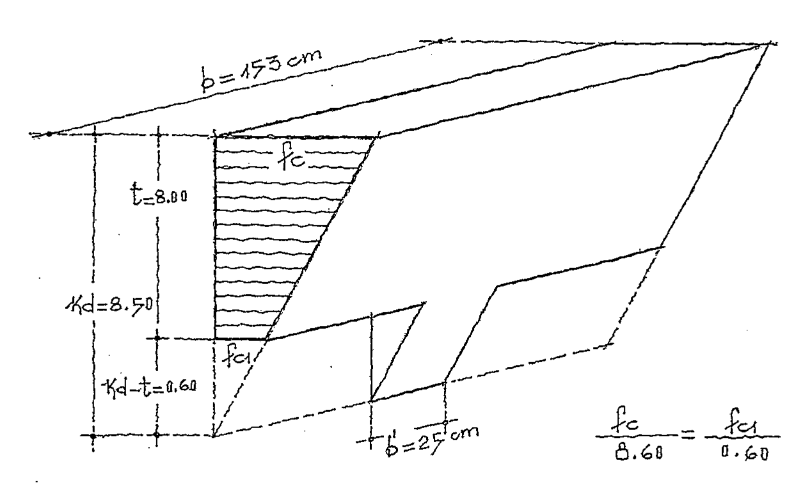


Fig. 5.21. Cuña de esfuerzos en la zona de compresión.

$$\frac{f_c}{8.60} = \frac{f_{c1}}{0.60}$$

$$\therefore f_{c1} = \frac{0.60 f_c}{8.60} \simeq 0.07 f_c$$

Localización del centro de compresión

Volumen de las cuñas (Fuerzas)	Distancias
$0.5 f_c b Kd = 0.5 f_c \times 153 \times 8.60 \simeq 658 f_c$	2.87
$-0.5 f_{c1}(b-b')(Kd-t) = -0.5 \times 0.07 f_c \times 128 \times 0.6 \simeq -\ 2.69 f_c$	8.20

$$C = 655.31 f_c$$

$$\therefore z = \frac{M}{C} = \frac{1868 f_c}{655.31 f_c} \simeq 2.85 \text{ cm}$$

$$\therefore jd = 50 - 2.85 = 47.15 \text{ cm}$$ (valor definitivo del...

En la fig. 5.22 se muestra la posición de los centr... ma triangular.

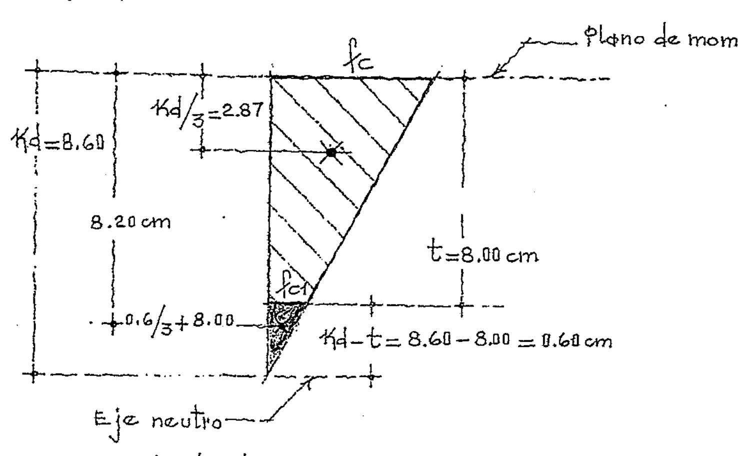


Fig. 5.22. Posición de los centroides.

Cálculo de la nueva área de acero

$$A_s = \frac{1181000}{2100 \times 47.15} \simeq 11.93 \text{ cm}^2$$ (prácticamente igual a la...

Revisamos la fatiga de trabajo del concreto para veri... cuentra en condiciones normales de trabajo, veamos

$$M = C\,jd = 655.31 f_c\,(jd)$$

$$\therefore f_c = \frac{1181000}{655.31 \times 47.15} \simeq 38.23 \text{ Kg/cm}^2$$

La fatiga de trabajo del concreto se encuentra muy por ... fatiga supuesta que es de:

$$f_c = 0.45 f'_c = 0.45 \times 200 = 90 \text{ Kg/cm}^2 > 38.23 \text{ Kg/cm}^2$$

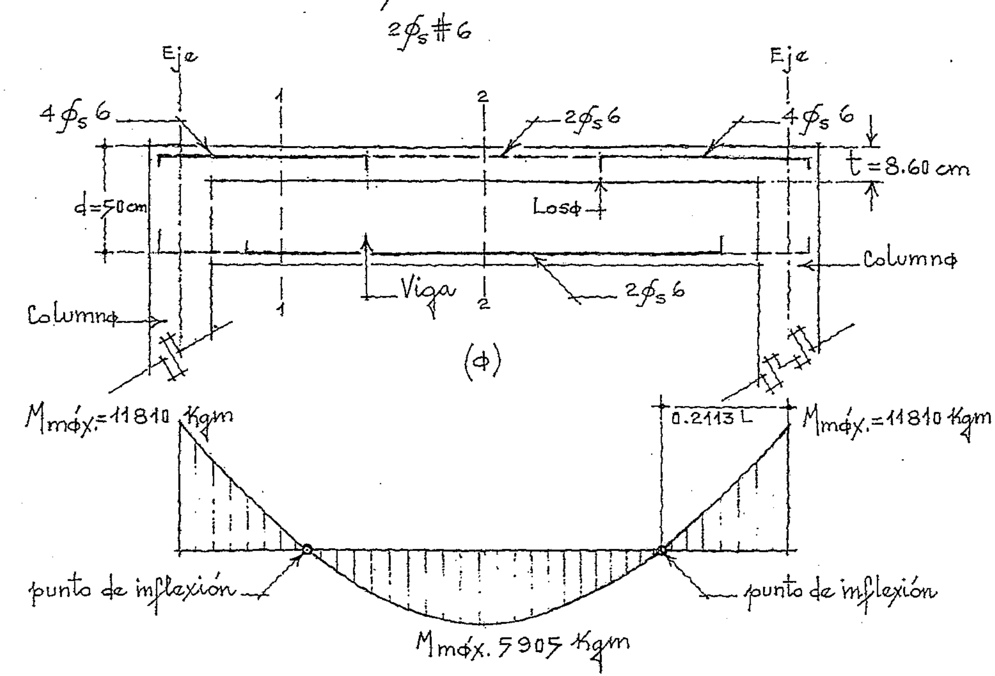
Cálculo de los armados y colocación de las varillas en la viga "T", figuras 5.23 a 5.26.

En los extremos de la viga

$$A_s = 11.93 \text{ cm}^2 \text{ ; con } \phi_s \# 6 \quad \frac{11.93}{2.87} \simeq 4\phi_s 6$$

En el centro de la viga

$$2\phi_s \# 6$$



ig. 5.23. Corte longitu-
tual mostrando los ar-
mados en la viga "T",
a).

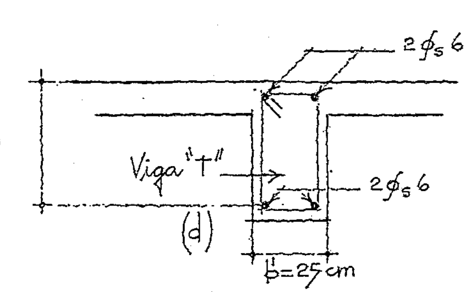
ig. 5.24. Gráfica de
momentos flexionantes,
b).

$4\phi_s 6$

$2\phi_s 6$ — Viga "T" — d=50 cm

b=25 cm

(c)



ig. 5.25. Corte trans-
ersal de la viga por
1-1, (c).

ig. 5.26. Corte transver-
al de la viga por 2-2,
d).

En el centro de la viga, parte superior, se prolongaron las dos varillas de 3/4" en toda la longitud para facilitar el trabajo de armado. También se hubiera podido armar en ese tramo con $2\phi_s$ de 1/2". En igual forma, en la parte inferior (extremos), se prolongaron las dos varillas de 3/4" en toda la longitud de la viga.

La cantidad de acero para cada zona lo indica la gráfica de momentos, sin embargo, en muchas ocasiones, se utiliza más acero del requerido a cambio de rapidez y facilidad en la ejecución del trabajo.

5.2. Vigas "T" doblemente armadas (Te...

Semejante a las vigas rectangulares ... zadas, las vigas "T", se originan cuando por necesid... enta con un espacio reducido donde la viga no es ca... momento flexionante, por tanto, no hay otra altern... zar la viga con acero en compresión.

Para su solución, es común descompo... tes como se muestra en las figuras 5.27 a 5.30.

Fig. 5.27. Corte transversal de la viga "T", (a).

Fig. 5.28. Corte transversal de la viga rectangular, (b).

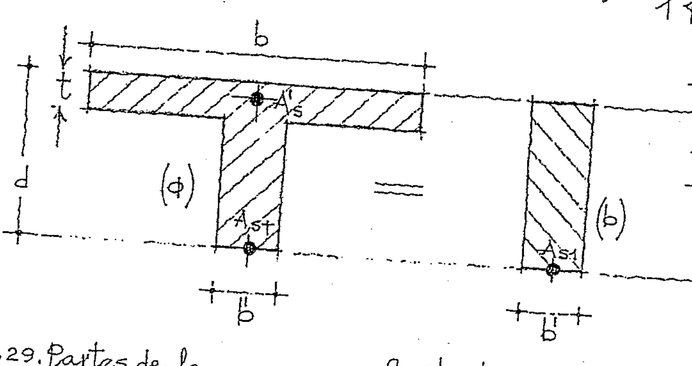


Fig. 5.29. Partes de la losa trabajando en conjunto con la viga "T", (c).

Fig. 5.30. Acero en compresión y en tensión complementaria, (d).

Se ilustra el procedimiento con el ejemplo a continuación.

Ejemplo ilustrativo

Diseñar una estructura destinada a almacenar li... con los datos indicados en las figuras 5.31 y 5.32.

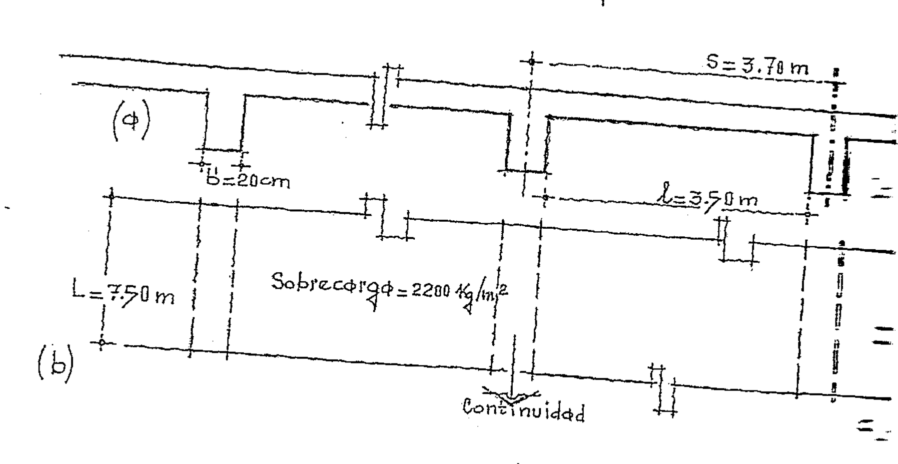
Datos:

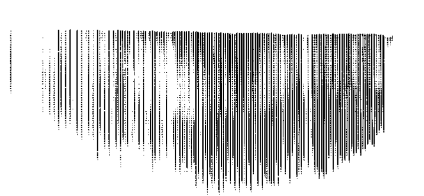
$t = 9$ cm ; $f'_c = 200$ Kg/cm² ; $d = 48$ cm

$b' = 20$ cm ; $f_y = 4200$ Kg/cm² ; $n = 14$

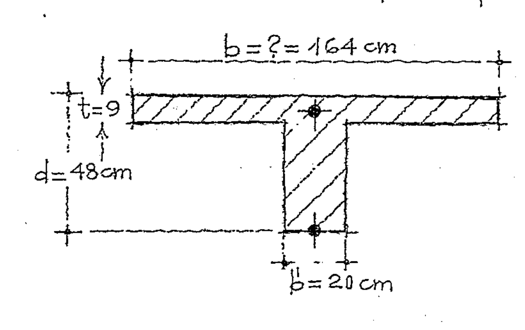
Fig. 5.31. Corte de la viga "T" continua, (a).

Fig. 5.32. Planta del almacén, continuidad en ambos sentidos, (b).





Obtención de cargas; figura 5.33.



...5.33. Dimensiones ... la viga "T". Corte.

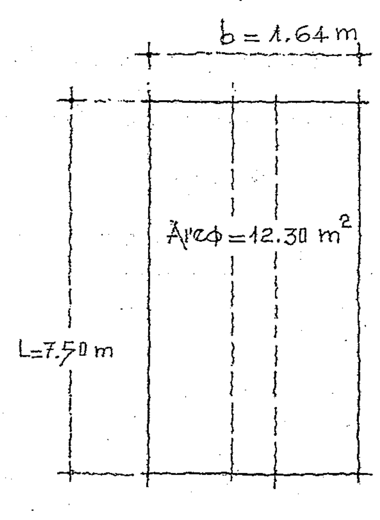
Cálculo del ancho efectivo del patín:

1. $\frac{350}{2} = 175$ cm
2. $\frac{750}{8} - \frac{20}{2} = 83.75 \simeq 84$ cm
3. $8 \times 9 = 72$ cm

Se tomó el valor menor, es decir 72 cm.

Losa de concreto: 0.09×2400 Kg/m^3	= 216 Kg/m^2
Carga viva (supuesta)	= 310 Kg/m^2
Sobrecarga (supuesta)	= 5800 Kg/m^2
	W = 6326 Kg/m^2

En la fig. 5.34, se indica la carga que recibe la viga "T".



...5.34. Area de la ...a "T". Planta.

Peso de la trabe:

$0.20 \times 0.39 \times 7.50 \times 2400 \simeq 1400$ Kg

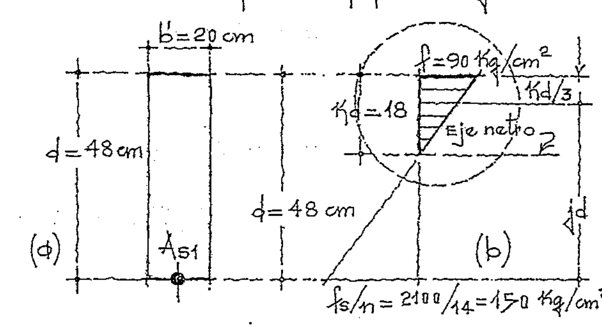
Peso del patín:

$1.64 \times 7.50 \times 6326$ . . . $\simeq 77800$ Kg

Carga por metro lineal

$\frac{1400 + 77800}{7.50} = 10560$ Kg/ml

Cálculo del brazo de palanca seccionando la viga "T", figs. 5.35 y 5.36



...5.35. Viga rectangu... simplemente armada, ...

...5.36. Diagrama de ...igas, (b).

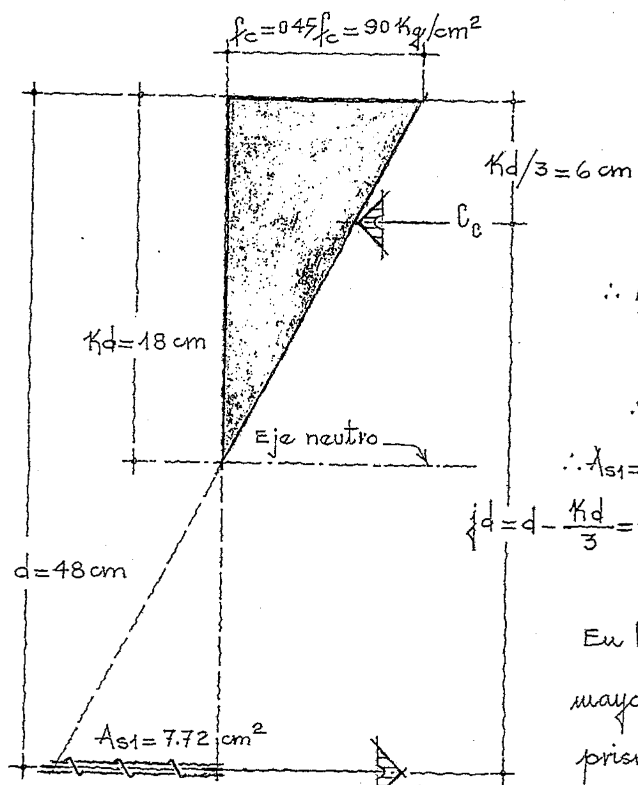
Por comparación de triángulos

$\frac{Kd}{48} = \frac{90 \times 48}{90 + 150}$ ∴ Kd = 18 cm

∴ Kd = 18 cm > t

(La viga es viga "T.")

Fig. 5.37. Prisma triangular de compresión.



Área de acero co[...] simplemente ar[...]

$$M = C\,jd = T\,jd$$

$$\therefore M = 0.5 f_c b' Kd(jd)$$

$$= 0.5 \times 90 \times 20 \times 18 \times 4[...]$$

$$\therefore M = 680400 \text{ Kg-c[...]}$$

$$\therefore A_{s1} = \frac{M}{f_s\,jd} = \frac{680400}{2100 \times 42} \simeq [...]$$

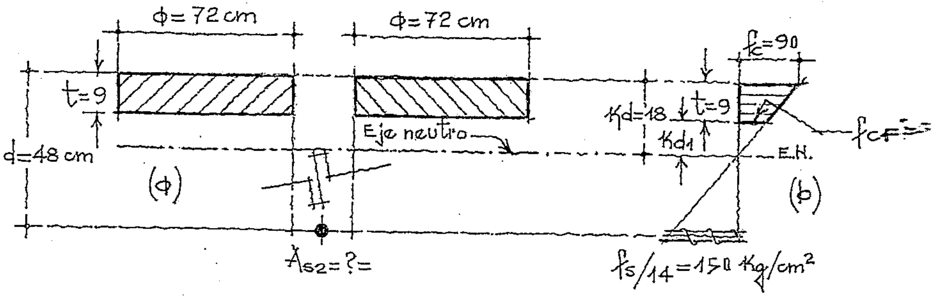
$$jd = d - \frac{Kd}{3} = 48 - \frac{18}{3} = 42 \text{ cm}$$

En la fig. 5.37, se mue[...] mayor escala el volum[...] prisma triangular (com[...]

En los figuras 5.38 y 5.39, se analiza la segunda secc[...] viga (patines de concreto y segunda área de acero), veamos:

Fig. 5.38. Patines de concreto en la zona de compresión, (a).

Fig. 5.39. Diagrama de fatigas, (b).



Posición del centro de compresión, fig. 5.39.

Volumen de los cuños (Fuerzas)	Distancias	M[...]
$(2a)\,t\,f_{c1} = 2 \times 72 \times 9 \times 45 = 58320$ Kg	4.50	≃ 262[...]
$0.5(2a)\,t\,f_{c2}^{*} = 0.5 \times 2 \times 72 \times 9 \times 45 = 29160$ Kg	3.00	87[...]
$C = 87480$ Kg		349[...]

$$z = \frac{M}{C} = \frac{349880}{87480} \simeq 4.00 \text{ cm}$$

* $f_{c2} = f_c - f_{c1} \therefore f_{c2} = 90 - 45 = 45$ Kg/cm².

El brazo de palanca se muestra en la fig. 5.40.

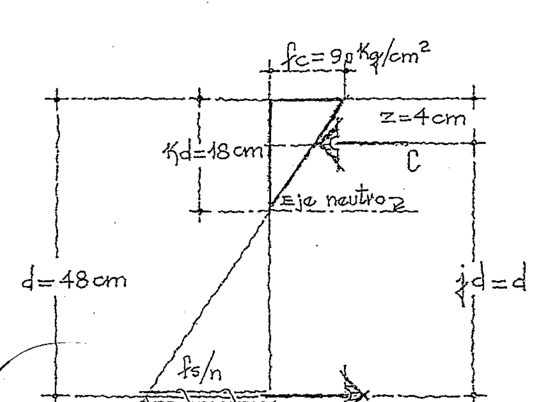


Fig. 5.40. Diagrama de deformación.

$C = T = 87480$ Kg, y

$M = Cjd = 87480 \times 44 \simeq 3849000$ Kgcm

$\therefore A_{s2} = \frac{3849000}{2100 \times 44} \simeq 41.66 \text{ cm}^2$

$jd = d - z = 48 - 4 = 44$ cm

Obtención del momento máximo en la viga, fig. 5.41.

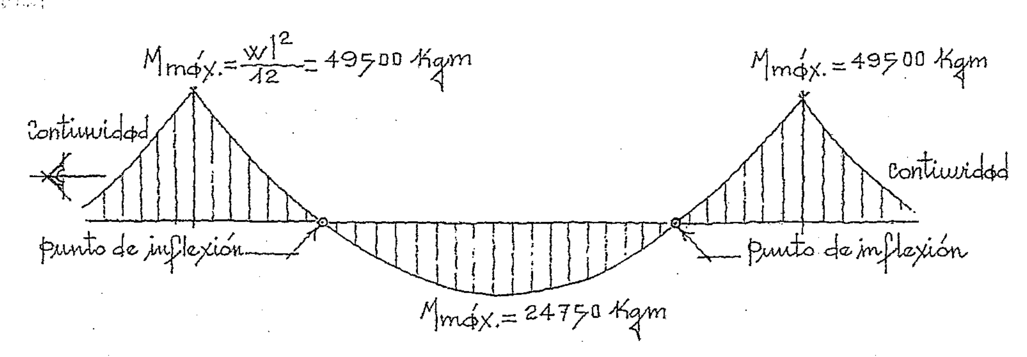


Fig. 5.41. Gráfica de momentos flexionantes.

$M_{máx.} = \frac{wl^2}{12} = \frac{10560 \times 7.50^2}{12} = 49500$ Kgm (extremos de la viga).

$M_{máx.} = \frac{wl^2}{24} = 24750$ Kgm (centro de la viga).

En las figs. 5.42 y 5.43, se analiza la tercera sección de la viga "T" (áreas de acero en compresión y en tensión complementaria), veamos:

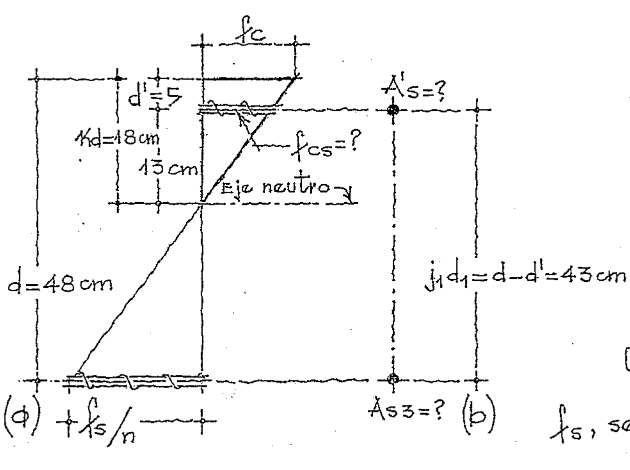


Fig. 5.42. Diagrama de fatigas, (a).

Fig. 5.43. Posición de las áreas de acero, en compresión y en tensión complementaria, (b).

$\frac{f_c}{f_{cs}} = \frac{Kd}{13}$

$f_{cs} = \frac{90 \times 13}{18} = 65 \text{ Kg/cm}^2$

y como $f_{sc} = 2nf_{cs} \leq f_s$

$f_{sc} = 2 \times 14 \times 65 = 1820 \text{ Kg/c}^2$

Como resultó menor que f_s, se toma $f_{sc} = 1820 \text{ Kg/cm}^2$

Momento restante que necesita absorber la tercera sección de la viga "T":

$$M_1 + M_2 = 680400 + 3849000 = 4529400 \text{ Kgcm}$$

$\therefore$ Momento restante $(M_3) = M_{máx.} - (M_1 + M_2)$, por tanto

$$M_3 = 4950000 - 4529400 = 420600 \text{ Kgcm}$$

Cálculo de las áreas de acero en compresión y en tensión complementaria.

Acero en compresión, $A'_s = \dfrac{M_3}{f_{sc}\,(j_1 d_1)} = \dfrac{420600}{1820 \times 43} \simeq 5.38 \text{ cm}^2$

Acero en tensión complementaria, $A_{s3} = \dfrac{M_3}{f_{sc}\,(j_1 d_1)} = \dfrac{420600}{2100 \times 43} \simeq 4.66 \text{ cm}^2$

El armado final se muestra en las figuras 5.44 a 5.47.

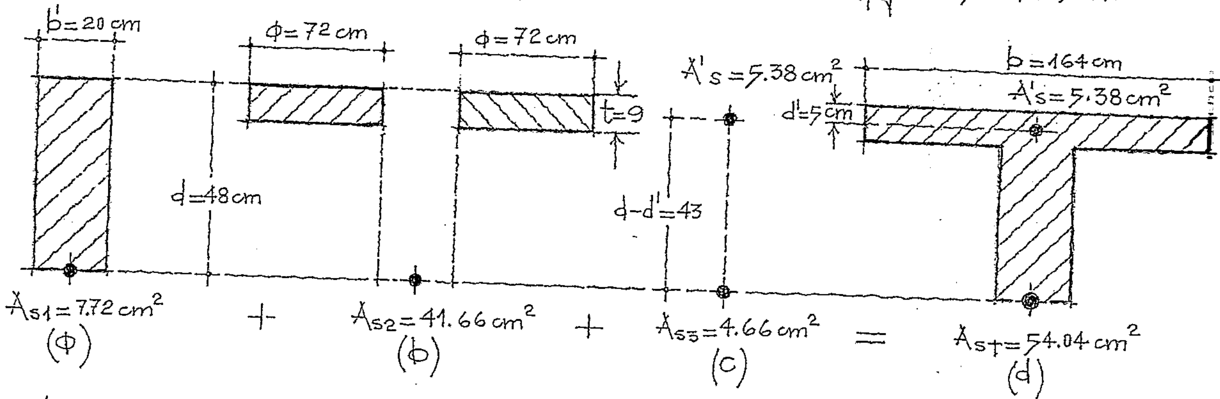


Fig. 5.44. Viga simplemente armada, (a).

Fig. 5.45. Patines de concreto y area de acero en tensión, (b).

Fig. 5.46. Area de acero en compresión y en tensión complementaria, (c).

Fig. 5.47. Viga "T" mostrando su sección de concreto y áreas de acero totales, (d).

La viga requiere de fuerte cantidad de acero, lo que obliga a escoger varillas gruesas y, aun así, seguramente se tendrán que colocar en dos capas. Cuando esto ocurra, recuérdese que la fatiga del acero en el segundo lecho, no podrá trabajar a la misma fatiga que (f_s), y se tiene que hacer la corrección.

A continuación, se analizará una viga en "L", aplicando el diseño elástico.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., considera para las vigas "L", las mismas limitaciones para el ancho del patín que las aplicadas en las vigas "T". Además, se deben tomar otras acciones:

1. El ancho efectivo del patín no será mayor de 1/12 del claro de la viga.
2. Tampoco deberá excederse de seis veces el espesor de la losa, t, más b'.

5.3. Vigas "L" (Teoría Elástica)

Ejemplo ilustrativo

Obténgase la cantidad de acero necesario en la viga "L", para soportar una sobrecarga de 1200 Kg/m²; véanse las figs. 5.48 a 5.50.

S = 3.22 m

a = 1.40 m

Sobrecarga = 1200 Kg/m²

L = 9.10 m

ℓ = 3.00 m

b' = 22 cm   b' = 22 cm

$M = \frac{W a^2}{2}$

$M = \frac{W}{8L^2}(L+a)^2(L-a)^2$

(a)   (b)

Fig. 5.48. Planta, (a).

Fig. 5.49. Gráfica de momentos flexionantes, (b).

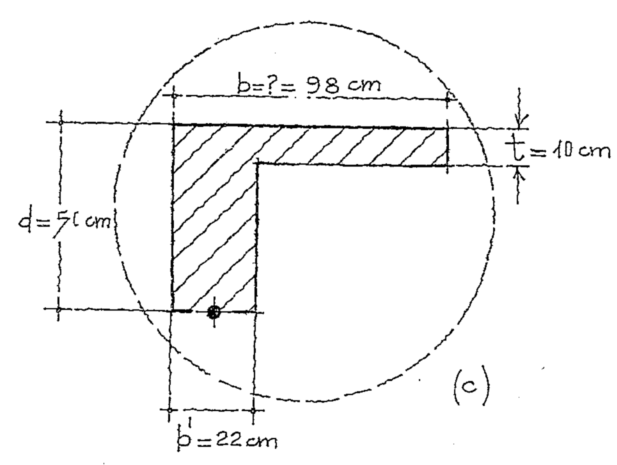


Fig. 5.50. Viga con sus dimensiones, (c).

1. $\frac{3.00\ m}{2} = 1.50\ m.$
2. $\frac{9.10\ m}{8} - \frac{0.22}{2} \simeq 1.03\ m.$
3. $8 \times 0.10 = 0.80\ m$
4. $\frac{9.10\ m}{12} \simeq 0.76\ m.$* (se toma el menor).
5. $6 \times 0.10 + 0.22 = 0.82\ m.$

Datos:

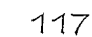
$f'_c = 250\ Kg/cm^2$

$b' = 22\ cm;\ t = 10$

$d = 50\ cm;\ n = 13$

$f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

$A_s = ? = 4\phi_s \# 7$



Obtención de cargas; fig. 5.51.

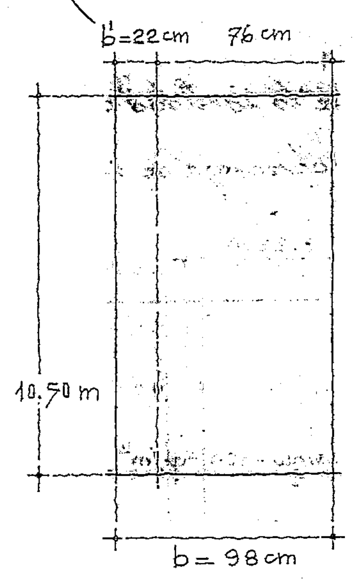


Fig. 5.51. Medidas indicando el ancho y largo de la viga "L".

Losa de concreto $= 0.10 \times 2400\ Kg/m^3 = 240\ Kg/m^2$

Carga viva (supuesta) . . . . $= 200\ Kg/m^2$

Sobrecarga (supuesta) . . . $= 1200\ Kg/m^2$

$W = 1640\ Kg/m^2$

Peso propio de la trabe:

$0.22 \times 0.50 \times 10.50 \times 2400 \simeq 2770\ Kg$

Peso propio del patín:

$0.72 \times 10.50 \times 1640$ . . . $\simeq 12400\ Kg$

Carga por metro lineal

$$\frac{2770 + 12400}{10.50} \simeq 1450\ Kg/ml$$

Cálculo del brazo de palanca (jd):

1. $jd = d - t/2 = 50 - \frac{10}{2} = 45\ cm$

2. $jd = d - t/3 = 50 - \frac{10}{3} \simeq 46.70\ cm$

$\therefore\ \frac{45 + 46.7}{2} = 45.85\ cm$

Cálculo del momento flexionante, fig. 5.49 (b)

$$A_s = \frac{M}{f_s\,jd} = \frac{1431500}{2100 \times 45.85} \simeq 14.87\ cm^2 \qquad M = \frac{W\phi^2}{2} = 2117\ Kgm$$

$$M = \frac{W}{8L^2}(L+\phi)^2(L-\phi)^2 = 14315\ Kgm$$

$b' \cdot Kd\,\frac{Kd}{2} + 76 \times 10\,(Kd - 5) - nA_s\,(50 - Kd) = 0$; . . . hacemos referencia a la fig. 5.52 (c)

$$22\,Kd\,\frac{Kd}{2} + 76 \times 10\,(Kd - 5) - nA_s\,(50 - Kd) = 0$$

$$\frac{22\,Kd^2}{2} + 953\,Kd - 13466 = 0$$

Dividiendo entre 11, se tiene:

$$Kd^2 + 86.6\,Kd - 1224 = 0$$

$$\therefore\ Kd = \frac{-86.6 + \sqrt{(86.6)^2 - 4(-1224)}}{2} \simeq 12.4\ cm$$

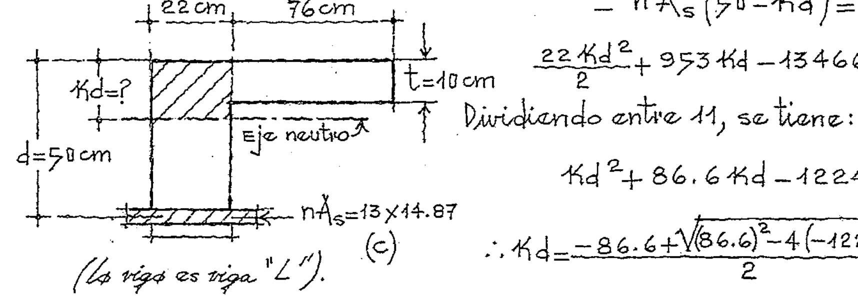


Fig. 5.52. Areas para calcular la viga "L", (c).

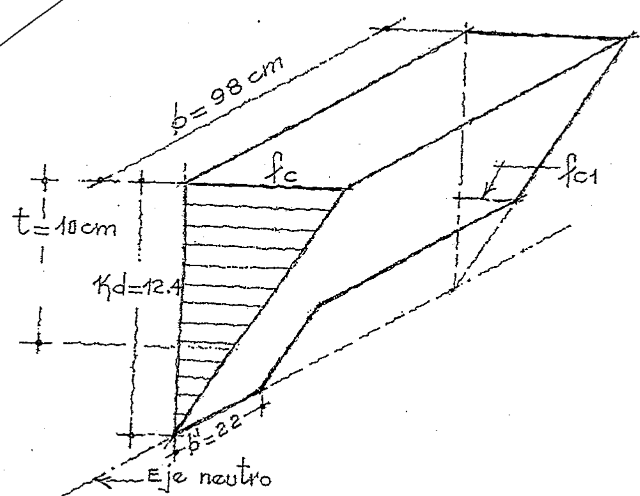


Fig. 5.53. Cuña de esfuerzos en la zona de compresión.

Por comparación de triángulos en la fig. 5.53, obtenemos:

$$\frac{f_c}{12.4} = \frac{f_{c1}}{2.4}$$

$$\therefore f_{c1} = \frac{2.4\, f_c}{12.4} \simeq 0.20\, f_c$$

Posición del centro de compresión

Volumen de los cuños (Fuerzas)	Distancias	Momentos
$0.5 f_c\, b\, Kd = 0.5 f_c \times 98 \times 12.40 = 607.6\, f_c$	4.13	$2512\, f_c$
$-0.5 f_c (b-b')(Kd-t) = -0.5 \times 0.2 f_c \times 76 \times 2.4 = -18.3\, f_c$	10.80	$-198\, f_c$
$C = 589.3\, f_c$		$M = 2314\, f_c$

$$z = \frac{M}{C} = \frac{2315\, f_c}{589.3\, f_c} \simeq 3.93 \text{ cm} \therefore jd = d - z = 46.07 \text{ cm}$$

En la figura 5.54 se muestran los centroides de los prismas triangulares.

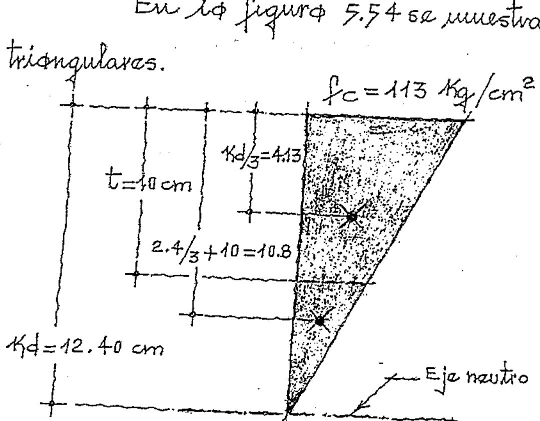


Fig. 5.54. Posición de los centroides en la cuña de esfuerzos.

Cálculo de las áreas de acero

$$A_s(+) = \frac{1431500}{2100 \times 46.07} \simeq 14.80 \text{ cm}^2$$

$$A_s(-) = \frac{211700}{2100 \times 46.07} \simeq 2.19 \text{ cm}^2$$

A continuación se verifica el valor de la fatiga de trabajo del concreto para ver si se encuentra dentro de las condiciones normales de trabajo:

$$M = C\,jd = 589.3\, f_c\,(jd)$$

$$\therefore f_c = \frac{M(+)}{589.3 \times 46.07} = \frac{1431500}{27149} \simeq 53 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore f_c = 0.45 f'_c = 0.45 \times 250 \simeq 113 \text{ Kg/cm}^2 > 53 \text{ Kg/cm}^2$$

5.4. Vigas "T" (Diseño Plástico)

Fig. 5.55. Viga "T", (a).
Fig. 5.56. Diagrama de deformación, (b).

Para que la viga sea realmente viga "T", será necesario que el bloque de esfuerzos con profundidad, a, sea mayor que, t, en caso contrario, la viga "T" será únicamente en apariencia y trabajará como una viga rectangular de ancho, b, y se calculará como tal, véanse las figs. 5.55 a 5.58.

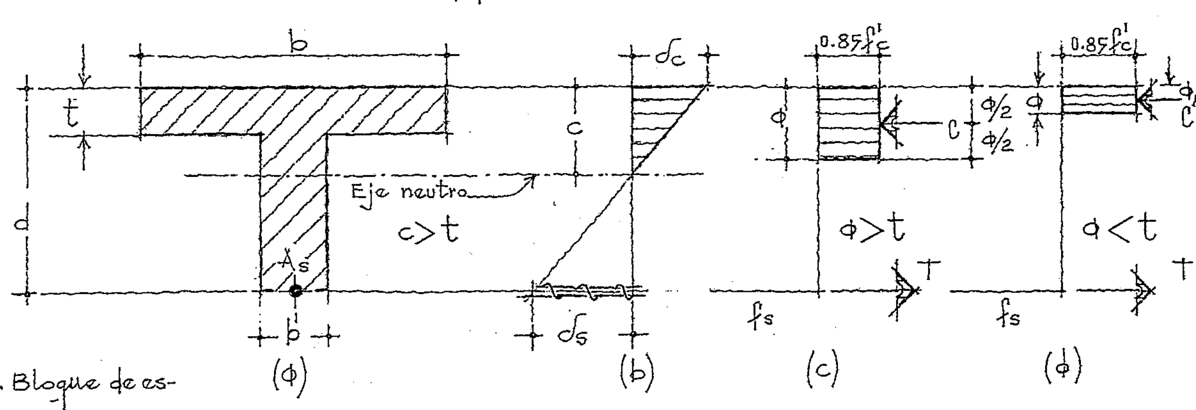


Fig. 5.57. Bloque de esfuerzos, (c).
Fig. 5.58. Bloque de esfuerzos, (d).

El reglamento especifica:

"Cuando la profundidad, a, es mayor que el espesor del patín, t, el momento resistente se obtiene separando la viga T en dos partes; una la que corresponde al concreto del alma en compresión y la otra, la correspondiente al concreto de los salientes del patín, también en compresión. Sumando ambos momentos, se obtiene el momento total en compresión y deberá estar equilibrado con los momentos de la zona de tensión, figs. 5.59 a 5.60

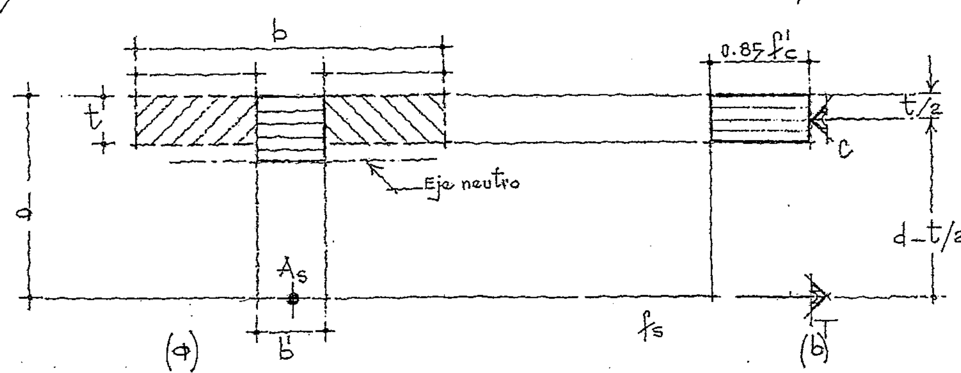
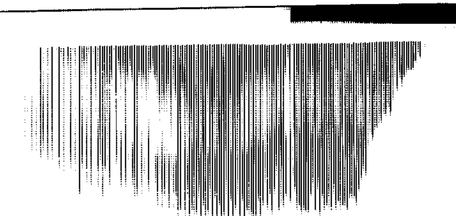


Fig. 5.59. Viga "T", seccionada, (a).
Fig. 5.60. Bloque de esfuerzos, (b).

Cuando el acero en tensión alcanza la cedencia, se tiene que $f_s = f_Y$; bajo esta condición tendremos:

$$C = T \therefore \quad 0.85f'_c a b' + 0.85 f'_c t(b - b') = A_s f_Y$$



donde

$$\phi = \frac{A_s f_Y - 0.85 f'_c (b - b')}{0.85 f'_c b'}$$

Haciendo referencia a las figuras 5.59 y 5.60 y tomando momentos con respecto al centroide del acero en tensión obtenemos; - figs. 5.61 y 5.62.

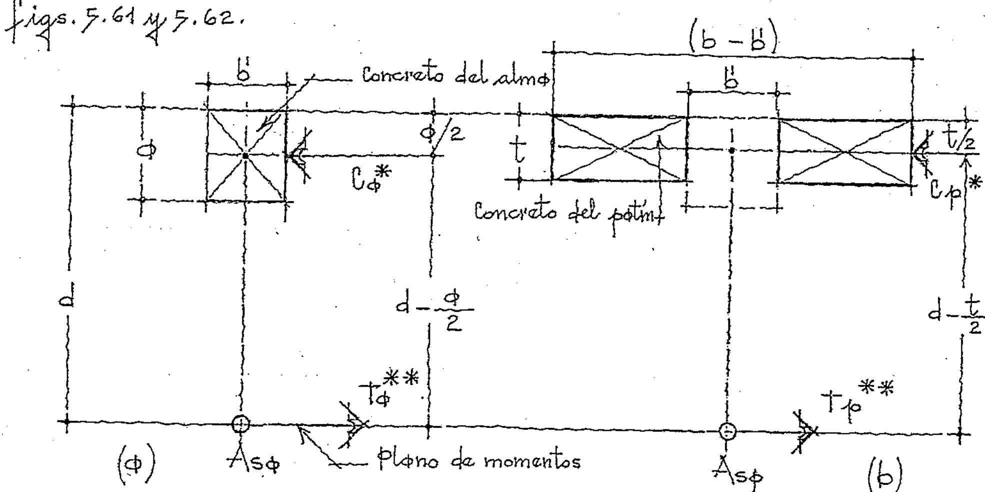


Fig.5.61. Concreto en el alma de la viga, a).

Fig.5.62. Concreto en el patín de la viga, b).

Concreto en el alma de la viga: $M_{C\phi} = C\phi\left(d - \frac{\phi}{2}\right) = 0.85 f'_c \phi b'\left(d - \frac{\phi}{2}\right)$

Concreto en el patín de la viga: $M_{Cp} = Cp\left(d - \frac{t}{2}\right) = 0.85 f'_c t (b - b')\left(d - \frac{t}{2}\right)$

$M_R = F_R\left[0.85 f'_c \phi b'\left(d - \frac{\phi}{2}\right) + 0.85 f'_c t (b - b')\left(d - \frac{t}{2}\right)\right]$; se sumaron ambas ecuaciones y se aplicó el factor de reducción correspondiente (F_R), obteniéndose el valor de la totalidad del concreto en la zona de compresión.

Acero que equilibra al concreto en el alma de la viga:

$$M_{T\phi} = T\phi\left(d - \frac{\phi}{2}\right) = A_{s\phi} f_Y \left(d - \frac{\phi}{2}\right)$$

Acero que equilibra al concreto en el patín de la viga:

$$M_{Tp} = Tp\left(d - \frac{t}{2}\right) = A_{sp} f_Y \left(d - \frac{t}{2}\right)$$

Sumando ambas ecuaciones y aplicando el factor de reducción correspondiente (F_R), se obtiene el momento resistente de todo el acero en la zona de tensión.

$$M_R = F_R\left[(A_s - A_{sp}) f_Y \left(d - \frac{\phi}{2}\right) + A_{sp} f_Y \left(d - \frac{t}{2}\right)\right]$$

---

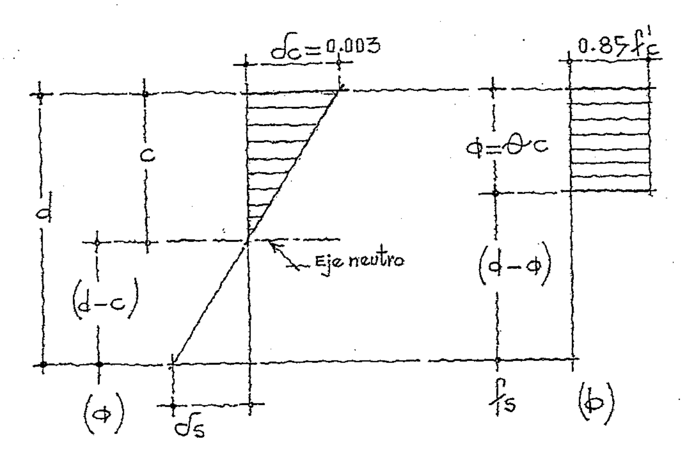
* $C\phi$ y Cp, resultante de compresión en el alma y en el patín de la viga.

** $T\phi$ y Tp, resultante de tensión en el alma y en el patín de la viga.

Para que el acero a tensión fluya será necesario qu

figs. 5.63 y 5.64.

Fig. 5.63. Diagrama de deformación, (a).
Fig. 5.64. Bloque de esfuerzos, (b).



Por comparación de triángulos, obtenemos:

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_s}{d-c} \quad \therefore \quad \delta_s = \delta_c \frac{d-c}{c} = 0.003\,\frac{d-c}{c} \geq \frac{f_Y}{E_s}$$

y,

cuando el acero en tensión no se encuentra fluyendo, e

ces, se tiene

$$f_s = \delta_s E_s = \delta_c \frac{\theta d - a}{a} E_s$$

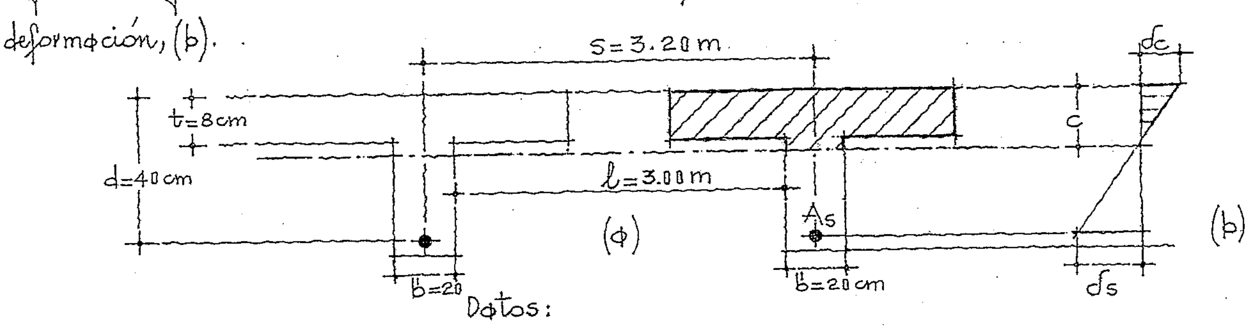
A continuación, se presentan unos ejemplos ilustrativos

ya solución pretende dar mayor claridad a su comprensión.

Ejemplo ilustrativo

Fig. 5.65. Viga "T", (a).
Fig. 5.66. Diagrama de deformación, (b).

Calcular el momento resistente de una estructura a base de "T" sometida a flexión, figs. 5.65.

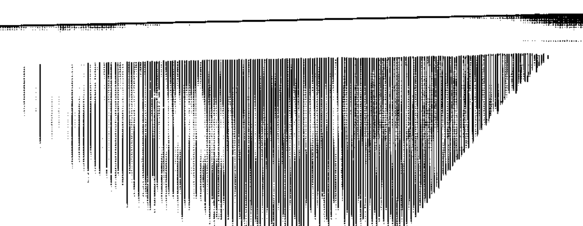


Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_Y = 4200\ Kg/cm^2$; $d = 40\ cm$; $b' = 20\ cm$

$L = 7.70\ m$; $n = 14$

$t = 8\ cm$ $\qquad A_s = 6\phi\#10 = 47.64\ cm^2$



Cálculo del ancho efectivo de la viga "T".

1. $\frac{380}{2} = 190$ cm

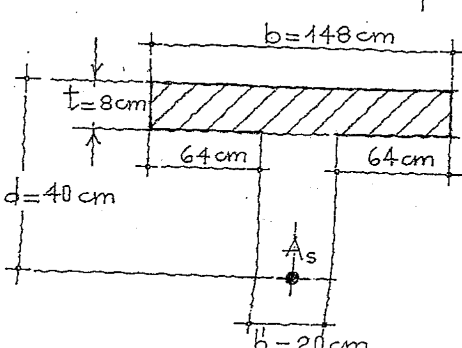
2. $\frac{770}{8} \simeq 96$ cm $- \frac{20}{2} = 86$ cm

3. $8 \times 8 = 64$ cm

Y también

$$\frac{L}{4} = \frac{770}{4} \simeq 192 \text{ cm} > 64 \text{ cm}$$

De acuerdo con la especificación, se tiene; fig. 5.67.



$b = 2 \times 64 + 20 = 148$ cm

5.67. Patín de la "T".

Como se desconoce si la viga es viga "T", se calculará primero el valor de la compresión únicamente en el patín y se comprueba con la tensión. Si la tensión resulta mayor que el valor de Cp (compresión en el patín), la viga será "T"; en efecto, cuando esto sucede, la viga requiere más área de concreto en la zona de compresión para equilibrar la tensión, veamos:

Suponiendo que el acero en tensión fluye, se tiene, $f_s = f_Y$

Valor de la compresión en el patín, fig. 5.67

$$C_p = 0.85 f'_c t (b - b') = 0.85 \times 200 \times 8 (148 - 20) \simeq 174000 \text{ Kg cm}$$

Valor de la tensión

$$T = A_s f_Y = 47.64 \times 4200 \simeq 200000 \text{ Kg cm}$$

Como $T > C_p$, la viga se calculará como viga "T".

Por necesidad de equilibrio

$$C_a + C_p = A_s f_Y$$

$$C_a = 0.85 f'_c a b' \quad \text{y} \quad C_p = 0.85 f'_c t (b - b')$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$0.85 f'_c a b' + 0.85 f'_c t (b - b') = A_s f_Y$, y dando valores

$$0.85 \times 200 \times 20 (a) + 0.85 \times 200 \times 8 (148 - 20) = 200\,000 \text{ Kgcm}$$

$$3400\, a + 174000 = 200\,000$$

$$\therefore a = \frac{200\,000 - 174000}{3400} \simeq 7.65 \text{ cm}$$

y como $a = \theta c$ $\quad \therefore c = \frac{a}{\theta} = \frac{7.65}{0.80} \simeq 9.56 \text{ cm}$

El acero en tensión fluye cuando $\delta_s \geq \frac{f_Y}{E_S} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$

Por comparación de triángulos en la fig. 5.68.

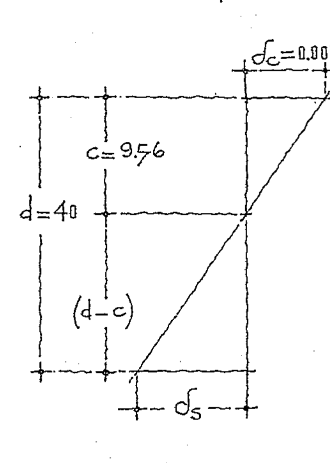


Fig. 5.68. Diagrama de deformación.

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_s}{d - c} \quad \therefore \delta_s = \delta_c \frac{d - c}{c}$$

$$0.003 \frac{40 - 9.56}{9.56} \simeq 0.0096$$

Por tanto

$0.0096 > 0.0021$ (el acero en tensión fluye como se supuso).

Para equilibrar al concreto en el patín, se necesita una área de acero de; fig. 5.69.

$$f_Y A_{sp} = 174000 \quad \therefore \quad A_{sp} = \frac{174000}{4200} \simeq 41.43 \text{ cm}^2$$

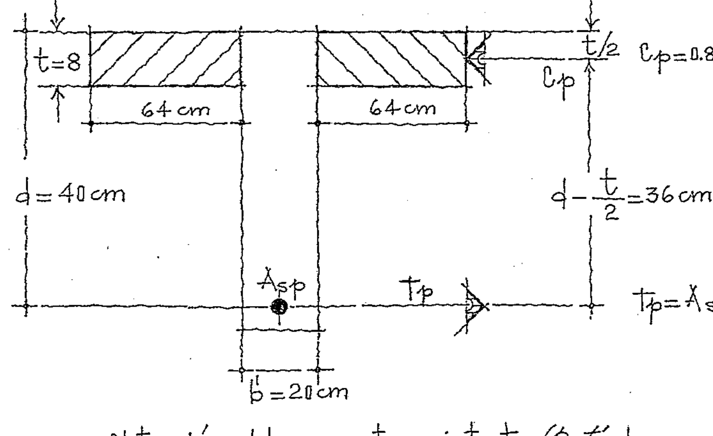
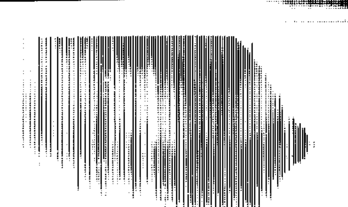


Fig. 5.69. Valor del concreto en el patín de la viga "T."

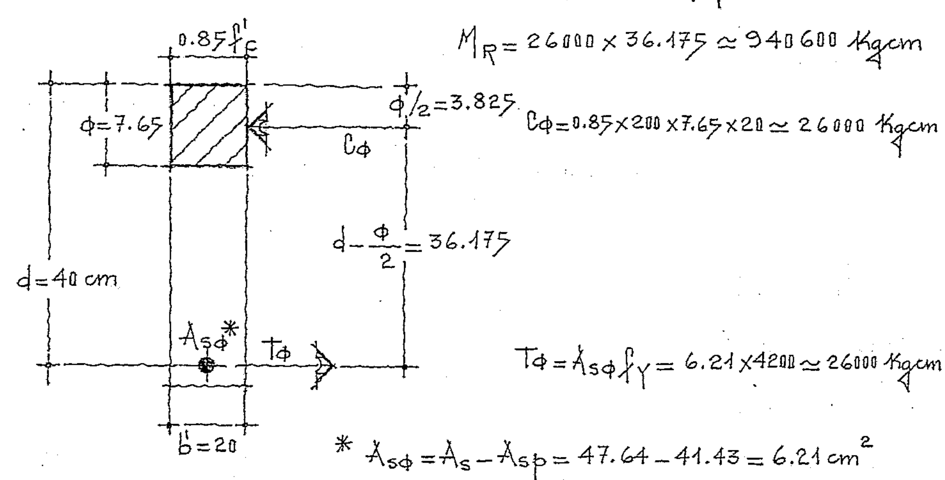
Obtención del momento resistente (Patín)

$$M_R = 174\,000 \times 36 = 6\,264\,000 \text{ Kg/cm}$$



Obtención del momento resistente (Alma), fig. 5.70.

Fig. 5.70. Valor del concreto en el alma de la viga "T".



$M_R = 26000 \times 36.175 \simeq 940600$ Kgcm

$C_\phi = 0.85 \times 200 \times 7.65 \times 20 \simeq 26000$ Kgcm

$T_\phi = A_{s\phi} f_Y = 6.21 \times 4200 \simeq 26000$ Kgcm

$* \; A_{s\phi} = A_s - A_{sp} = 47.64 - 41.43 = 6.21 \text{ cm}^2$

Cálculo del momento resistente último (M_{UR})

$$M_{UR} = F_R\left[(A_s - A_{sp}) f_Y \left(d - \frac{\phi}{2}\right) + A_{sp} f_Y \left(d - \frac{t}{2}\right)\right]$$, y dando valores

$$M_{UR} = 0.90\left[(47.64 - 41.43)\, 4200 \left(40 - \frac{7.65}{2}\right) + 41.43 \times 4200 \left(40 - \frac{8}{2}\right)\right]$$

Efectuando operaciones, se obtiene:

$$0.90\,[940600 + 6264000] \simeq 6484000 \text{ Kgcm}$$

Sumando los momentos obtenidos en las figuras 5.69 y 5.70 y aplicando el factor de reducción, se tendrá el valor del momento resistente último, figuras 5.71 a 5.74.

Fig. 5.71. Valor del concreto en el patín, (a).

Fig. 5.72. Valor del concreto en el alma, (b).

Fig. 5.73. Viga "T", final (c).

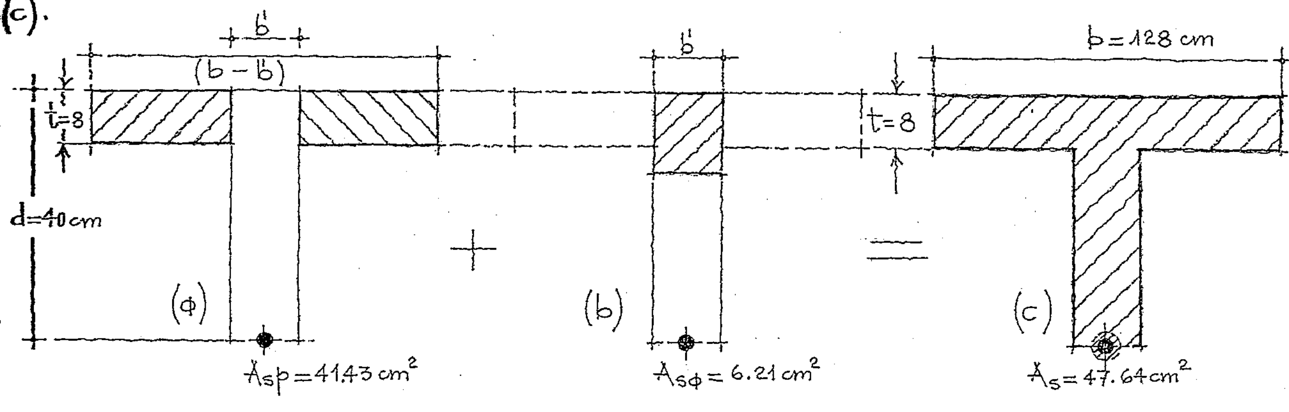
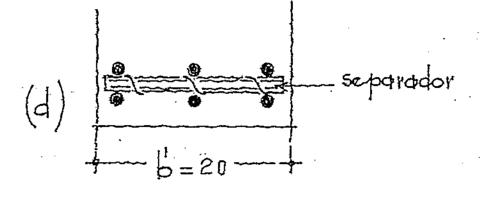
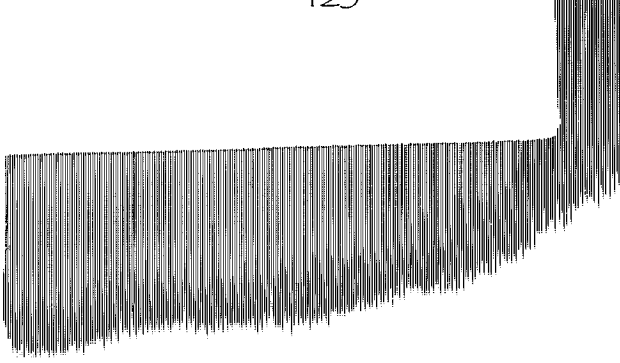


Fig. 5.74. Colocación del acero en la viga "T", (d).





3 ϕ#10 = 3 x 3.18 = 9.54 cm

4 espacios x 2.5 = 10.00 cm

20 cm > 19.54 cm

Viga "T" (Diseño Plástico)

Ejemplo ilustrativo

Se desea construir a base de vigas "T" de concreto armado, un salón destinado a reuniones. La estructura presenta un claro libre de 8.70 m.

En las figs. 5.75 a 5.78, aparecen las condiciones del problema.

Fig. 5.75. Planta del salón de reuniones, (a).

Fig. 5.76. Gráficos de cortantes y de momentos flexionantes, (b).

Datos:

$d = 35$ cm ; $t = 8$ cm ; $f'_c = 200$ Kg/cm^2

$b' = 22$ cm ; $f_Y = 4200$ Kg/cm^2

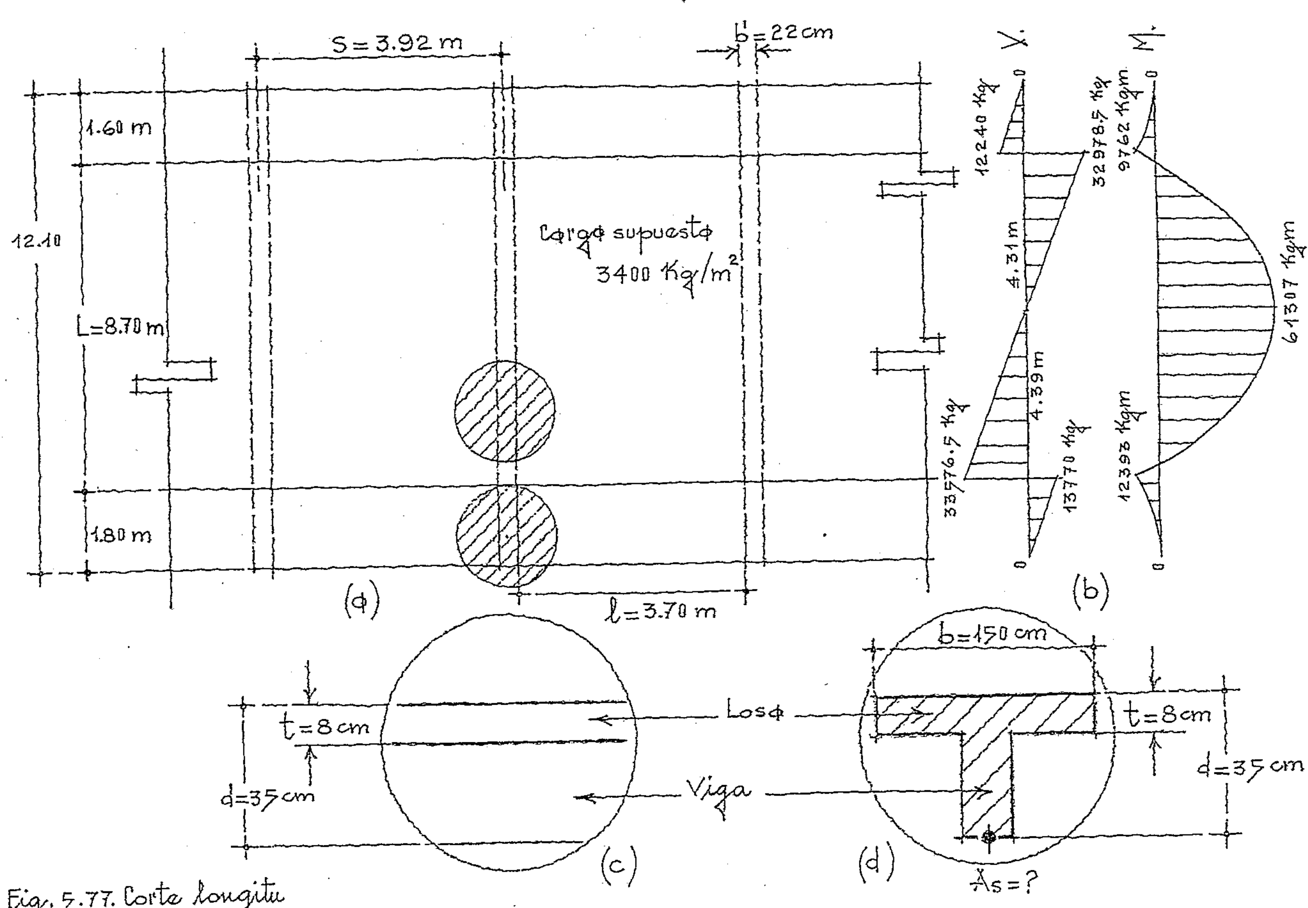


Fig. 5.77. Corte longitudinal, (c).

Fig. 5.78. Corte transversal, (d).

Ancho efectivo del patín:

1. $\frac{l}{2} = \frac{370}{2} = 185$ cm ; 2. $\frac{L}{8} - \frac{b'}{2} = \frac{870}{8} - \frac{22}{2} = 97.75$ cm ; 3. $8t = 8 \times 8 = 64$ cm

Además, b, no excederá de $\frac{L}{4} = \frac{870}{4} = 217.5$ cm $\therefore$ $b < \frac{L}{4}$



Carga sobre la viga "T"

Aplicando el factor de carga correspondiente, se obtiene:

$$W = 3400 \times 1.5 = 5100 \ Kg/m^2$$

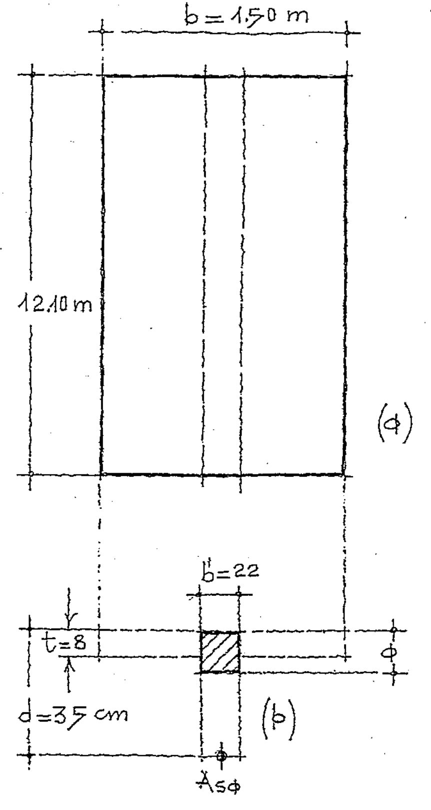


Fig. 5.79. Carga que actúa sobre la viga "T", (a).

Carga sobre la viga; fig. 5.79 (a)

$$92565 \div 12.10 = 7650 \ Kg/ml$$

Fig. 5.80. Concreto en el alma de la viga, (b).

Valor de la compresión en el concreto del alma, fig. 5.80

$$C_a = 0.85 f'_c a b' = 0.85 \times 200 \times 22 (a) = 3740a$$

64 cm   64 cm

t = 8

d = 35 cm

(c)

Asp

Fig. 5.81. Concreto en el patín de la viga, (c).

Valor de la compresión en el concreto del patín, fig. 5.81

$$C_p = 0.85 f'_c t (b - b') = 0.85 \times 200 \times 8 (128)$$

$$\simeq 174000 \ Kgcm$$

Carga en la viga, fig. 5.82

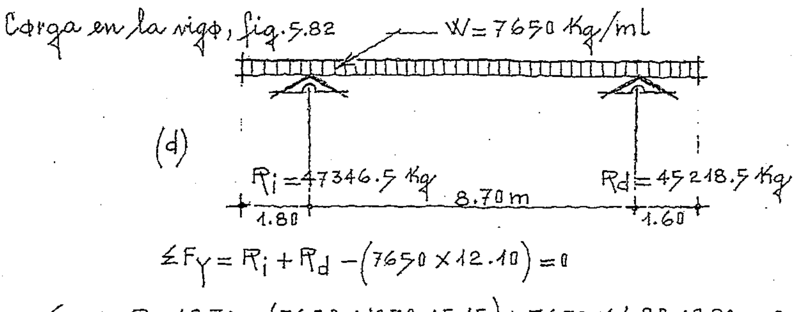


Fig. 5.82. Carga sobre metro lineal en la viga "T", (d).

$$\Sigma F_Y = R_i + R_d - (7650 \times 12.10) = 0$$

$$\Sigma M_i = R_d \times 8.70 - (7650 \times 10.30 \times 5.15) + 7650 \times 1.80 \times 0.90 = 0$$

$$\therefore R_d = \frac{405794 - 12393}{8.70} = 45218.5 \ Kg \quad y \quad R_i = 47346.5 \ Kg$$

La gráfica de momentos flexionantes presenta un momento máximo de 61307 Kgm; con este valor y aplicando las ecuaciones que dan la compresión en el alma y en el patín, se obtiene:

$$M_{UR} = F_R\left[(C_a)(d-0.5a) + C_p\left(d-\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$= 0.90\left[(3740\,a)(35-0.5\,a) + 174000\left(35-\frac{8}{2}\right)\right]$$

$$= 0.90\left(130900\,a - 1870\,a^2 + 6090000 - 696000\right)$$

$$= 0.90\left(130900\,a - 1870\,a^2 + 5394000\right)$$

$$6130700 = 117810\,a - 1683\,a^2 + 4854600$$

Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 1683, se tiene

$$a^2 - 70\,a + 758 = 0$$

$$\therefore a = \frac{(-)-70 \pm \sqrt{(70)^2 - 4(758)}}{2} = \frac{70 \pm 43.22}{2}$$

$$a \simeq 13.40 \text{ cm}$$

Como la profundidad del bloque, $a > t$, la viga es viga "T" y deberá calcularse como tal.

A continuación se calculan las áreas de acero que equilibran al concreto en el alma y en el patín de la viga, veamos: ($f_s = f_Y$)

$$A_{sa} f_Y = 0.85 f'_c\, a\, b'$$

$$\therefore A_{sa} = \frac{50116}{4200} = 11.93 \text{ cm}^2$$ (acero que equilibra el concreto en el alma)

$$A_{sp} f_Y = 0.85 f'_c\, t\,(b-b')$$

$$\therefore A_{sp} = \frac{174000}{4200} \simeq 41.43 \text{ cm}^2$$ (acero que equilibra el concreto en el patín)

En el ejemplo se supuso que el acero en la zona de tensión fluye, por tanto, será necesario verificar si el acero alcanza la cedencia.

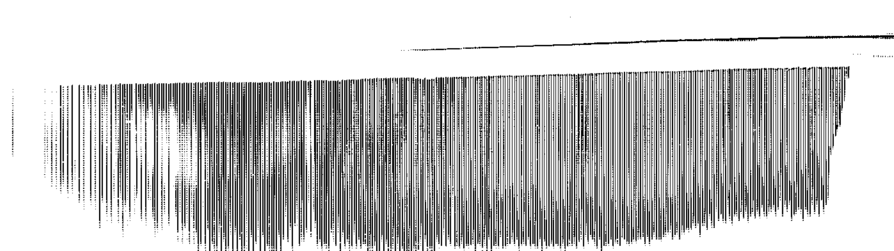
Se cumple cuando $\delta_s \geq \frac{f_Y}{E_s}$

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_s}{d-c} \quad \therefore \delta_s = \delta_c\,\frac{d-c}{c}, \quad y \quad c = \frac{a}{\beta} = \frac{13.40}{0.80} = 16.75 \text{ cm}$$

$$\delta_s = 0.003\,\frac{35-16.75}{16.75} \simeq 0.0032$$

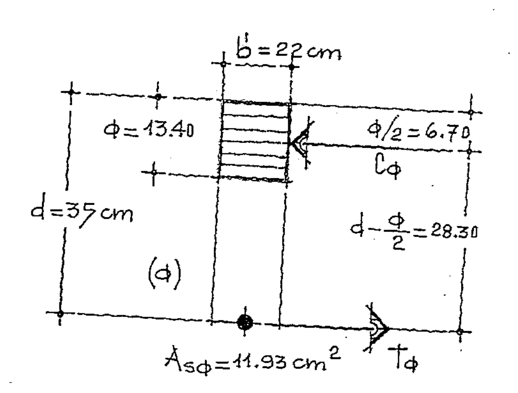
$$y, \quad \frac{f_Y}{E_s} = \frac{4200}{2000000} = 0.0021 \quad \therefore \delta_s > 0.0021$$

(el acero fluye como se supuso)



Finalmente la viga "T" queda como se muestra en las figs. 5.83 a 5.84.

[illegible] 5.83 Concreto en el [illegible] a la viga, (a).

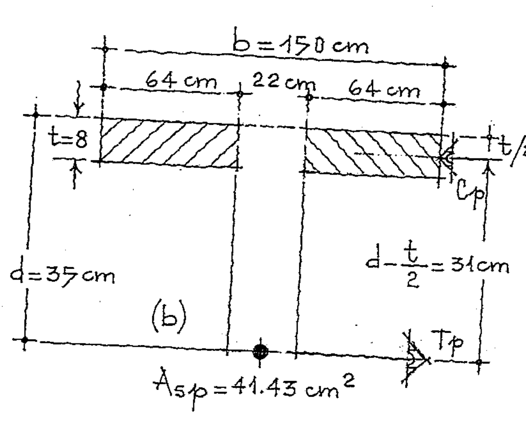


$C_a = 0.85 f'_c\, a\, b' = 50116$ Kg

$\therefore$ Momento $= 50116 \times 28.30 \simeq 1418000$ Kgc

$T_a = A_{sa} f_Y = 50106$ Kg

[illegible] 5.84 Concreto en el [illegible] a viga, (b).



$C_p = 0.85 f'_c\, t\,(b - b') = 174000$ Kg

$\therefore$ Momento $= 174000 \times 31 = 5394000$ Kgcm

$T_p = A_{sp} f_Y = 174006$ Kg

Sumando ambos momentos, obtenemos:

$$
\begin{array}{r}
1418000 \text{ Kgcm} \\
+\ 5394000 \text{ Kgcm} \\
\hline
6812000 \text{ Kgcm}
\end{array}
$$

Y aplicando a dicha suma el factor de reducción, obtenemos el valor de

$$6812000\,(0.90) = 6130800 \text{ Kgcm}$$

Valor prácticamente idéntico al obtenido de 6130700 Kgcm

Viga "L" (Diseño Plástico)

Ejemplo ilustrativo

Calcular la viga "L" en la estructura de un estacionamiento; en ella intervienen únicamente acciones permanentes y variables. En las figs. 5.85 a 5.88.

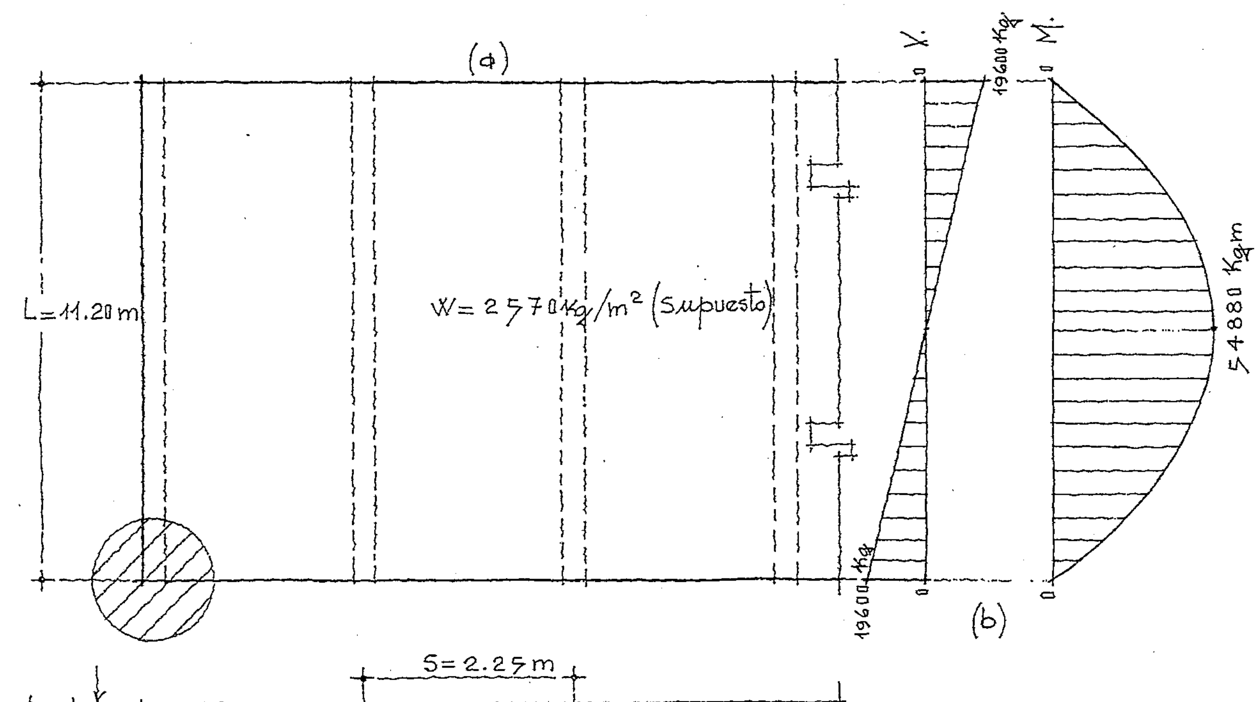
Fig. 5.85. Planta del estacionamiento, (a).

Fig. 5.86. Gráfico de momentos y cortantes, (b).

Datos:

$d = 40$ cm ; $f'_c = 200$ Kg/cm² ; $f_Y = 4200$ Kg/cm²

$d' = 25$ cm ; $t = 9$ cm ; $F_c = 1.4$



S=2.25 m

t=9

d=40

(c)

$l = 2.00$ m

Fig. 5.87. Corte transversal de la estructura, (c).

b= 97 cm

t=9cm

d=40cm

As

72 cm

d'=25cm

(d)

Fig. 5.88. Viga "L", (d).

Ancho efectivo del patín a compresión:

1. $\frac{L}{8} - \frac{b'}{2} = \frac{11.20}{8} - \frac{25}{2} = 0.975$ m

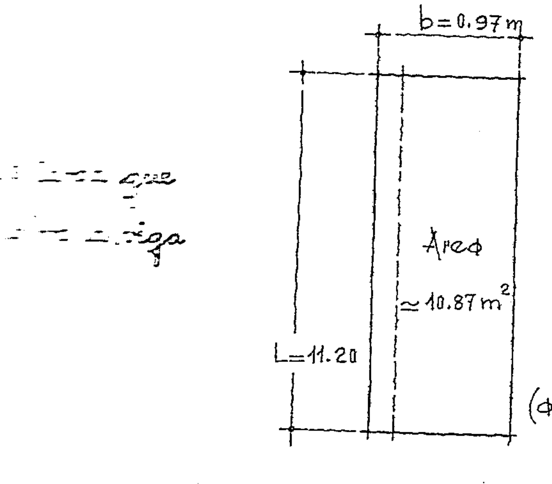
2. $\frac{l}{2} = \frac{2.00}{2} = 1.00$ m ; 3. $8(t) = 8 \times 9 = 0.72$ m *

Además:

$\frac{L}{12} = \frac{11.20}{12} \simeq 0.94$ m ; $6(t) + b' = 6 \times 9 + 25 = 0.79$ m

* Se tomará la menor.

Carga sobre la viga "L", fig. 5.89.



Aplicando el factor de carga:

$2570 \times 1.4 \simeq 3600 \text{ Kg/m}^2$

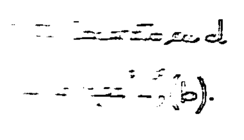
$\therefore 3600 \times 10.87 = 39132 \div 11.20 \simeq 3500 \text{ Kg/ml}$

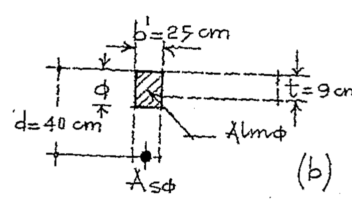
Obtención del momento máximo

$$M_{máx.} = \frac{wL^2}{8} = \frac{3500 \times 11.20^2}{8} = 54880 \text{ Kgm}$$

Valor de la compresión en el concreto del alma, figura 5.90

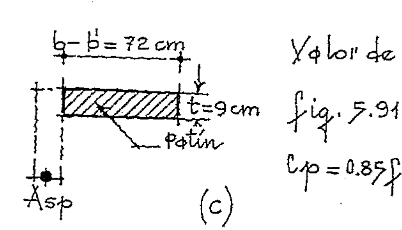
$$C_a = 0.85 f'_c a b' = 0.85 \times 200 \times 25 (a) = 4250\, a$$



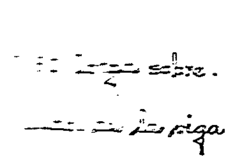


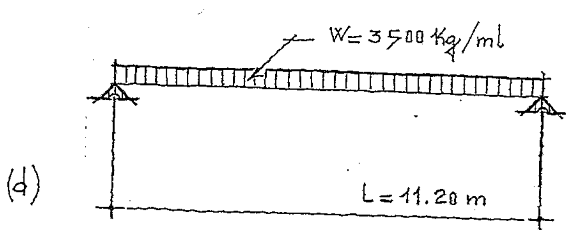
Valor de la compresión en el concreto del patín, fig. 5.91

$$C_p = 0.85 f'_c t (b - b') = 0.85 \times 200 \times 9 \times 72 \simeq 110000 \text{ Kgcm}$$



Obtención de las reacciones (R_i y R_d) en la viga "L", fig. 5.92.





Por simetría:

$$R_i = R_d = \frac{3500 \times 11.20}{2} = 19600 \text{ Kg}$$

$$\Sigma M_i = R_d \times 11.20 - 3500 \times 11.20 \times 5.60 = 0$$

$$\therefore R_d = \frac{219520}{11.20} = 19600 \text{ Kg} \ (\text{correcto})$$

El momento máximo se obtiene de la gráfica de cortantes.

Obtención de la profundidad del bloque, a:

$$M_{UR} = \left[(Ca)(d-0.5a) + Cp\left(d-\frac{t}{2}\right)\right] F_R$$

$$= 0.90\left[(4250\,a)(40-0.5a) + 110000\left(40-\frac{9}{2}\right)\right]$$

$$= 0.90\left(170000\,a - 2125\,a^2 + 4400000 - 495000\right)$$

$$= 0.90\left(170000\,a - 2125\,a^2 + 3905000\right)$$

$$\therefore\ 5488000 = 153000\,a - 1912.5\,a^2 + 3514500 \quad y$$

dividiendo todos los términos de la ecuación entre 1912.5, se tiene

$$a^2 - 80a + 1032 = 0$$

$$\therefore\ a = \frac{80 - \sqrt{(80)^2 - 4(1032)}}{2} = \frac{80 - 47.66}{2} = 16.17 \text{ cm}$$

Como $a > t$, la viga es viga "L" y, se calculará como tal.

Cálculo de las áreas de acero que equilibran al concreto en el alma y en el patín de la viga.

Se supone que el acero en la zona de tensión fluye, es decir, $f_s = f_Y$, veamos:

$$A_{sa} f_Y = 0.85 f'_c\, a\, b'$$

$$\therefore\ A_{sa} = \frac{68723}{4200} = 16.36 \text{ cm}^2$$ (acero que equilibra al concreto en el alma).

$$A_{sp} f_Y = 0.85 f'_c\, t\,(b-b')$$

$$\therefore\ A_{sp} = \frac{110000}{4200} = 26.19 \text{ cm}^2$$ (acero que equilibra al concreto en el patín).

Veamos si el acero alcanza la cedencia:

Cede cuando $\delta_s \geq \frac{f_Y}{E_s}$

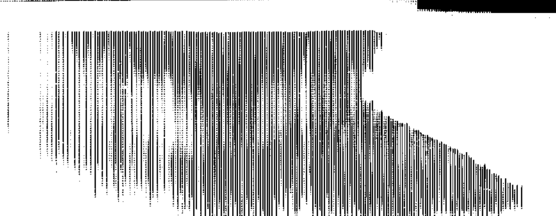
$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_s}{d-c}\ \therefore\ \delta_s = \delta_c\,\frac{d-c}{c}, \quad y \quad c = \frac{a}{\beta} = \frac{16.36}{0.80} = 20.45 \text{ cm}$$

$$\delta_s = 0.003\,\frac{40-20.45}{20.45} \simeq 0.0029$$

$$y, \quad \frac{f_Y}{E_s} = \frac{4200}{2000000} = 0.0021 \quad \therefore\ \delta_s > 0.0021$$

(el acero fluye como se supuso)

Cuando el acero en tensión no alcanza la fluencia, se substituye, f_Y, en las ecuaciones por: $f_s = \delta_c\,\frac{d\beta - a}{a}\,E_s$, y se vuelve a calcular.



Finalmente la viga "L" queda como se muestra en las figuras 5.93 y 5.94.

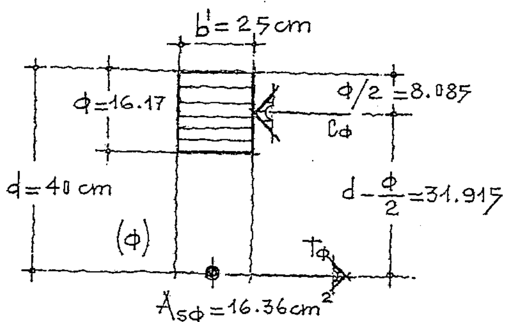
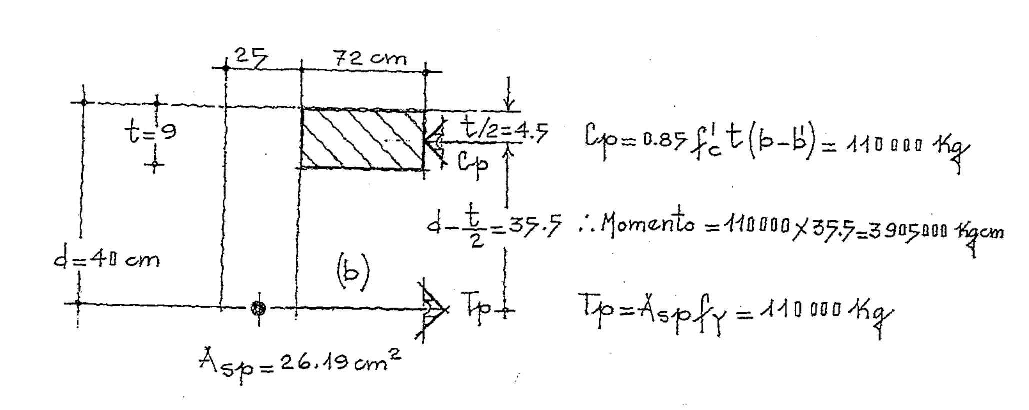


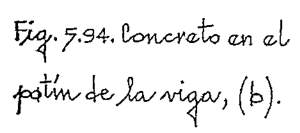
Fig. 5.93. Concreto en el alma de la viga, (φ).

$C_\phi = 0.85 f'_c \phi b' = 68723$ Kg

$\therefore$ Momento $= 68723 \times 31.915 \simeq 2193000$ Kgc

$T_\phi = A_{s\phi} f_Y = 68712$ Kg




Fig. 5.94. Concreto en el patín de la viga, (b).

$C_p = 0.85 f'_c t (b - b') = 110000$ Kg

$\therefore$ Momento $= 110000 \times 35.5 = 3905000$ Kgcm

$T_p = A_{sp} f_Y = 110000$ Kg

Sumando ambos momentos, se tiene:

$$\begin{array}{r} 2193000 \text{ Kgcm} \\ + \quad 3905000 \text{ Kgcm} \\ \hline 6098000 \text{ Kgcm} \end{array}$$

Aplicando a dicha suma el factor de reducción (F_R), obtenemos:

$$6098000\,(0.90) = 5488200 \text{ Kgcm}$$

En la gráfica de momentos flexionantes se obtuve (5488000 Kgcm) valores ambos prácticamente iguales.

Referencias bibliográficas

Capítulo 5

ACI Committee 318, "*Building Code Requeriments for Reinforced Concrete (ACI 318-71) American Concrete Institute*," Detroit, 1971.

"*Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado*," ACI 318-83, México, 1984.

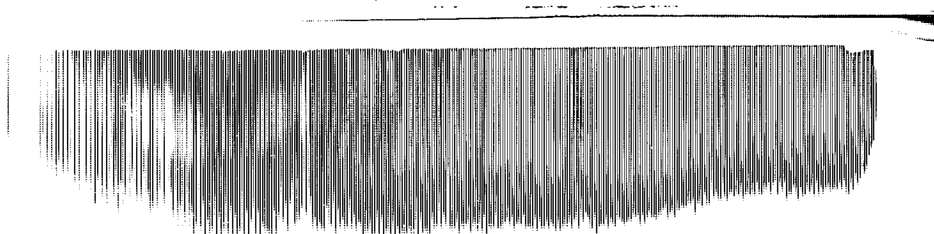
SP-43 American Concrete Institute, "*Deflections of Concrete Structures*," Detroit, 1974.

Ferguson, M. Phil, "*Teoría Elemental del Concreto Reforzado*," México, 1965.

Parker, Harry, "*Diseño Simplificado de Concreto Reforzado*," Limusa, México, 1982.

"*Normas técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*," México, 1988

Park, R. y Paulay, T. "*Estructuras de Concreto Reforzado*", Limusa 1979.



6

COLUMNAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL

6.1. Generalidades

Una columna la definimos como un elemento estructural, generalmente aislado donde actúan fuerzas longitudinales apreciables.

Para su estudio las clasificamos dependiendo de:

a) La carga

b) Su longitud

c) Su armado

a) *Atendiendo a la carga.* La columna se puede encontrar cargada axial o excéntricamente, figs. 6.1 y 6.2, sin embargo, las columnas con carga axial, son en la práctica, poco probables. En efecto, una columna casi siempre se encuentra expuesta a alguna flexión, ya sea por las cargas que recibe de vigas y losas o también por la continuidad en la estructura.

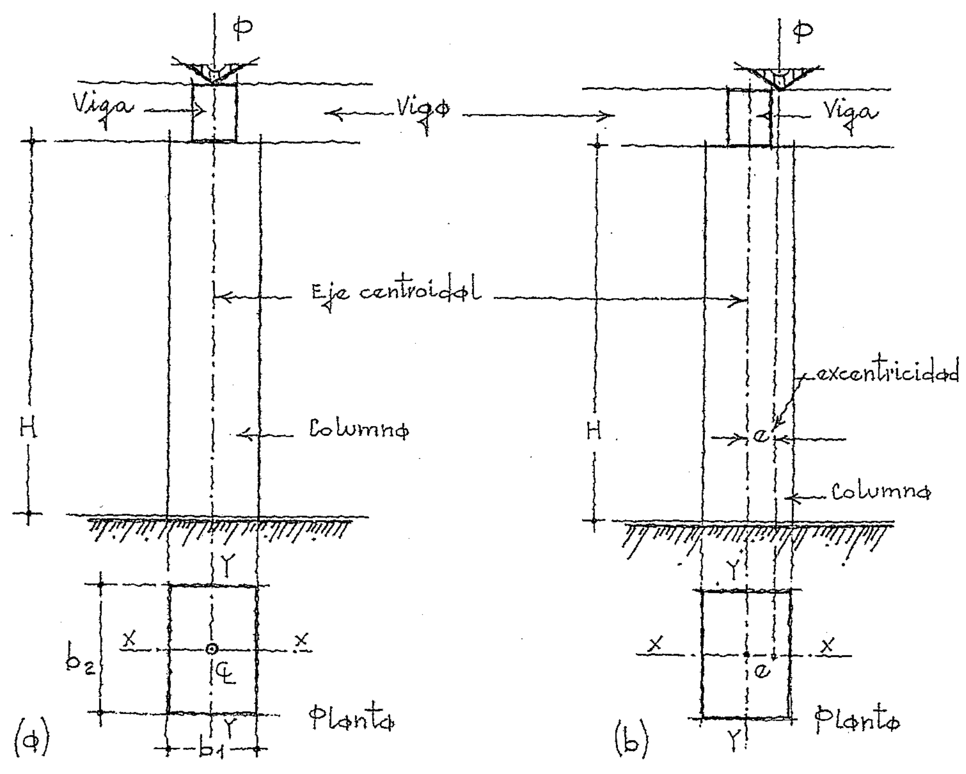


Fig. 6.1. Columna con carga axial, (a).

Fig. 6.2. Columna con carga excéntrica, (b).

Estudiaremos en este capítulo las columnas sometidas a carga axial por ser más fáciles de comprender y diseñar.

Cuando hay excentricidad en la columna, esta puede ser pequeña o grande. Es pequeña, cuando la carga cae dentro del núcleo central originando esfuerzos únicamente de compresión, figs. 6.3 y 6.4.

Fig. 6.3. Columna mostrando el núcleo central (a).

Fig. 6.4. Detalle del núcleo central. Excentricidad dentro del núcleo, (b).

Cuando la carga se sale del núcleo central, se producen tracciones en la cara más alejada de la carga, fig. 6.5

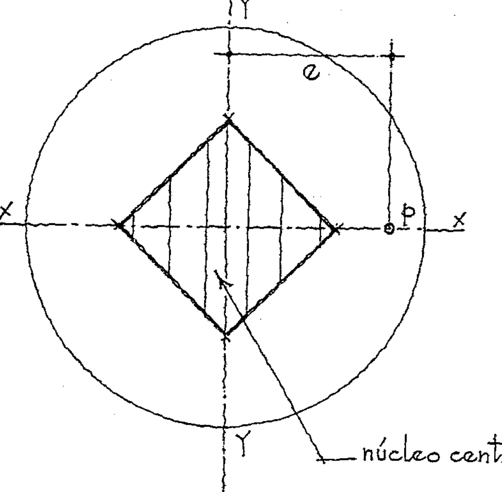


Fig. 6.5. Excentricidad grande, la carga cae fuera del nucleo central

Cuando se trata de una columna circular, el núcleo central es igual al diámetro de la columna entre ocho, figs. 6.6 y 6.7.

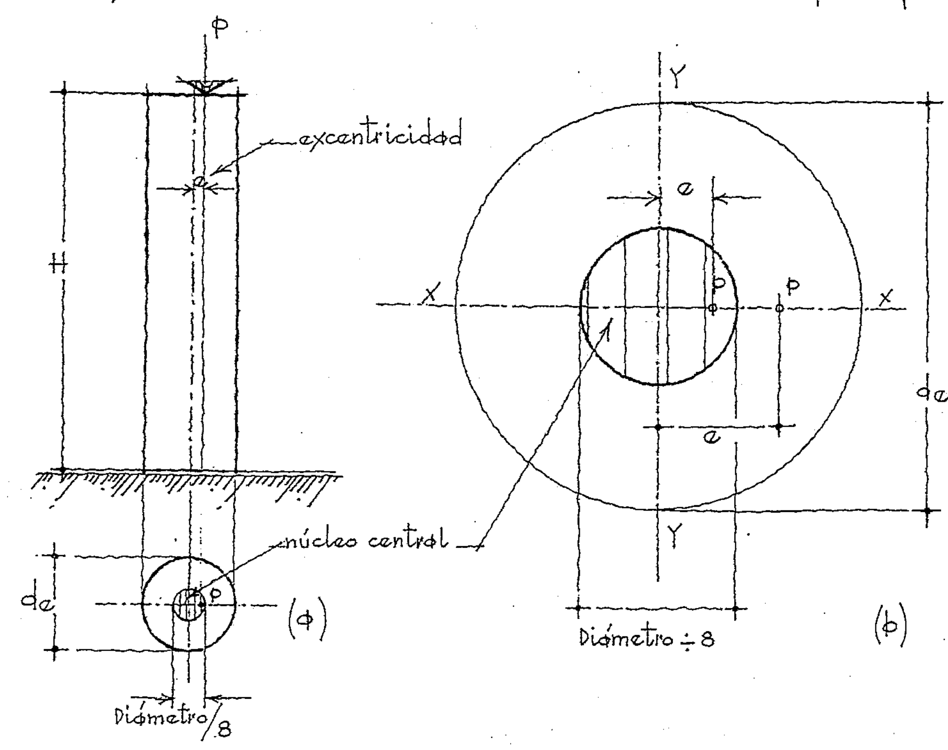
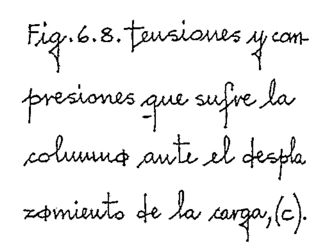


Fig. 6.6. Columna circular mostrando el núcleo central, (a).

Fig. 6.7. Detalle del núcleo central. Excentricidad dentro del núcleo (excentricidad pequeña), y excentricidad fuera del núcleo (excentricidad grande), (b).



La columna en sentido longitudinal muestra la tensión que sufre cuando la carga se sale del núcleo central, fig. 6.8.

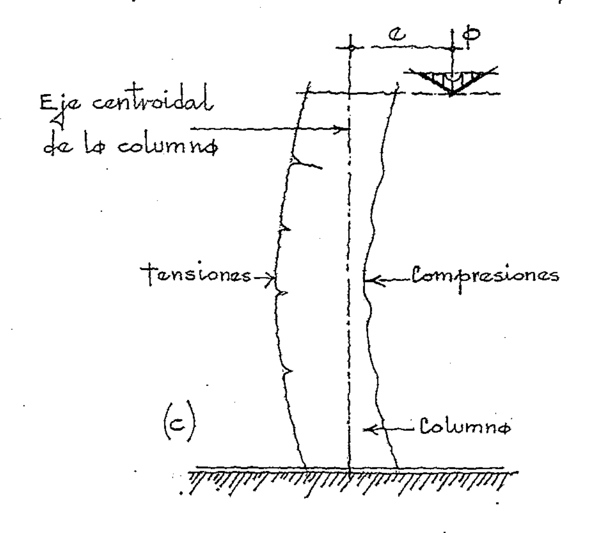


Fig. 6.8. Tensiones y compresiones que sufre la columna ante el desplazamiento de la carga, (c).

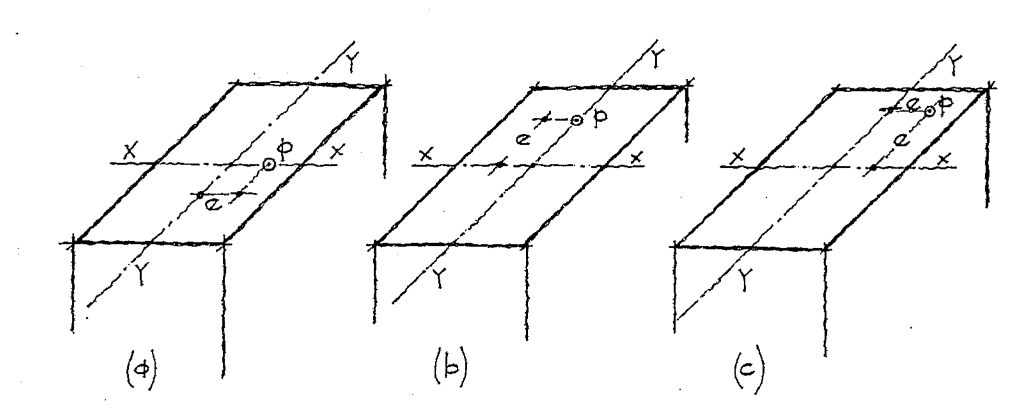
La carga sobre la columna puede desplazarse y caer sobre el eje X-X, sobre el Y-Y y también fuera de los ejes mencionados,

figuras 6.9 a 6.11.

6.9. Excentricidad el eje X-X, (a).

6.10. Excentricidad el eje Y-Y, (b).

6.11. Excentricidad ación a ambos s, (c).



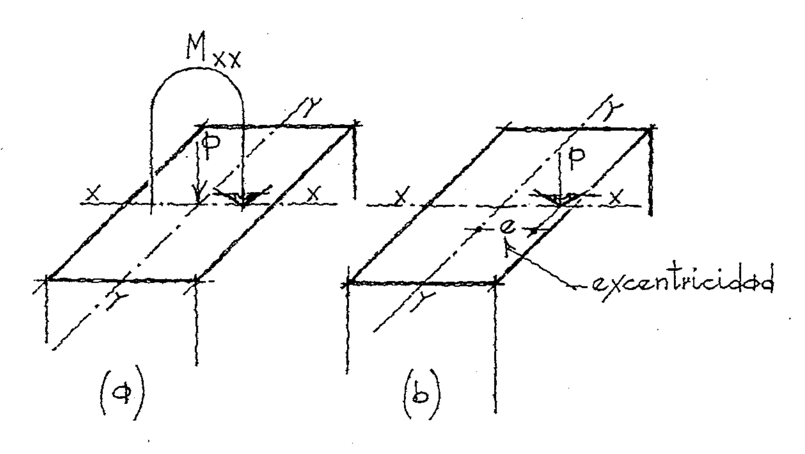
Cuando multiplicamos la carga (P) por la excentricidad (e) obtenemos un momento sobre la columna,

$$P \cdot e = M \quad \therefore \quad e = \frac{M}{P}$$

En efecto, una carga axial más un momento equivalen a la carga multiplicada por la excentricidad, figs. 6.12 y 6.13.

6.12. Carga axial momento, (a).

6.13. Carga por ntricidad, (b).



(a) y (b) son equivalentes.

b) *Referente a su longitud.* Se consideran cortas y largas; son cortas cuando su longitud libre (H) entre el lado menor de la columna (b_1), es igual o menor de 15.

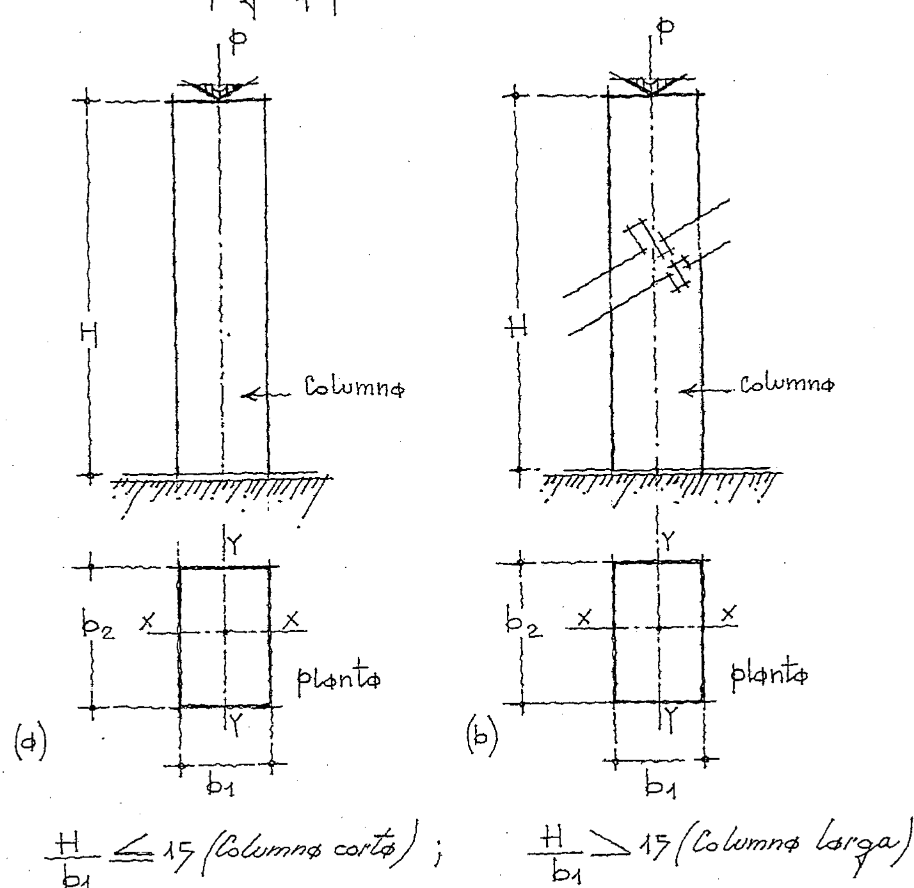
La columna será larga, cuando $H/b_1 > 15$

Referente al término corta y larga, será más apropiado

decir que una columna es corta cuando el material alcanza la resistencia última a compresión. Es larga cuando, además, influyen en ella los efectos de esbeltez, la rigidez del material y la restricción en los apoyos, figs. 6.14 a 6.15.

Fig. 6.14. Columna corta, (a).

Fig. 6.15. Columna larga (b).



$\frac{H}{b_1} \leq 15$ (Columna corta) ; $\frac{H}{b_1} > 15$ (Columna larga)

El empotramiento de los apoyos, cambia la longitud efectiva de la columna, la afecta y la modifica.

El valor de (K), coeficiente que indica las condiciones de los extremos de la columna), varia dependiendo de esas condiciones.

En las figuras 6.16 a 6.20, se presentan los valores de (K) para las diferentes condiciones, veamos:

H', longitud efectiva = KH.
EI, rigidez en la sección.

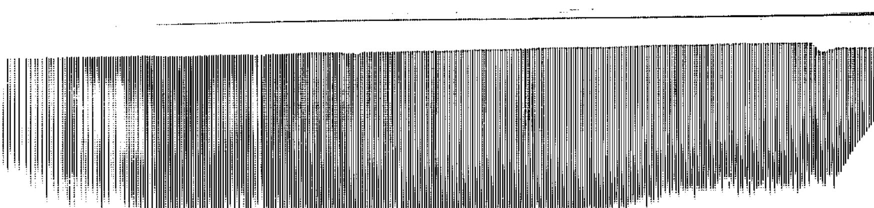
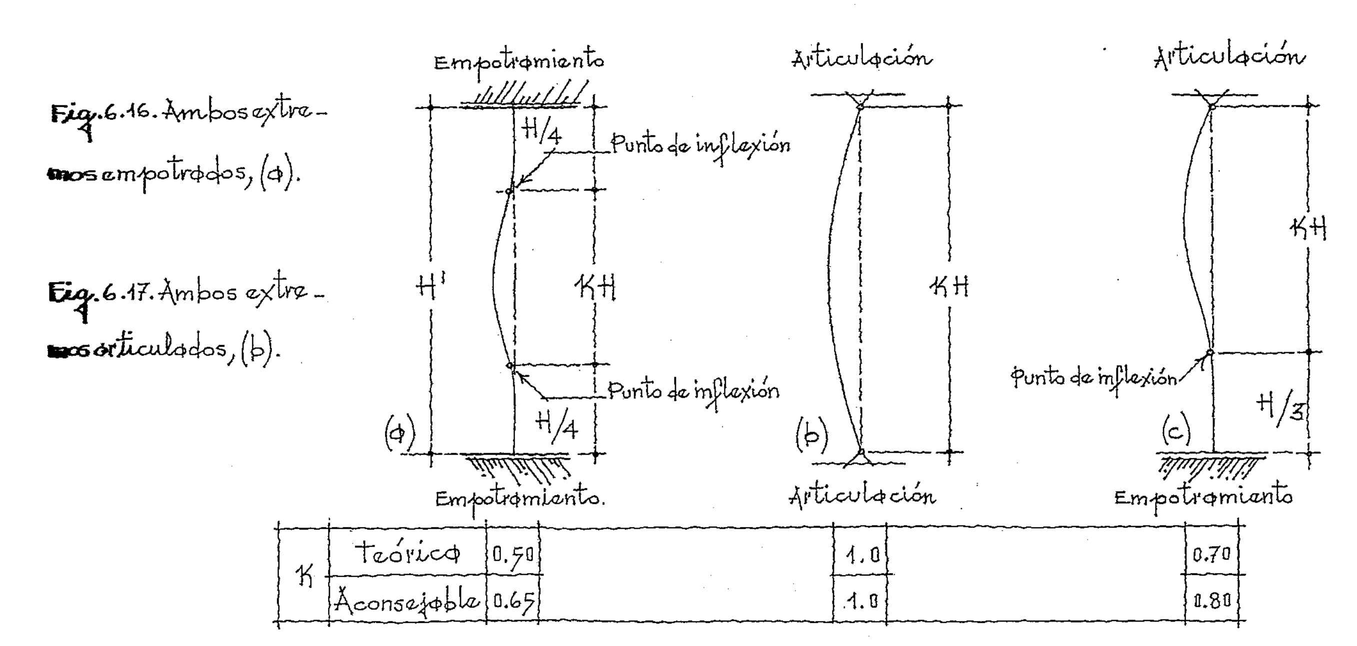




Fig. 6.16. Ambos extremos empotrados, (a).

Fig. 6.17. Ambos extremos articulados, (b).

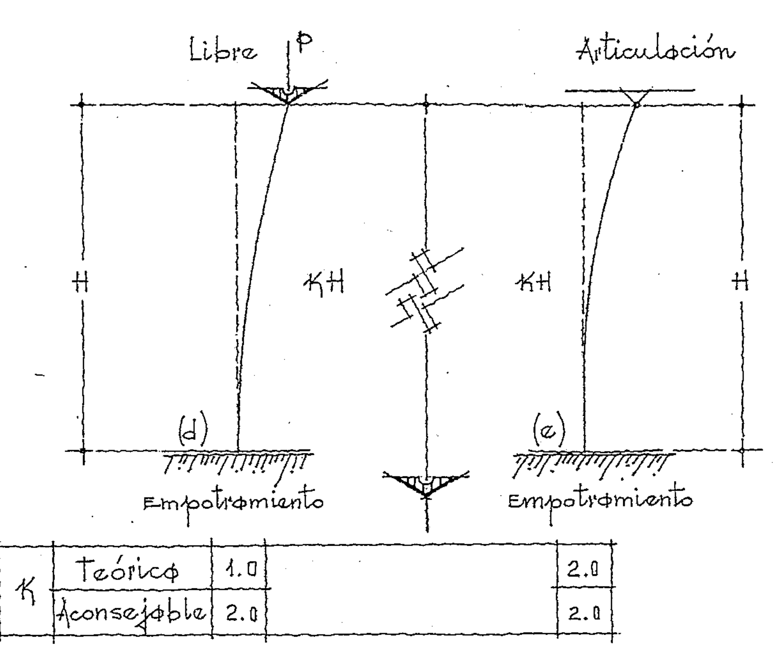


K	Teórica	0.50	1.0	0.70
	Aconsejable	0.65	1.0	0.80

Fig. 6.18. Un extremo empotrado y el otro articulado, (c).

Fig. 6.19. Un extremo empotrado y el otro libre, (d).

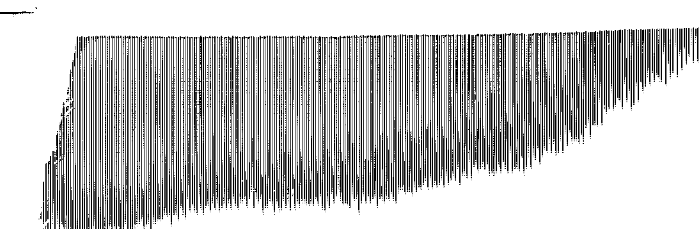
Fig. 6.20. Un extremo empotrado y el otro articulado, (e).



K	Teórica	1.0	2.0
	Aconsejable	2.0	2.0

c) Referente a sus armados. Las clasificamos en columnas estribadas y columnas circulares o zunchadas.

Para el refuerzo longitudinal, el reglamento determina un porcentaje entre el 1% y 8% del área de la sección transversal de la columna.



El Reglamento de Construcciones para el D.F., dice al respecto:

"El área del refuerzo vertical entre el área total de la sección de concreto no será menor que

$$\frac{As}{Ag} \geq \frac{20}{fY}, \text{ ni mayor que el } 6\%.^{*}$$

El número de varillas será de cuatro para las columnas estribadas y de seis para las zunchadas, de diámetro mínimo de 5/8" para ambas."

Además, el reglamento dice:

"Todas las barras o paquetes de barras (no más de dos por paquete) longitudinales deberán quedar restringidas contra el pandeo lateral con estribos o zunchos.

Se tomará la menor de las especificaciones siguientes:

1. $s \leq \frac{850}{\sqrt{fY}}$ el diámetro de la barra más delgada.
2. $s \leq 48$ veces el diámetro del estribo.
3. $s \leq \frac{b_1}{2}$.

Cuando se trate de la intersección de una columna con una trabe o una losa, la separación entre estribos se reducirá a la mitad de las especificaciones mencionadas anteriormente, en una longitud arriba y abajo del respectivo plano de intersección:

a) No menor que la dimensión transversal máxima (b_2) de la columna.

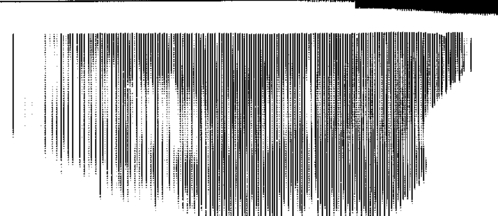
b) Longitud libre de la columna entre seis, H/6.

c) Sesenta centímetros, 60 cm.

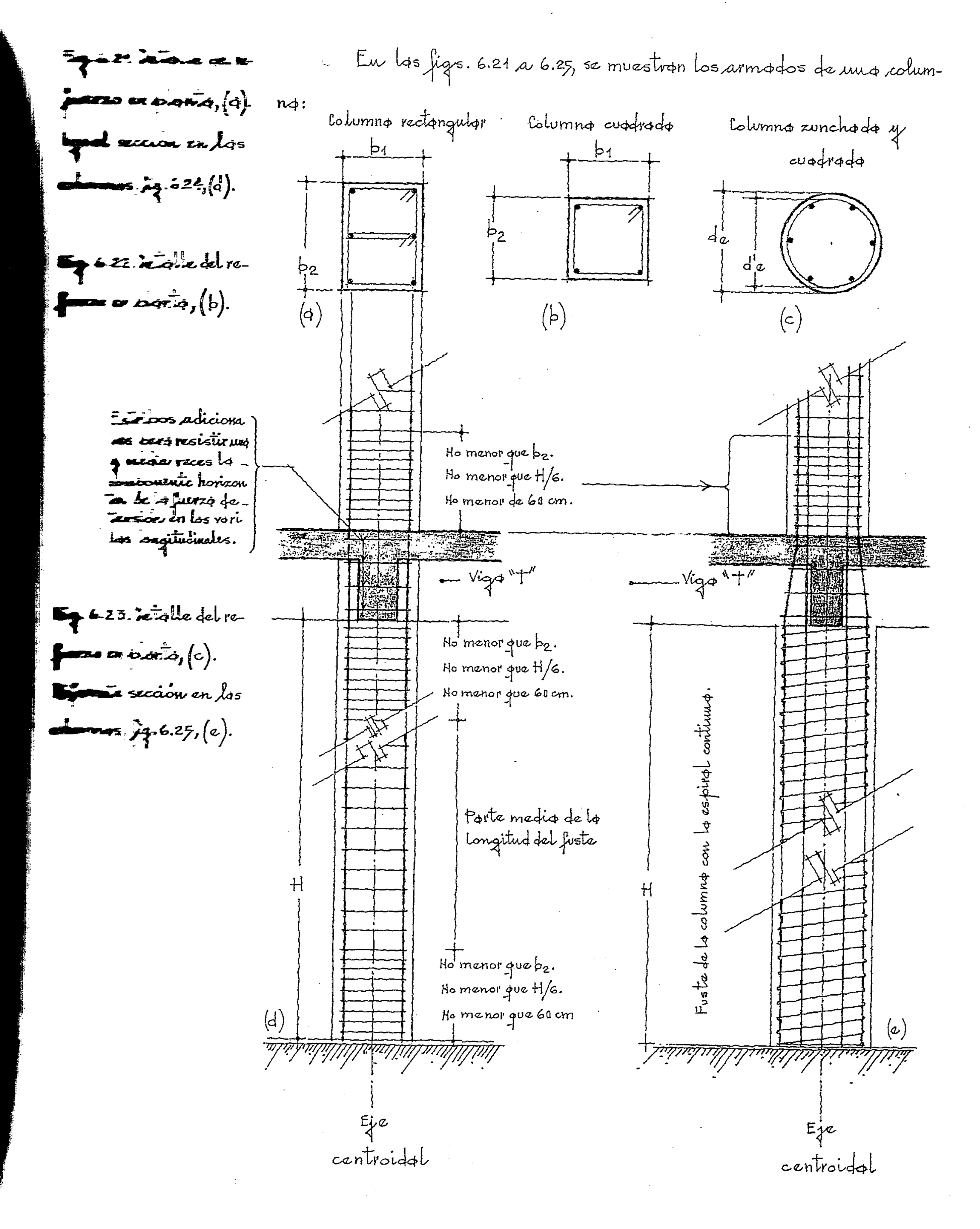
---

* El autor considera bajo este porcentaje.

Será preferible aceptar el porcentaje impuesto por el reglamento del D. F., es decir, entre 1% y 8%.



En las figs. 6.21 a 6.25, se muestran los armados de una columna:



Para columnas ortogonales principales, su dimensión menor será de 20 cm con un área total de 660 cm²; para columnas cuyo soporte sea secundario, la dimensión mínima será de 15 cm.

Para columnas zunchadas el diámetro mínimo será de 25 cm para las principales y de 20 cm para las auxiliares.

"El autor aconseja un área total de 750 cm², respetando el mínimo de 20 cm.

Tal aumento se debe a que la columna es un elemento estructural importantísimo cuya falla puede ser catastrófica."

Las barras más utilizadas para estribos y zunchos son, el alambrón de 1/4" y las varillas de 5/16" y 3/8"; en menor proporción se usa de 1/2".

El porcentaje volumétrico del zuncho o espiral no será menor que

$$\rho_s \geq 0.45\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f'_c}{f_y}, \text{ ni que } 0.12\,\frac{f'_c}{f_y}$$

En ningún caso la distancia libre entre hélices será mayor de 7.5 cm, figura 6.26.

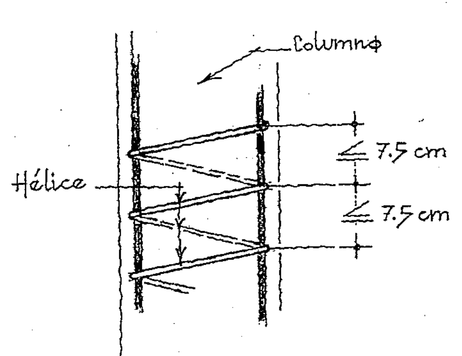


Fig. 6.26. Separación de la hélice en una columna zunchada.

Cuando la columna se diseña tomando en cuenta los esfuerzos de trabajo (Teoría Elástica), la capacidad de carga de la columna corta con

---

A_g, área total de la sección transversal de concreto.

A_c, área de concreto limitada por el zuncho.

carga axial se obtiene con la expresión

$$P_\phi = 0.22 f'_c A_g + 0.30 f_y A_s \text{ (Columna estribada).}$$

$$P_\phi = 0.25 f'_c A_g + 0.40 f_y A_s \text{ (Columna zunchada).}$$

Para una columna larga ($\frac{H}{b_1} > 15$), la capacidad de carga la obtendremos con la ecuación

$$P'_\phi = P_\phi \left(1.50 - 0.034 \frac{H}{b_1}\right) \text{ (Columna estribada, larga).}$$

$$P'_\phi = P_\phi \left(1.50 - 0.034 \frac{H}{d_e}\right) \text{ (Columna zunchada, larga).}$$

Ejemplo ilustrativo

Se tiene una columna en planta baja con una longitud libre de 2.40 m. y sección de 30 X 30 cm, reforzada con 4 varillas de 5/8".

En la fig. 6.27, se muestran las condiciones del problema.

¿Qué carga axial admisible es capaz de soporta la columna?.

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm² ; $f_y = 4200$ Kg/cm² ; $A_s = 4\phi_s 5/8" = 7.96$ cm²

$P_\phi = ? = 61.30$ ton

Fig. 6.27. Columna con carga axial.

Aplicando las especificaciones, se tiene:

$$\frac{H}{b_1} = \frac{240}{30} = 8 < 15 \text{ (la col. es corta).}$$

Porcentaje de acero

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_1 \cdot b_2} = \frac{7.96}{900} = 0.0088 < 0.01$$

El porcentaje de acero no cumple con la especificación y será necesario aumentar el acero, veamos:

$6\phi_s\#6 = 6 \times 2.87 = 17.22$ cm², y

$$\rho_s = \frac{17.22}{900} \simeq 0.019 > 0.01$$

P_ϕ, carga axial admisible de trabajo, columna corta.

P'_ϕ, carga axial admisible de trabajo, columna larga.

En la fig. 6.28, se muestra el nuevo armado.

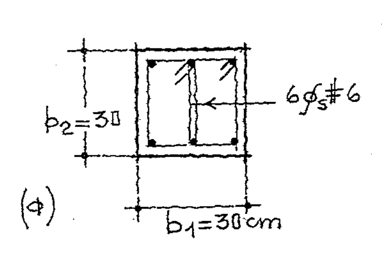


Fig. 6.28. Nuevo armado de la columna, (a).

NOTA. Se hubiera podido disminuir la sección de concreto al mínimo permitido, es decir:

$$\frac{7.96}{750} \simeq 0.01 \text{ (porcentaje mínimo)}$$

Pero no será menor que:

$$\frac{A_s}{A_g} \geq \frac{20}{f_Y} = \frac{20}{4200} \simeq 0.0048 \quad \therefore \; 0.019 > 0.0048$$

Para obtener la capacidad de carga en la columna, aplicamos la ecuación

$$P_\phi = 0.22 f'_c A_g + 0.30 f_Y A_s = 0.22 \times 200 \times 900 + 0.30 \times 4200 \times 17.22$$

$$39600 \text{ Kg} + 21698 \text{ Kg} = 61298 \text{ Kg} \simeq 61.30 \text{ ton}$$

También se puede aplicar la ecuación siguiente:

$$P_\phi = A_g \left(0.18 f'_c + f_s^* \rho_s\right) = 900 \left(0.18 \times 200 + 1680 \times 0.019\right)$$

$$900 \left(36 + 31.92\right) \simeq 61200 \text{ Kg} = 61.20 \text{ ton}$$

*Se permite trabajar el acero en compresión únicamente al 40% de su resistencia a la fluencia, pero no mayor de 2100 Kg/cm², por tanto

$$f_s = 0.40 f_Y = 0.40 \times 4200 \text{ Kg/cm}^2 = 1680 \text{ Kg/cm}^2 < 2100 \text{ Kg/cm}^2$$

En la fig. 6.29 se presenta el armado final de la columna.

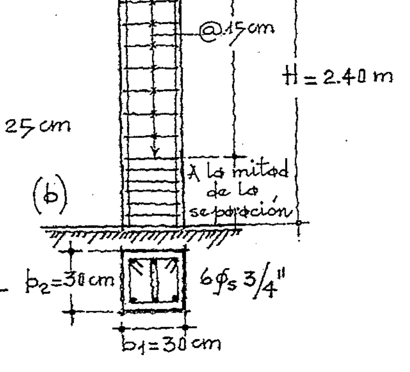


Fig. 6.29. Colocación del acero vertical y separación de estribos en la columna, (b).

Separación de estribos:

$$\leq \frac{850}{\sqrt{f_Y}} = \frac{850}{\sqrt{4200}} = 13 \times 1.91 \simeq 25 \text{ cm}$$

$$\leq 48 \times 0.79 \simeq 38 \text{ cm}$$

$$\leq \frac{b_1}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

Estribos #2 a cada 15 cm en la longitud central de la columna.

Ejemplo ilustrativo

Una columna de sección rectangular en planta baja recibe una carga de 160 ton. Diga que cantidad de acero longitudinal necesita e indique la separación de estribos, figura 6.30.

$P_a = 160$ ton

$H = 3.20$ m

(a)

$b_2 = 50$ cm

Planta

$b_1 = 30$ cm

Fig. 6.30. Columna con carga axial, (a).

Datos:

$H = 3.20$ m ; $b_1 = 30$ cm ; $b_2 = 50$ cm

$f'_c = 200$ Kg/cm^2; $f_Y = 4200$ Kg/cm^2

La columna es corta.

Aplicando la ecuación para columnas estribadas, se tiene:

$$P_a = 0.22 f'_c A_g + 0.30 f_Y A_s$$

$$\therefore A_s = \frac{160\,000 - (0.22 \times 200 \times 1500)}{0.30 \times 4200}$$

$$y, \quad A_s = \frac{160\,000 - 66\,000}{1260} = 74.60 \text{ cm}^2$$

Porcentaje de acero

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_1 \cdot b_2} = \frac{74.60}{30 \times 50} = 0.0497$$

$$\therefore \rho_s > 1\% < 8\%$$

$$\text{Con } \phi_s \# 9 = \frac{74.60}{6.42} \simeq 12\,\phi_s$$

Separación de estribos, fig. 6.31.

$$\leq \frac{850}{\sqrt{f_Y}} = \frac{850}{\sqrt{4200}} \simeq 25 \text{ cm}$$

$$\leq 48 \times 0.95 \simeq 45 \text{ cm}$$

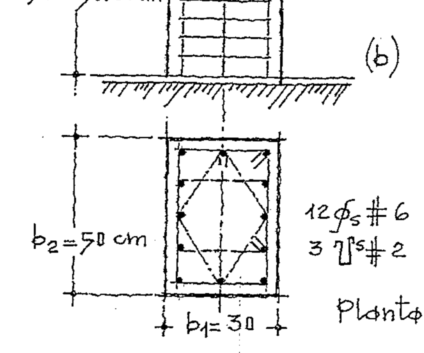
$$\leq \frac{b_1}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

Estribos #3 a cada 15 cm en la longitud central de la columna.

15 cm
15 cm
15 cm
7.5 cm
7.5 cm
7.5 cm

No menor que $b_2 \therefore 50$ cm
No menor que $H/6 \therefore 3.20/6 = 54$ cm $\therefore 60$ cm
No menor 60 cm

(b)



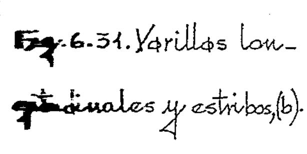


Fig. 6.31. Varillas longitudinales y estribos, (b).

Ejemplo ilustrativo

Una columna zunchada recibe una carga de 86 ton. Se le supone a la columna un porcentaje de acero de 2.2% aproximadamente y una longitud libre de 3.60 m, fig. 6.32.

¿Que diámetro exterior necesita la columna para soportar la carga dada?.

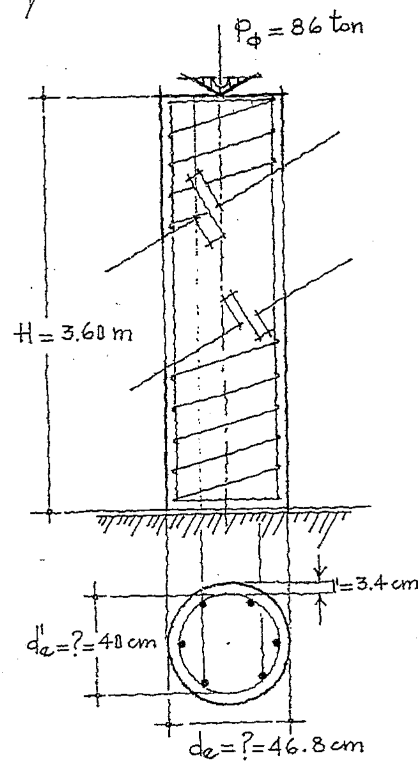


Fig. 6.32. Columna zunchada con carga axial.

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

$\rho_s \simeq 2.2\%$

$$P_\phi = 0.25 f'_c A_g + 0.40 f_Y A_s$$

$$86000 = 0.25 \times 200 A_g + 0.40 \times 4200 \times 0.022$$

$$\therefore \quad 86000 = 50 A_g + 36.96 \ldots y$$

$$A_g = \frac{86000 - 36.96}{50} \simeq 1720\ cm^2$$

Por tanto:

$$1720 = \frac{\pi d_e^2}{4} \therefore 1720 \times 4 = 3.1415 (d_e)^2$$

$$(d_e)^2 = \frac{6880}{3.1415} = 2190\ cm^2$$

finalmente, $d = \sqrt{2190} \simeq 46.8$ cm

$$\frac{H}{d_e} \simeq 7.7 < 15 \text{ (La columna es corta)}$$

Cálculo del área de acero:

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_g}$$

$$\therefore \quad A_s = \rho_s A_g = 0.022 \times 1720\ cm^2$$

$$A_s = 37.84\ cm^2$$

$$\text{con } \phi_s \# 9 = \frac{37.84}{6.42} \simeq 6 \phi_s$$

Cálculo del refuerzo de la hélice:

$$\rho_s = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_Y} = 0.45 \left(\frac{1720}{1256.6} - 1 \right) \frac{200}{4200} = 0.0079$$

Utilizando espiral de 5/16", se tiene: figs. 6.33 y 6.34.

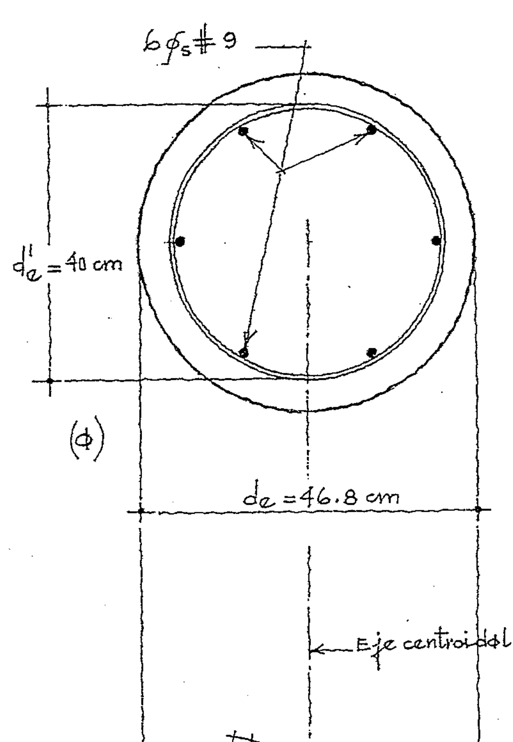


Fig. 6.33. Planta de la columna zunchada, (a).

$$p_s = \frac{4\,A_{sv}\,(d'_e - \phi\,5/16")}{p_{aso}\,(d'_e)^2}$$

$$= \frac{4 \times 0.49\,(40 - 0.79)}{p_{aso}\,(1600)}, \text{ y}$$

$$0.0079 \cdot p_{aso}\,(1600) = 76.85$$

$$\therefore\; p_{aso} = \frac{76.85}{12.64} \simeq 6.00 \text{ cm}$$

El reglamento dice:

"La separación entre dos hélices consecutivas será como máximo de 7.5 cm." *

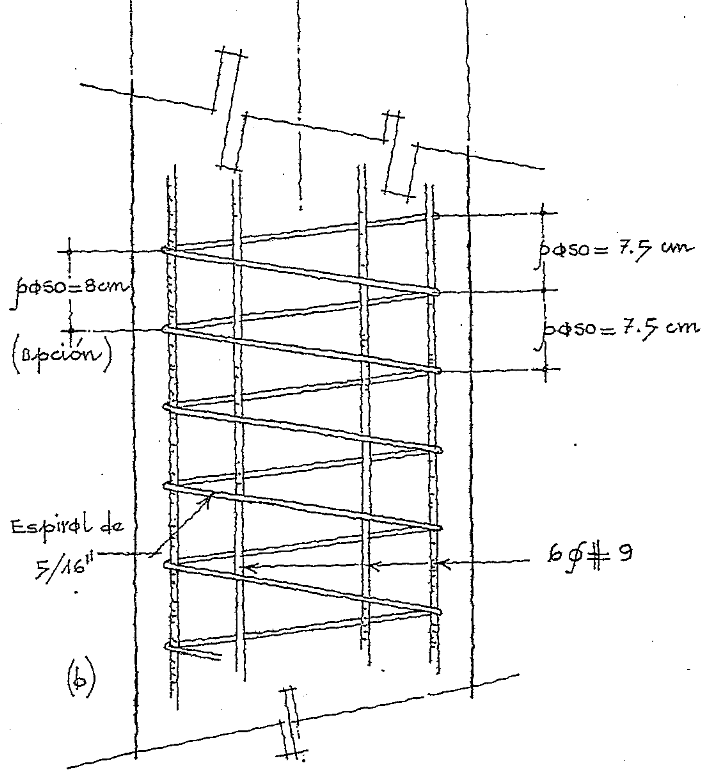


Fig. 6.34. Corte longitudinal de la columna zunchada, (b).

---

* El autor considera exagerada la especificación dada por el reglamento y, recomienda que entre 8 y 10 cm es una separación muy aceptable.

Ejemplo ilustrativo

Se tiene una columna que recibe una carga axial de 100 ton. Analizarla para las siguientes condiciones:

1. Suponer primeramente que la columna es corta.
2. Considerarla finalmente como columna larga.
3. Calcular el área de acero necesario.

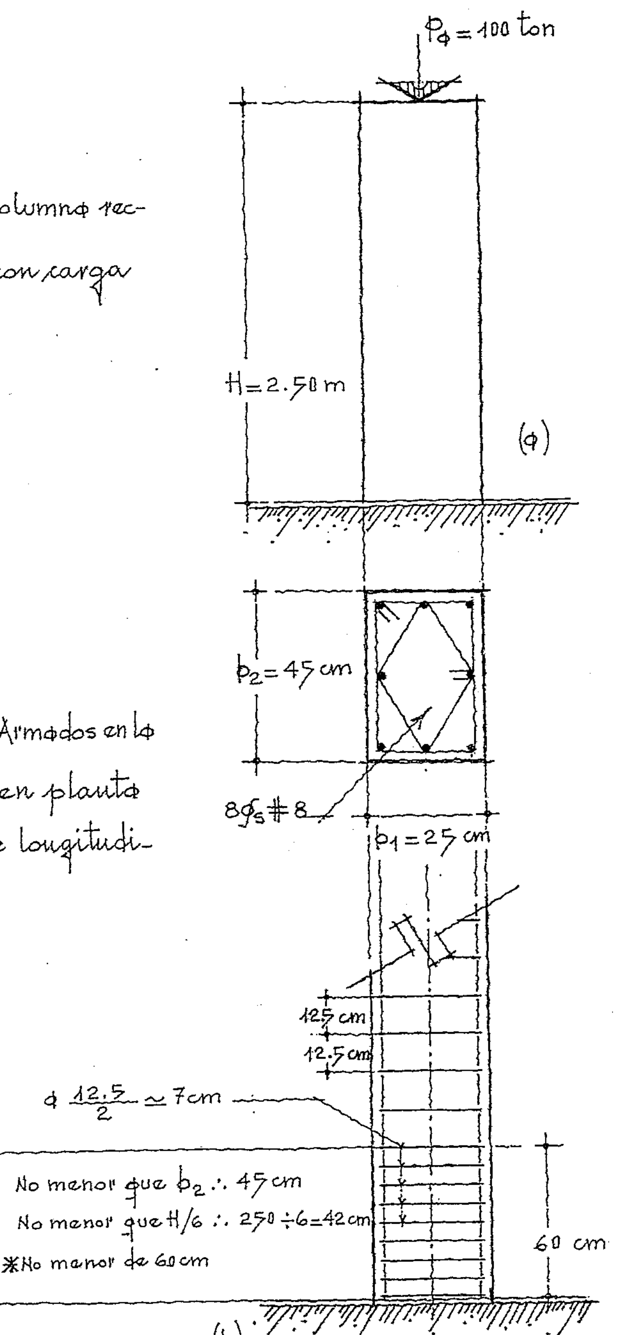


Fig. 6.35. Columna rectangular con carga axial, (a).

Fig. 6.36. Armados en la columna, en planta y en corte longitudinal, (b).

Datos:

$b_1 = 25$ cm ; $b_2 = 45$ cm

$f'_c = 200$ Kg/cm^2 ; $f_y = 4200$ Kg/cm^2

Primera condicion, $H = 2.50$ m

Segunda condición, $H = 4.60$ m

Primera condición; figs. 6.35 y 6.36.

$$\frac{H}{b_1} = \frac{250}{25} = 10 < 15$$

La columna es corta.

Cálculo del área de acero

$$P_a = 0.22 f'_c \times A_g + 0.30 f_y A_s$$

$$= 0.22 \times 200 \times 1125 + 0.30 \times 4200 \, A_s$$

$$100\,000 = 49\,500 + 1260 A_s \ldots, \text{ y}$$

$$A_s = \frac{100000 - 49500}{1260} \simeq 40.08 \text{ cm}^2$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_1 \cdot b_2} = \frac{40.08}{1125} \simeq 0.036 > 1\% < 8\%$$

Con ϕ_s 1", se tiene: $\frac{40.08}{5.07} \simeq 8\phi_s\#8$

Separación de estribos:

1. $\leq \frac{850}{\sqrt{f_y}} = \frac{850}{\sqrt{4200}} \simeq 13 \times 2.54 \simeq 33$ cm
2. $\leq 48 \times 0.79 \simeq 38$ cm
3. $\leq \frac{b_1}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$ cm

La separación será de 12.5 cm

Segunda condición, figs. 6.37 y 6.38.

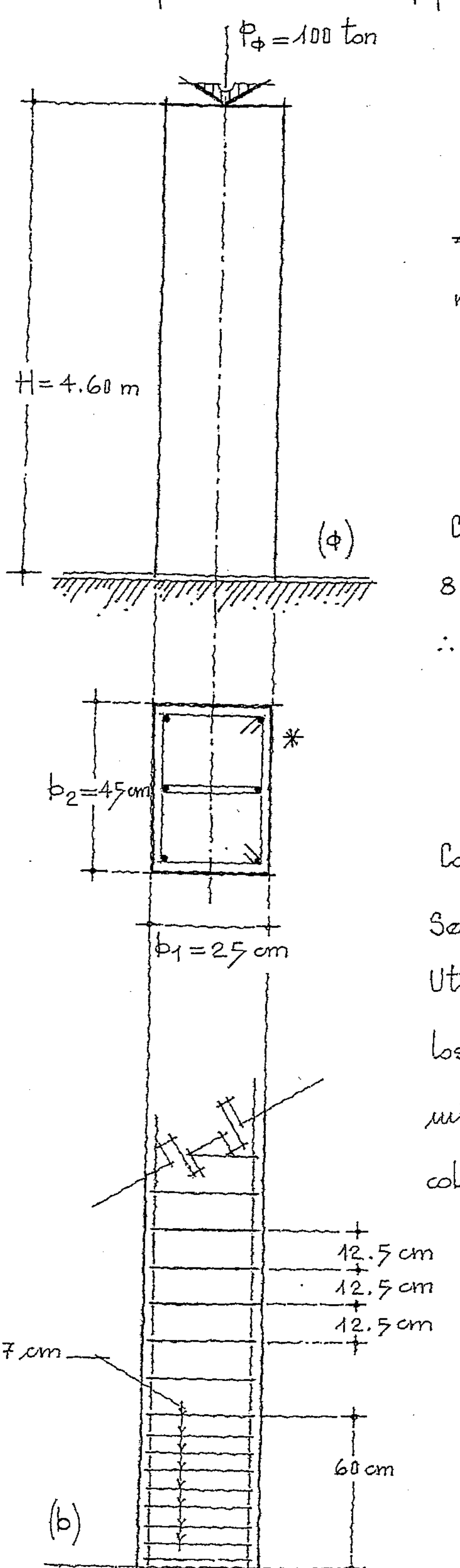


Fig. 6.37. Columna rectangular con carga axial, (a).

Fig. 6.38. Armados en la columna, en planta y corte longitudinal, (b).

$$\frac{H}{b_1} = \frac{460}{25} = 18.4 > 15$$

La columna es larga.

Aplicando la ecuación para columna larga, obtenemos:

$$P'_a = P_a\left(1.50 - 0.034\frac{H}{b_1}\right)$$

$$= 100\,000\,(1.50 - 0.034 \times 18.4)$$

$$\therefore P'_a = 87\,000 \text{ Kg} = 87 \text{ ton}$$

Cálculo del área de acero:

$$87000 = 49500 + 1260 A_s$$

$$\therefore A_s = \frac{87\,000 - 49\,500}{1260} = 29.76 \text{ cm}^2$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_1 \cdot b_2} = \frac{29.76}{1125} = 0.026$$

$$\therefore \rho_s > 1\% < 8\%$$

Con ϕ_s #1", se tiene: $\frac{29.76}{5.07} \simeq 6\phi_s$#8

Separación de estribos:

Utilizando el mismo diámetro en los estribos, la separación será la misma que la obtenida para la columna corta.

* En una columna rectangular la relación entre ambos lados no excederá de 4.

6.2. Columnas con carga axial *(Diseño Plástico)*.

Las especificaciones son prácticamente las mismas que las aplicadas para el diseño elástico, únicamente se afecta la ecuación que da la resistencia última por un factor de reducción, veamos:

$$P_U = F_R\left(f'_c A_g + f_Y A_s\right)$$

El Reglamento de Construcción dice al respecto:

"El factor de reducción se tomará de 0.70 para las columnas estribadas y de 0.75 para las columnas zunchadas."

A continuación se presentan unos ejemplos ilustrativos y su solución.

Ejemplo ilustrativo

En la planta baja de un edificio una columna recibe una carga de 200 ton.

Calcular la sección de la columna tomando en cuenta que el lado menor de la misma presenta la dimensión mínima permitida, fig. 6.39.

$P_U = 200$ ton

$H = 3.20$ m

$b_1 = 0.20$

$b_2 = ? = 0.72$

Fig. 6.39. Columna con carga axial.

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

$\rho_s \simeq 1.6$

Obtención del área de la columna:

$$200\,000 = 0.70\left(200 A_g + 4200 \times 0.016\right)$$

$$= 140 A_g + 47 \ldots \text{y}$$

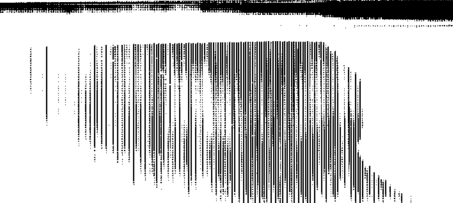
$$A_g = \frac{200\,000 - 47}{140} = 1428.2\ cm^2$$

$$(b_2)\,20 = 1428.2 \therefore b_2 \simeq 72\ cm$$

por tanto

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_1 \cdot b_2} \therefore A_s = 0.016 \times 20 \times 72 = 23\ cm^2$$

con $\phi_s \# 7 = \frac{23}{3.87} \simeq 6\ \phi_s \# 7$ *(como columna corta).*



Como la columna es larga, se tiene: fig. 6.40.

$$P'_U = P_U\left(1.50 - 0.034\,\frac{H}{b_1}\right)$$

$$= 200000\left(1.50 - 0.034\,\frac{320}{20}\right)$$

$$= 200000\,(0.956)$$

y finalmente

$$P'_U = 191200\ Kg = 191.2\ ton$$

Area de acero para la columna larga

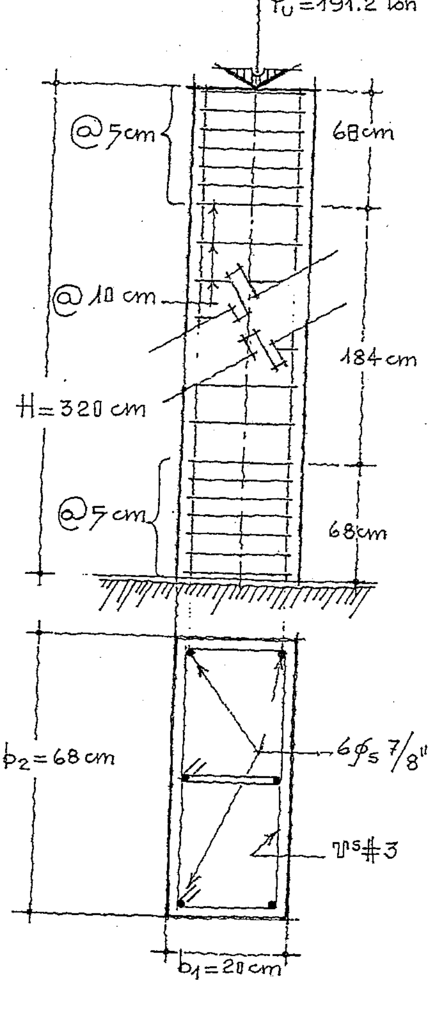
$$191200 = 0.70\left(200\,A_g + 4200 \times 0.016\right)$$

$$\therefore\ A_g = \frac{191200 - 47}{140} \simeq 1365.4\ cm^2$$

$$y,\ (b_2)\,20 = 1365.4\ \therefore\ b_2 \simeq 68\ cm$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_1 \cdot b_2}\ \therefore A_s = 0.016 \times 20 \times 68 = 21.76$$

$$con\ \phi_s\#7 = \frac{21.76}{3.87} \simeq 6\phi_s\#7$$



... armados en ..., en plan- ... corte longi- ...

Separación de estribos:

$$s \leq \frac{850}{\sqrt{f_Y}} = 13 \times 2.22 \simeq 29\ cm$$

$$s \leq 48 \times 0.95 \simeq 45\ cm$$

$$s \leq \frac{b_1}{2} = 10\ cm$$

Se toma la separación de 10 cm, en la parte central de la longitud de la columna.

En los extremos se colocarán a la mitad, es decir, a 5 cm.

Ejemplo ilustrativo

Se tiene una columna zunchada que recibe una carga axial de 142 ton y se encuentra reforzada con 6 ϕ #5.

¿Qué sección de concreto necesita la columna y comprobar que el acero cumpla con las especificaciones dadas por reglamentación?, fig. 6.41.

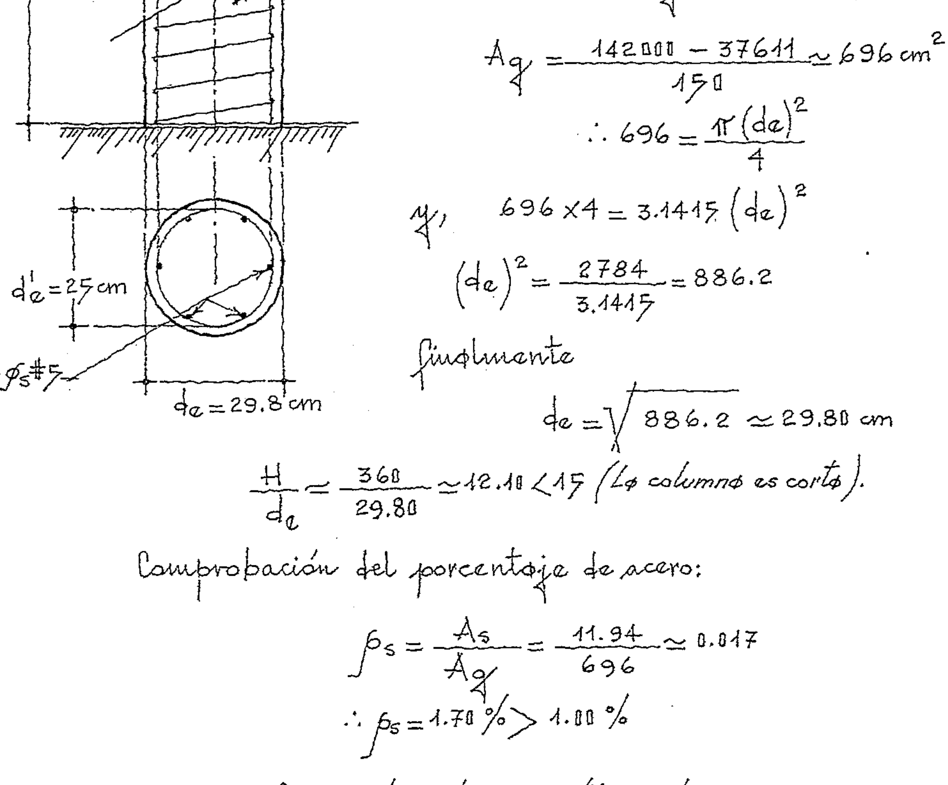


Fig. 6.41. Columna zunchada con carga axial. Planta y corte longitudinal.

Datos:

$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$; $f_Y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$

$A_s = 6 \times 1.99 = 11.94 \text{ cm}^2$

$$P_U = F_R \left(f'_c A_g + f_Y A_s \right)^*$$

$$142\,000 = 0.75 \left(200 A_g + 4200 \times 11.94 \right)$$

$$= 150 A_g + 50148 \times 0.75$$

$$A_g = \frac{142\,000 - 37611}{150} \simeq 696 \text{ cm}^2$$

$$\therefore 696 = \frac{\pi (d_e)^2}{4}$$

y,

$$696 \times 4 = 3.1415 \, (d_e)^2$$

$$(d_e)^2 = \frac{2784}{3.1415} = 886.2$$

finalmente

$$d_e = \sqrt{886.2} \simeq 29.80 \text{ cm}$$

$$\frac{H}{d_e} \simeq \frac{360}{29.80} \simeq 12.10 < 15 \text{ (La columna es corta).}$$

Comprobación del porcentaje de acero:

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_g} = \frac{11.94}{696} \simeq 0.017$$

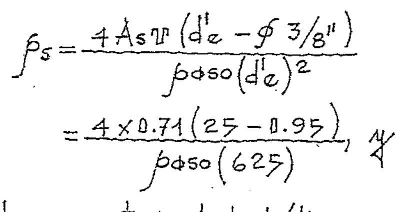
$$\therefore \rho_s = 1.70\,\% > 1.00\,\%$$

El porcentaje de acero está correcto.

---

* Obsérvese que la ecuación es idéntica a la empleada para calcular la resistencia última, únicamente varía el factor de reducción (F_R), que es de 0.75.

Para la espiral se utilizará varilla de 3/8", figs. 6.42 a 6.44.



$$\rho_s = \frac{4 A_s \pi (d'_e - \phi\, 3/8'')}{paso (d'_e)^2}$$

$$= \frac{4 \times 0.71 (25 - 0.95)}{paso (625)}, \text{ y}$$

el porcentaje de la hélice es igual a:

$$\rho_s = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y}$$

$$= 0.45 \left(\frac{696}{491} - 1 \right) \frac{200}{4200}$$

$$\rho_s = 0.45 (0.418)\, 0.0476 \simeq 0.009$$

Finalmente obtenemos:

$$0.009 \cdot paso (625) = 68.30$$

y, $paso = \frac{68.30}{5.625} \simeq 12$ cm

La separación obtenida (12 cm) resultó mayor que la máxima permitida.

Calculamos ahora con espiral de 5/16", veamos:

$$0.009 = \frac{4 \times 0.49 (25 - 0.79)}{paso (625)}$$

y finalmente

$$paso = \frac{47.45}{5.625} = 8.44 \simeq 8.5 \text{ cm}$$

La separación rebasa la especificación pero se puede dejar.

En caso de respetar la especificación se tendrá que trabajar con la espiral de alambrón de 1/4".

Viga – Losa

H = 3.60 m

(a)

de = 29.8 cm

d'e = 25 cm

(b)

paso = 8.5 cm

paso = 8.5 cm

(c)

...6.42. Corte longitu- ... de la columna - ...chada, (a).

...6.43. Planta de la ... zunchada, (b).

...6.44. Detalle de la ... y armados, (c).

Referencias bibliográficas

Capítulo 6

"*Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado*," ACI 318 - 83, México, 1984.

Instituto de Ingeniería, "*Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto*"; *Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*, Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.

Pérez A., Vicente, "*El Concreto Armado en las Estructuras*," *Teoría Elástica*, Trillas, México, 1996.

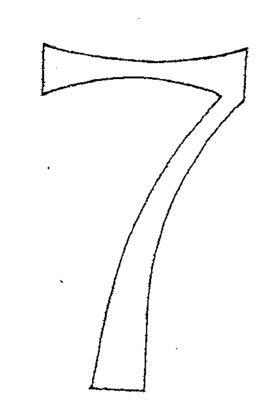
Arguero E., Francisco, "*Cálculo Práctico del Hormigón Armado*," Ceac, España, 1963.

Hill A., Louis, "*Fundamentos de Diseño Estructural*," México, 1978.

Perez A., Vicente, "*Diseño y Cálculo de Estructuras de Concreto Reforzado*"; *Por Resistencia Máxima y Servicio*, Trillas, México, 1999.

SP-43 American Concrete Institute, "*Deflections of Concrete Structures*," Detroit, 1974.

Lin, T.Y, Stotesbury, S.D, "*Conceptos y Sistemas Estructurales para Arquitectos e Ingenieros*," Limusa, México, 1991.



COLUMNAS SOMETIDAS A CARGA EXCÉNTRICA

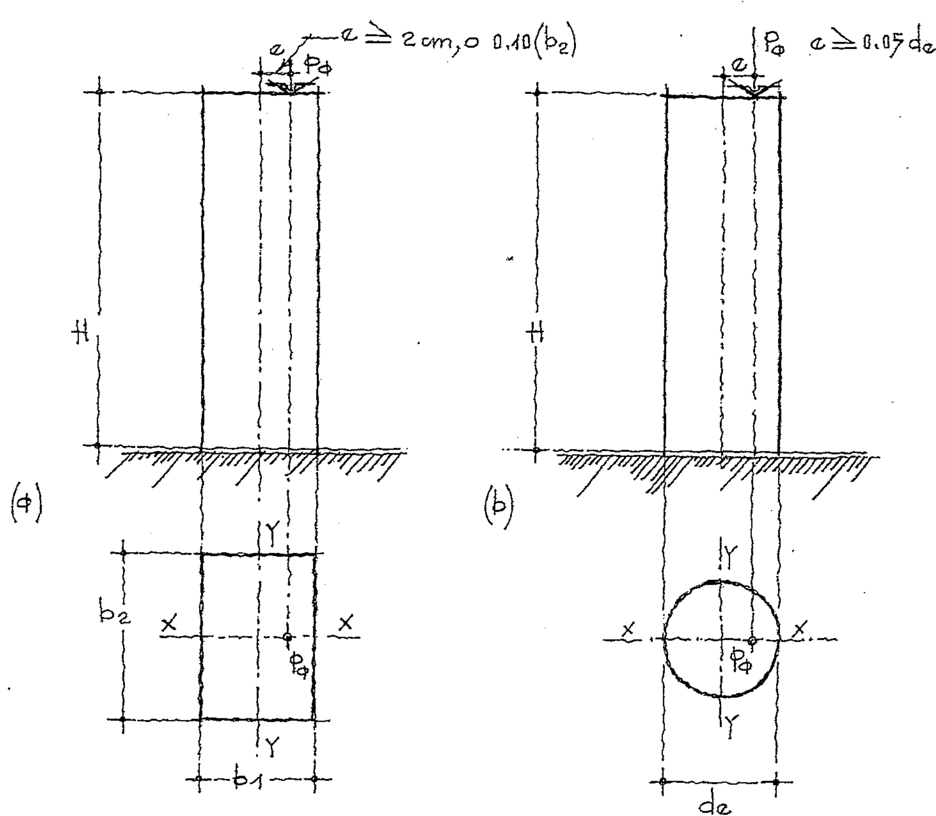
7.1. Generalidades

Ya se mencionó que en la práctica una columna raro vez se encontrará sometida únicamente a carga axial. Por tanto, será necesario considerarle a la columna una mínima excentricidad que el Reglamento de Construcciones para el D.F., determina:

"La excentricidad de diseño, e, no será menor de 2.00 cm, o de 0.10 b_2 para columnas estribadas y de 0.05 d_e, para las zunchadas", figs. 7.1 a 7.2.

Fig. 7.1. Columna estribada, (a).

Fig. 7.2. Columna zunchada, (b).



Cuando se trate de miembros sometidos a flexocompresión, donde la carga axial, P_a, sea mayor que $A_g f'_c/10$, el reglamento especifica:

a) El lado menor de la columna (b_1) no será menor de 30 cm.

b) El área total de la columna (A_g) no será menor de $P_a/0.5 f'_c$, para toda combinación de carga.

c) El lado menor de la columna, b_1, entre el lado mayor, b_2, será mayor de 0.4.

d) En columnas sometidas a cargas excéntricas, la relación entre la altura libre de la columna (H) y su menor dimensión transversal (b_1), no excederá de 20.

e) El traslape de varillas longitudinales únicamente se permitirá en la parte central del fuste de la columna.

f) El acero utilizado como refuerzo transversal tendrá un grado de fluencia no mayor de 4200 Kg/cm^2.

g) El refuerzo transversal tendrá un diámetro no menor de 0.95 cm, es decir, varilla de 3/8". Su separación no excederá de la cuarta parte de la menor dimensión de la columna, b_1, ni de 10 cm.

Se respetarán estas especificaciones más las que no interfieran con lo especificado en el inciso 6.1.

En toda estructura, se incluirán los efectos de esbeltez de acuerdo con lo especificado por el Reglamento de Construcciones para el D.F., que determina:

a) Restricción lateral de los extremos de columnas.

Se considera que una columna se encuentra con sus extremos lateralmente restringidos cuando forma parte de un entrepiso cuya rigidez lateral de contraviento, muros u otros elementos no sea menor del 85% de la rigidez total del entrepiso.

Deberá tomarse también en cuenta que la rigidez de cada diafragma horizontal (viga, losa, etc...), donde llega la columna, no será menor que diez veces la rigidez de entrepiso del marco a que pertenece la columna en estudio.

b) Miembros donde se pueden despreciar los efectos de

esbeltez.

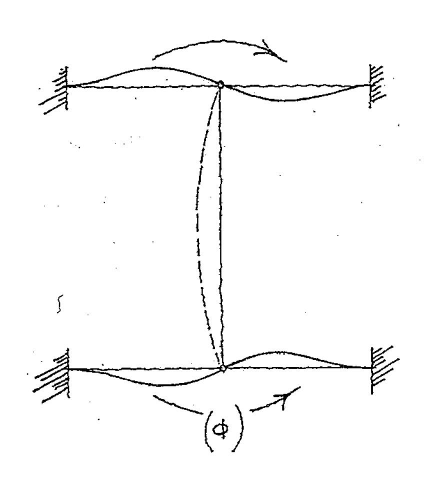
En aquellos miembros con extremos restringidos lateralmente (contraventeados), y cuando la relación entre H' (longitud efectiva) y el radio de giro (r) de la sección en la dirección considerada es menor que

$$\frac{34 - 12\, M_1}{M_2}, \text{ donde}$$

M_1, Momento menor en el extremo del miembro.

M_2, Momento mayor en el extremo del miembro.

El resultado M_1/M_2 es positivo cuando el elemento se flexiona en curvatura simple y negativo cuando se flexiona en curvatura doble, figuras 7.3 y 7.4.



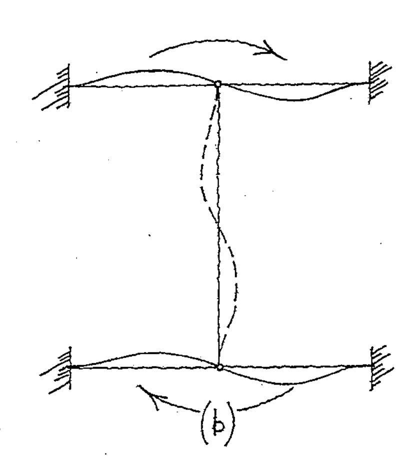


Fig. 7.3. Deflexión en columna sin desplazamiento lateral. Curvatura simple, (a).

Fig. 7.4. Deflexión en columna sin desplazamiento lateral. Curvatura doble, (b).

Cuando $M_1 = M_2 = 0$, el resultado M_1/M_2, se tomará igual a 1.0.

Para columnas sometidas únicamente a cargas verticales que causen desplazamientos laterales apreciables, con extremos no restringidos lateralmente, los efectos de esbeltez se pueden despreciar cuando

$$\frac{H'}{r} < 22$$

$H' = KH$; H', Longitud efectiva

K, factor de longitud efectiva para elementos en compresión.

r, radio de giro de la sección transversal de un elemento en compresión.

El reglamento ACI especifica para el radio de giro:

"Para columnas estribadas se estima en 0.30 veces el lado menor de la columna (b_1), y de 0.25 veces el diámetro (de) para las zunchadas".

Además, cuando

$$\frac{H'}{r} > 100,$$ deberá efectuarse un análisis de segundo orden que, consiste:

"Se obtendrán las fuerzas y momentos internos tomando en cuenta los efectos de las deformaciones sobre dichas fuerzas y momentos y, la influencia de la carga axial en las rigideces".

En todo miembro sujeto a flexocompresión donde no se puedan despreciar los efectos de esbeltez, el elemento estructural se dimensionará para la carga axial de diseño, P_U, obtenida por medio de un análisis convencional y un momento amplificado, M_c, obtenido con la ecuación dada por el Reglamento ACI 318-83 que dice:

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s}\text{, donde}$$

$$\delta_b = \frac{C_m}{1 - \frac{P_U}{F_R P_c}} \geq 1.0$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_U}{F_R \Sigma P_c}} \geq 1.0\text{, y}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{(K H')^2}\text{; donde}$$

δ_b, factor de amplificación de momentos para marcos contraventeados.

δ_s, factor de amplificación de momentos para marcos no contraventeados.

K, se tomará igual a 1, a menos que el análisis demuestre poder usar un valor menor.

M_{2b}, momento mayor en los extremos de un elemento producido por cargas que no causan desplazamiento lateral apreciable.

M_{2s}, momento mayor producido por cargas que sí causan desplazamiento lateral apreciable.

Además,

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$$

Para los demás casos, C_m, se tomará igual a 1.0.

M_1, momento menor en los extremos de un elemento debido a cargas que no causan desplazamiento lateral apreciable.

Cuando hay posibilidad de desplazamiento lateral o cargas transversales entre apoyos,

$$C_m = 1$$

y

$$EI = \frac{E_c I_g/5 + E_s I_{se}}{1 + \beta_d}$$

β_d, relación entre el momento máximo debido a la carga muerta y el momento máximo debido a la carga total, con valor siempre positivo.

I_g, momento de inercia de la sección total de concreto con respecto al eje centroidal, sin tomar en consideración el refuerzo de acero.

I_{se}, momento de inercia del refuerzo de acero respecto al eje centroidal de la sección transversal del elemento.

E_c, módulo de elasticidad del concreto.

E_s, módulo de elasticidad del acero.

A continuación, se estudiarán las columnas cortas sometidas a carga excéntrica (*Flexión uniaxial y biaxial*), por presentar éstas mayor simplicidad que las columnas largas, donde intervienen condiciones de esbeltez que las convierten en columnas mucho más complejas.

7.2. Columnas cortas cargadas excéntricamente con flexión uniaxial (Teoría Elástica).

El Reglamento ACI especifica:

"Para columnas con carga excéntrica donde la flexión ocurre en un plano principal y cuya relación de excentricidad, e/b, no sea mayor de 2/3 en cualquier dirección, la columna se proyectará con la ecuación

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

Cuando la flexión ocurre en ambos ejes principales, la ecuación será

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bxx}}{F_{bxx}} + \frac{f_{bYY}}{F_{bYY}} \leq 1.0 \text{ "}.$$

donde

f_a, esfuerzo unitario axial.

F_a, esfuerzo axial admisible.

f_b, esfuerzo unitario de tracción.

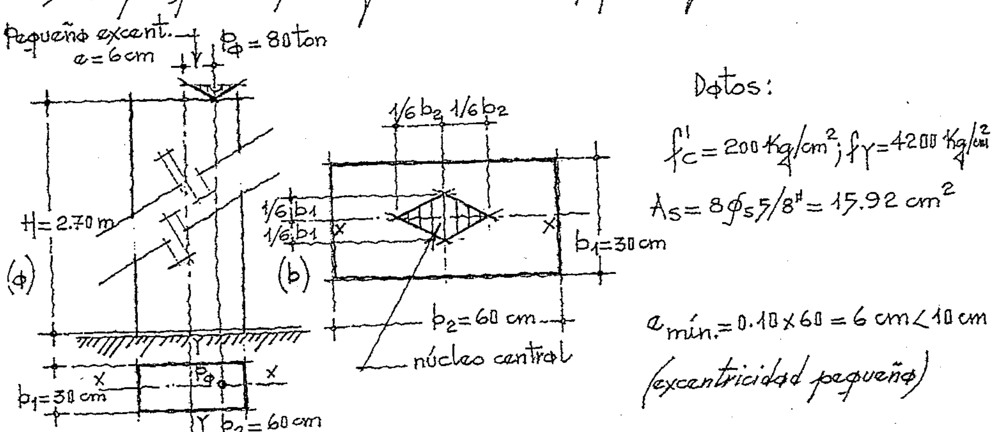
F_b, esfuerzo admisible de flexión.

Ejemplo ilustrativo (Excentricidad pequeña)

Se tiene una columna rectangular que recibe una carga de 80 ton y una excentricidad mínima sobre el eje x-x de acuerdo con la especificada por reglamentación, figs. 7.5 y 7.6.

Fig. 7.5. Columna estribada con carga excéntrica, (a).

Fig. 7.6. Planta mostrando el núcleo central, (b).



Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

$A_S = 8\phi 5/8'' = 15.92\ cm^2$

$e_{mín.} = 0.10 \times 60 = 6\ cm < 10\ cm$

(excentricidad pequeña)

Veamos si el área de acero cumple con el mínimo especificado, $\rho_s = \frac{15.92\ cm^2}{30\times60} = 0.0088 < 0.01$ (el área de acero no cumple con el 1%).

Aumentamos el número de varillas a 10 ϕ_s #6

$\therefore \frac{10\times2.87\ cm^2}{1800\ cm^2} \simeq 0.016 = 1.6\% > 1\%$ (correcto)

Aplicando la ecuación dada por el reglamento ACI, se tiene:

$$\frac{f_a}{F_a}+\frac{f_b}{F_b}\leq 1.0$$

$$f_a = \frac{\text{Carga axial}}{\text{Area total de concreto}} = \frac{P_a}{A_g} = \frac{80\,000\ Kg}{1800\ cm^2} \simeq 44.45\ Kg/cm^2$$

$$F_a = \frac{\text{Carga axial admisible}}{\text{Area total de concreto}} = \frac{0.22 f'_c A_g + 0.30 f_y A_s}{A_g} \simeq 55.15\ Kg/cm^2$$

$$f_b = \frac{P_a \cdot e}{S}, \quad y \quad S = \frac{I}{z}$$

donde

$$S\ (\text{Módulo de sección}) = \frac{\text{Momento de inercia}}{\text{Distancia entre el eje que pasa por el centro de gravedad y la fibra más alejada de concreto}},$$ por tanto,

fig. 7.7.

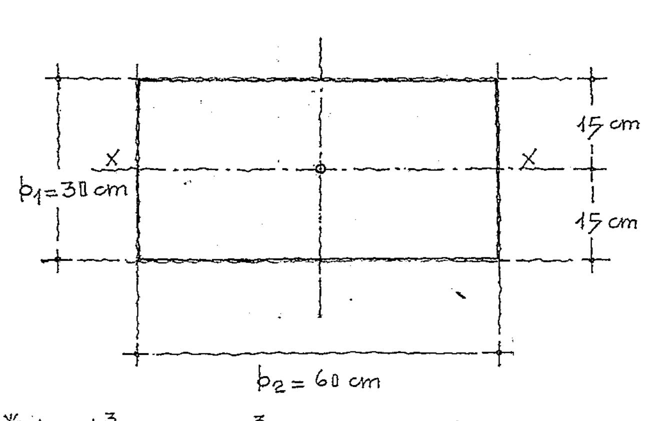


Fig. 7.7. Planta de la columna estribada para obtener el momento de inercia.

$$\therefore I^* = \frac{b_2 \cdot b_1^3}{12} = \frac{60\times30^3}{12} = 135\,000\ cm^4$$

$$S = \frac{135\,000}{15} = 9000\ cm^3$$

y

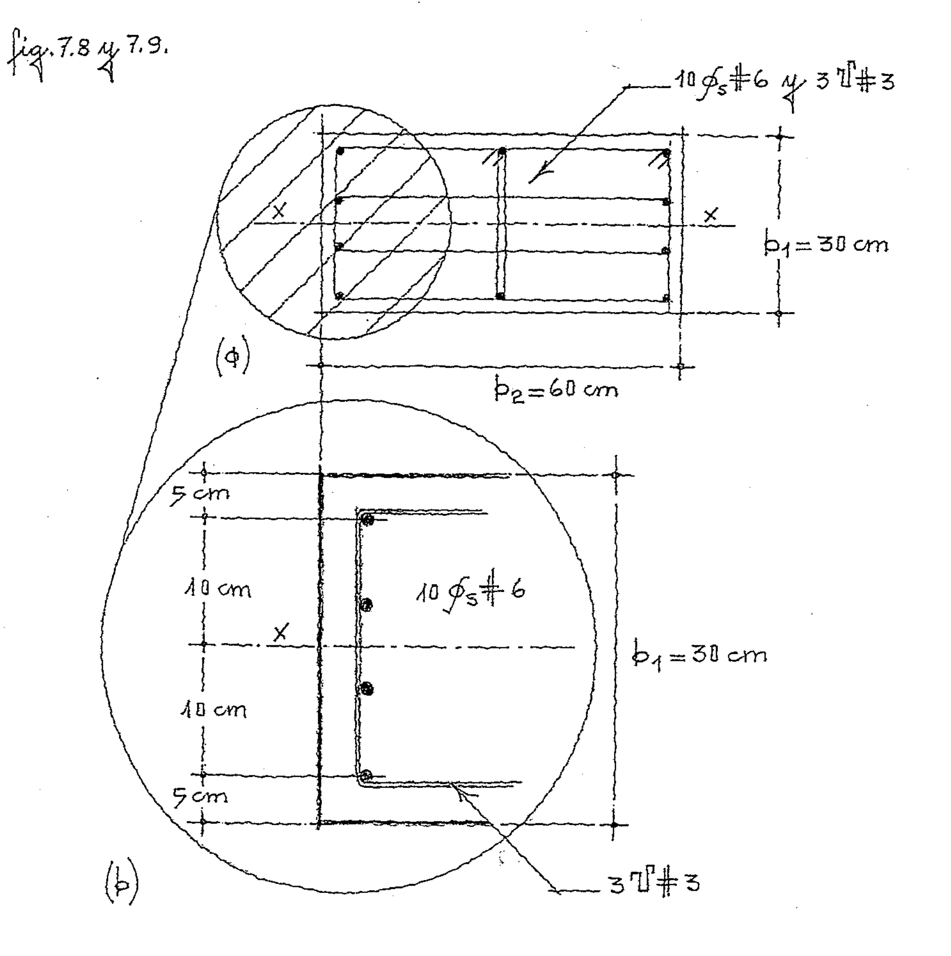
$$f_b = \frac{P_a \cdot e}{S} = \frac{80000\times6}{9000} \simeq 53.34\ Kg/cm^2$$

En el ejemplo no se sumó el área de acero, si lo sumamos se incrementará el momento de inercia y bajará el valor de f_b, veamos la

fig. 7.8 y 7.9.

Fig. 7.8. Columna estribada vista en planta, (a).

Fig. 7.9. Detalle de la columna estribada; se muetran los medidas para calcular el momento de inercia, (b).



$$I_T = I_c + I_s = 135\,000 \text{ cm}^4 + (n-1) A_s \times 10^2 \quad y,$$

$$= 135\,000 + (14-1)\,28.70 \times 100$$

$$\therefore \; I_T = 135\,000 + 37\,300 = 172\,300 \text{ cm}^4 \quad \text{por tanto}$$

$$S = \frac{172\,300}{15} \simeq 11490 \text{ cm}^3$$

$$f_b = \frac{P_a \cdot e}{S} = \frac{80\,000 \times 6}{11490} \simeq 41.80 \text{ Kg/cm}^2 \; y \; F_b = 0.45 \times 200 = 90 \text{ Kg/cm}^2$$

Finalmente se tiene:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{44.45}{55.15} + \frac{41.80}{90} = 0.80 + 0.46 = 1.26 > 1.0$$

El resultado demuestra claramente que el primer término de la ecuación $\left(\frac{f_a}{F_a}\right)$ está mal propuesto, pues la columna recibe una carga relativamente fuerte, para una sección transversal de concreto pequeña.

La capacidad de carga de la columna queda finalmente en:

$$P_{adm.} = \frac{80000}{1.26} \simeq 63500 \text{ Kg.}$$

Separación de estribos:

El Reglamento de Construcciones para el D.F., establece "En miembros a flexocompresión donde la carga axial de diseño sea mayor que

$\frac{A_g f'_c}{10}$, se cumplirá con las especificaciones siguientes:

1. Dimensión tranversal mínima de la columna, 30 cm.
2. El área transversal de concreto, A_g, no será menor que

$$\frac{P_a}{0.5 f'_c}$$

3. La relación entre el lado menor de la columna, b_1, y el lado mayor, b_2, no será menor de 0.4.
4. La relación entre la altura libre, H, y la menor dimensión de la columna, b_1, no excederá de 20."

Para nuestro ejemplo

$80000 > \frac{1800 \times 200}{10} \therefore 80000 > 36000$, será necesario cumplir con las especificaciones dadas.

1. Dimensión transversal mínima, 30 cm (correcto)
2. $A_g > \frac{80000}{0.5 \times 200} \therefore 1800 > 800$ (correcto)
3. $0.4 < \frac{b_1}{b_2} \therefore 0.5 > 0.4$ (correcto)
4. $\frac{H}{b_1} < 20 \therefore 9.0 < 20$ (correcto)

En las figs. 7.10 y 7.11, se muestra la separación de estribos, veamos:

$s \leq 850/\sqrt{f_y} = 13 \times 1.91 \text{ cm} \simeq 25 \text{ cm}$

$s \leq 48 \times 0.95 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \simeq 46 \text{ cm}$

$s \leq \frac{b_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 15 \text{ cm}$

Arriba y abajo de la intersección con la columna se colocarán a 7.5 cm.

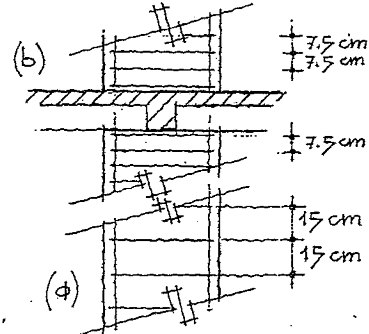


Fig. 7.10. En la parte central de la longitud del fuste, los estribos se colocan a cada 15 cm, (a).

Fig. 7.11. En las otras zonas se colocarán a 7.5 cm, (b).

7.3. Columnas cortas cargadas excéntricamente con flexión en ambos ejes (teoría Elástica)

Ejemplo ilustrativo (excentricidad pequeña en ambos ejes)

En las figs. 7.12 a 7.14, se muestra una columna rectangular que recibe cargas excéntricas en ambos ejes.

Se supone un porcentaje de acero de 1.8 % aproximadamente.

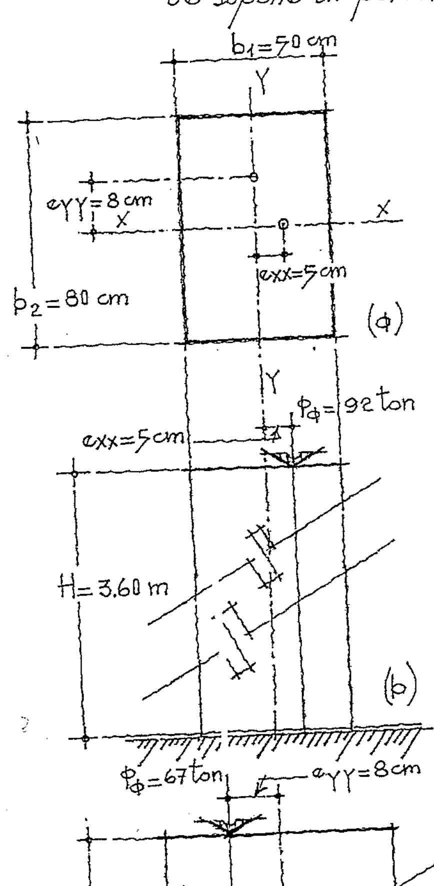


Fig. 7.12. Planta de la columna mostrando la posición de las cargas excéntricas, (a).

Fig. 7.13. Columna estribada con carga excéntrica, (b).

Fig. 7.14. Columna estribada con carga excéntrica, (c).

Datos:

$$f'_c = 200\ Kg/cm^2;\ f_Y = 4$$

$$\rho_s = 1.8\ \%$$

$$A_s = \rho\, b_1 b_2 = 0.018 \times 50 \times 80 = 72\ cm^2$$

$$\text{con } \phi_s \# 8 = \frac{72\ cm^2}{5.07\ cm^2} \simeq 14\ \phi_s$$

$$f_a = \frac{P_{aXX} + P_{aYY}}{A_g} = \frac{92 + 67}{50 \times 80} = 39.75\ Kg/cm^2$$

$$F_a = \frac{0.22 f'_c A_g + 0.30 f_Y A_s}{A_g},\ \text{y}$$

$$= \frac{0.22 \times 200 \times 4000 + 0.30 \times 4200 \times 72}{4000}$$

$$\therefore F_a = 66.68\ Kg/cm^2$$

En las figs. 7.15 y 7.16, se muestran los armados para calcular ambos momentos de inercia, veamos:

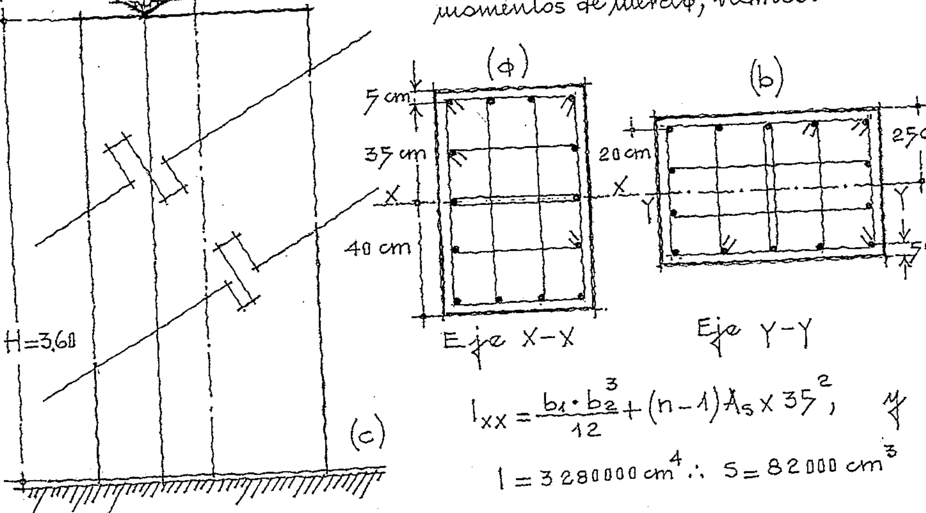


Fig. 7.15. Medidas de la posición de las varillas para obtener el (I), a.

Fig. 7.16. Posición de las varillas para obtener el (I), b.

$$I_{XX} = \frac{b_1 \cdot b_2^3}{12} + (n-1) A_s \times 35^2,\ \text{y}$$

$$I = 3\,280\,000\ cm^4 \therefore S = 82\,000\ cm^3$$

$$f_{bxx} = \frac{P_a \cdot e}{S} = \frac{92000 \times 5\,cm}{82000} \simeq 5.61\ Kg/cm^2$$

Obtención del momento de inercia en eje Y-Y

$$I_{YY} = \frac{b_2 \cdot b_1^3}{12} + (n-1)A_s \times 20^2 = \frac{80 \times 50^3}{12} + (13)\,72 \times 400 \simeq 1207700\ cm^4$$

$$\therefore\ S = \frac{I}{z} = \frac{1207700}{25} \simeq 48300\ cm^3$$

$$f_{bYY} = \frac{P_a \cdot e}{S} = \frac{67000 \times 8\,cm}{48300} \simeq 11.10\ Kg/cm^2$$

$$F_{bxx} = F_{bYY} = 0.45\, f'_c = 0.45 \times 200 = 90\ Kg/cm^2$$

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bxx}}{F_{bxx}} + \frac{f_{bYY}}{F_{bYY}} \leq 1.0\ \therefore\ \frac{39.75}{66.68} + \frac{5.61}{90} + \frac{11.10}{90}$$

$$0.60 + 0.07 + 0.13 = 0.80 < 1.0$$

La sección supuesta se encuentra sobrada un 20%.

Los resultados nos indican que las cargas sobre la columna no se encuentran bien distribuidas. Sin duda, lo ideal será cuando cada resultado de la ecuación se aproxime al 33%.

Cálculo de la separación de estribos, figs. 7.17 y 7.18.

$$s \leq 850/\sqrt{f_Y} = 13 \times 2.54 \simeq 33\ cm$$

$$s \leq 48 \times 0.95\ \ldots\ \simeq 46\ cm$$

$$s \leq \frac{b_1}{2}\ \ldots\ \simeq 25\ cm$$

Fig. 7.17. Armados en la columna, vista en corte longitudinal, (a).

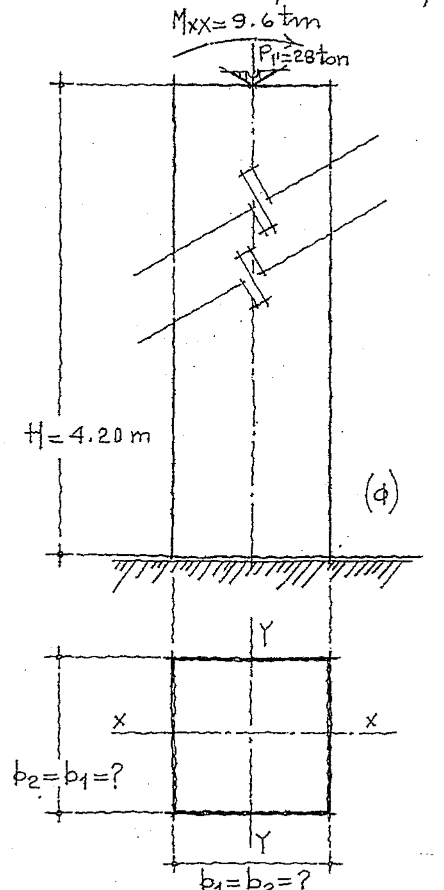
Fig. 7.18. Armados de la columna, vista en planta, (b).

7.4. Columna corta cargada excéntricamente con flexión uniaxial (teoría Elástica)

Ejemplo ilustrativo (excentricidad grande)

Una columna recibe una carga de 28 ton y también un momento de 9.6 tm.

Calcular la sección transversal de la columna suponiéndola de sección cuadrada, figuras 7.19 y 7.20.



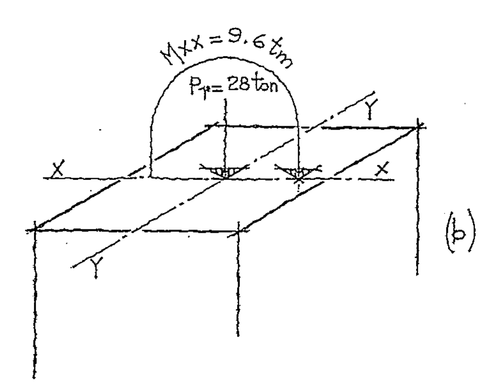


Fig. 7.19. Columna sometida a carga axial y momento sobre el eje X-X, (a).

Fig. 7.20. Detalle de la columna estribada, (b).

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm² ; $f_Y = 4200$ Kg/cm²

$\rho_s \simeq 1.8\%$

Cuando se trata de columnas sometidas a excentricidades grandes ($e > 2/3$ en ambos ejes del elemento), el reglamento ACI, dice:

"Para diseñar una columna sometida a una carga excéntrica, la sección transversal preliminar, podrá calcularse utilizando la ecuación para una carga axial equivalente."

$$P_{ae} = P_r\left(1 + \frac{Be}{b_1}\right), \text{ donde}$$

B, coeficiente cuyo valor puede tomarse entre 3 y 4, para columnas ortogonales y entre 5 y 6 para las zunchadas. . . . . P_r, carga axial real.

Valor de la excentricidad

$$e = \frac{M}{P_u} = \frac{960\,000}{28\,000} \simeq 34.3 \text{ cm}$$

Para aplicar la ecuación necesitamos conocer el valor de la relación $\frac{e}{b_1}$, pero se desconoce, b_1, sin embargo, se acostumbra tantear con un valor menor que uno; para nuestro ejemplo suponemos:

$$\frac{e}{b_1} \simeq 0.85$$

$$P_{\phi e} = 28\,000\left(1 + B\frac{e}{b_1}\right) = 28\,000\,(1 + 3.4 \times 0.85) \simeq 108\,900 \text{ Kg}$$

$$P_{\phi e} = A_g\left(0.18 f'_c + 0.40 f_y \times 0.018\right) = A_g\,(36 + 30)$$

$$\therefore A_g = \frac{P}{66} = \frac{108\,900}{66} = 1650 \text{ cm}^2$$

$$\therefore b_1 = b_2 = \sqrt{1650} \simeq 40.6 \text{ cm}$$

Revisión de la relación supuesta

$$\frac{e}{b_1} = \frac{34.3}{40.6} \simeq 0.845 \simeq 0.85^{*}$$

* Cuando entre el valor obtenido y el supuesto haya mucha diferencia, será necesario seguir tanteando con otros valores, hasta que ambos resultados sean prácticamente iguales.

Cálculo del area de acero

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_1 \cdot b_2} \quad \therefore A_s = 0.018 \times 40.6^2 = 29.67 \text{ cm}^2$$

$$\text{con } \phi_s\, 7/8'' = \frac{29.67}{3.87} \simeq 8\,\phi_s\, \#\, 7$$

$$f_\phi = \frac{P_u}{A_g} = \frac{28\,000}{1650} \simeq 16.97 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_\phi = \frac{0.18 \times 200 \times 1650 + 29.67 \times 4200 \times 0.40}{1650} \simeq 66.21 \text{ Kg/cm}^2$$

Véase la fig. 7.21, para calcular los momentos de inercia

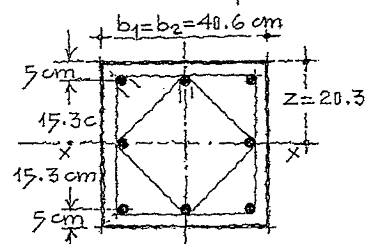


Fig. 7.21. Armados y distancias para obtener los momentos de inercia.

$$I_T = I_c + I_s$$

$$\therefore I_c = \frac{40.6 \times 40.6^3}{12} \simeq 226400 \text{ cm}^4$$

y, $I_s = (n-1) A_s \times 15.3^2 = 13 \times 29.67 \times 234$

$$\therefore I_s = 90290 \text{ cm}^4$$

$$I_T = 226400 + 90290 = 316690 \text{ cm}^4$$

$$S = \frac{I_T}{z} = \frac{316690}{20.3} \simeq 15600 \text{ cm}^3$$

$$f_b = \frac{960\,000}{15600} \simeq 61.54 \text{ Kg/cm}^2$$

y,

$$F_a = 0.45 f'_c = 0.45 \times 200 = 90 \text{ Kg/cm}^2$$

Finalmente se tiene:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0 \quad \therefore \quad \frac{16.97}{66.21} + \frac{61.54}{90} = 0.256 + 0.684$$

$$\therefore 0.94 < 1.0$$

La columna se encuentra sobrada en términos generales con un 6%.

En las figs. 7.22 a 7.24, se muestran los armados finales y la separación de estribos, veamos

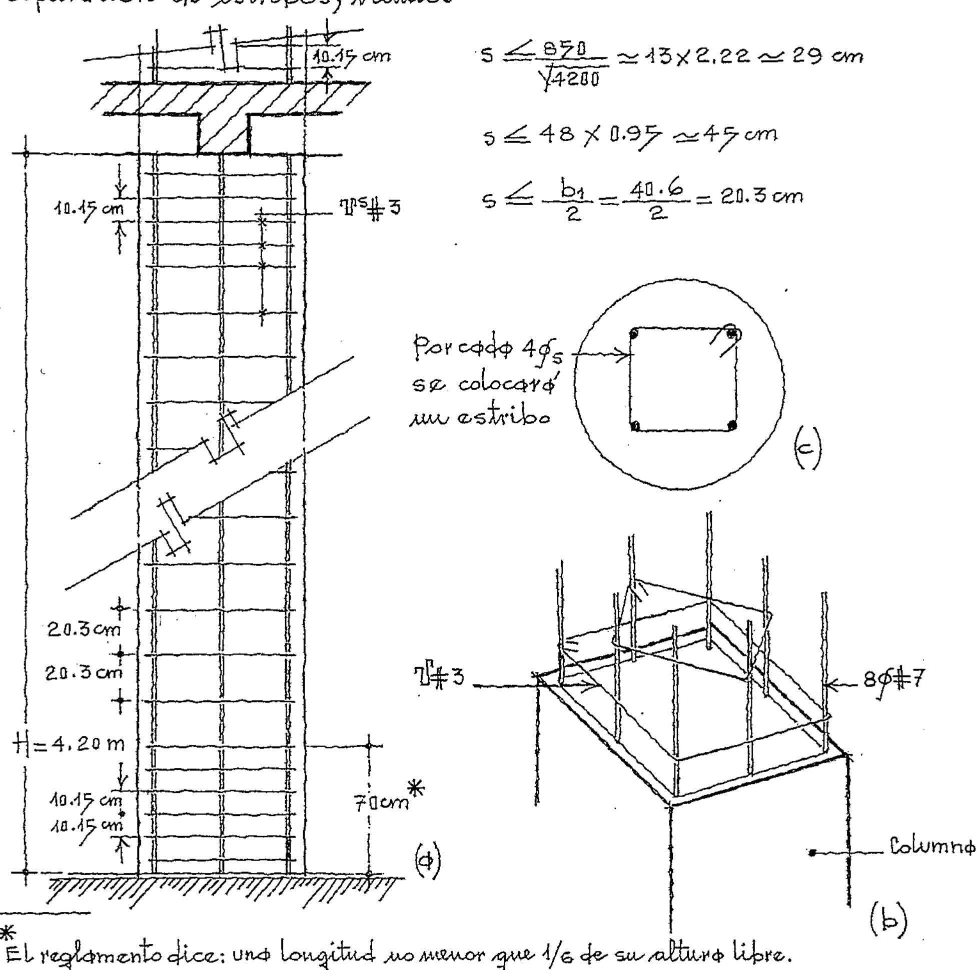


Fig. 7.22. Columna estribada, mostrando armados, (a).

Fig. 7.23. Detalle de la columna visto en perspectiva, (b).

Fig. 7.24. Detalle. Cada estribo abrazará como máximo a cuatro varillas longitudinales, (c).

* El reglamento dice: una longitud no menor que 1/6 de su altura libre.



7.5. Columna zunchada con carga axial y un momento sobre el eje X-X (*Teoría Elástica*)

Ejemplo ilustrativo (excentricidad grande)

Una columna circular recibe una carga de 92 ton y un momento de 22.6 tm sobre el eje X-X.

Diga que sección necesita la columna para soportar la carga y el momento dados, figs. 7.25a y b.

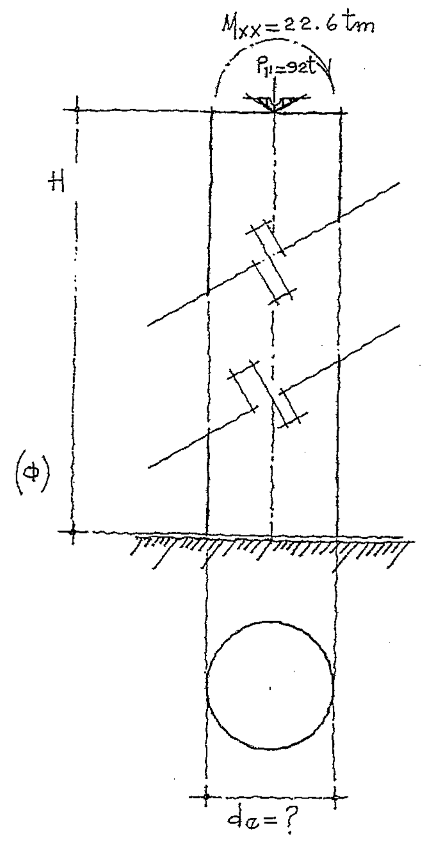


Fig. 7.25a. Columna zunchada, vista en corte longitudinal, (a).

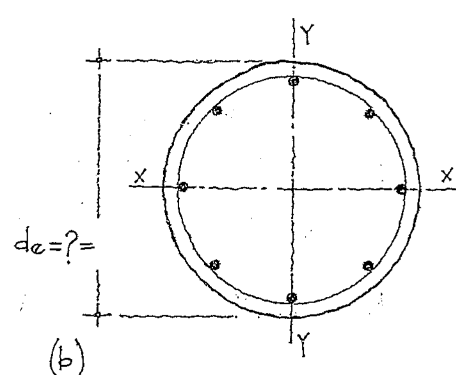


Fig. 7.25b. Columna zunchada vista en planta, (b).

Datos:

$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2;\ f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\rho_s \simeq 2\%$$

$$e = \frac{M}{P_a} = \frac{2\,260\,000}{92\,000} \simeq 24.6 \text{ cm}$$

Para estas columnas el reglamento especifica:

$$P_{ae} = P_1\left(1 + B\frac{e}{d_e}\right), \text{ donde}$$

P_{ae}, carga axial equivalente

P_1, carga axial real

e, excentricidad

d_e, diámetro exterior de la columna

B, valor constante que se toma entre 5 y 6.

Para solucionar el problema suponemos, primeramente, una relación de:

$$\frac{e}{d_e} \simeq 0.60 \text{ y } B = 5.6$$

$$P_{ae} = P_1(1 + 5.6 \times 0.60) = 92000\,(4.36)$$

$$\therefore\ P_{ae} \simeq 401000 \text{ Kg}$$

$$P_{\phi e} = A_g\left(0.25 f'_c + 0.40 f_Y \rho_s\right) = A_g\left(50 + 0.40 \times 4200 \times 0.02\right)$$

$$\therefore\ 401\,000 = A_g\left(50 + 33.6\right) = 83.60\, A_g$$

$$y,\quad A_g = \frac{401\,000}{83.60} \simeq 4797\ cm^2$$

$$A_g = \frac{\pi d^2}{4}\quad \therefore\ 4797 \times 4 = 3.1415\,(d)^2$$

$$d \simeq 78\ cm$$

Verificación de la relación supuesta

$$\frac{e}{d_e} = \frac{24.60}{78} = 0.315 < 0.60 \text{ (La suposición resultó muy diferente)}$$

2a. Suposición:

$$\frac{e}{d_e} \simeq 0.40 \quad y \quad B = 5.0$$

$$P_{\phi e} = 92\,000\,(1 + 5 \times 0.40) = 276\,000\ Kg$$

$$\therefore\ A_g = \frac{276\,000}{83.60} \simeq 3300\ cm^2$$

$$3300 = \frac{\pi d^2}{4}\ \therefore\ d \simeq 64.80\ cm$$

$$\frac{e}{d_e} = \frac{24.60}{64.80} \simeq 0.38 \sim 0.40 \text{ supuesto}$$

Cálculo del área de acero, fig. 7.26.

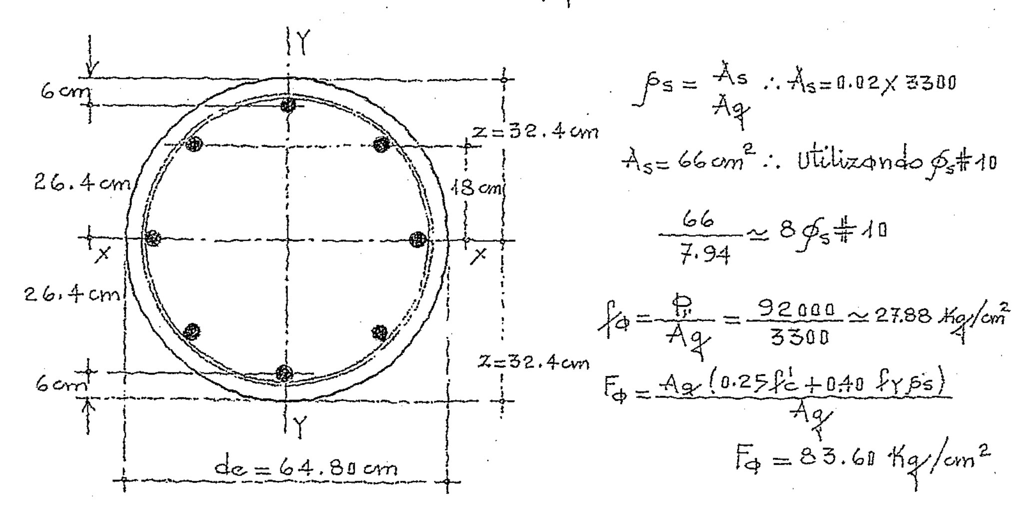


Fig. 7.26. Colocación de los varillas y distancias para calcular los momentos de inercia. Planta de la columna zunchada.

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_g}\ \therefore\ A_s = 0.02 \times 3300$$

$A_s = 66\ cm^2\ \therefore$ Utilizando $\phi_s \# 10$

$$\frac{66}{7.94} \simeq 8\ \phi_s \# 10$$

$$f_\phi = \frac{P_r}{A_g} = \frac{92\,000}{3300} \simeq 27.88\ Kg/cm^2$$

$$F_\phi = \frac{A_g\,(0.25 f'_c + 0.40\, f_Y \rho_s)}{A_g}$$

$$F_\phi = 83.60\ Kg/cm^2$$

Obtención de los momentos de inercia

$$I_c = \frac{\pi (d_e)^4}{64} = \frac{3.1415 \times 64.80^4}{64} = 865\,480\ cm^4$$

$$I_s = (n-1)\,2 \times 7.94 \times 26.4^2 = 143\,880\ cm^4$$

$$I_s = (n-1)\,2 \times 7.94 \times 18^2 = 66\,880\ cm^4$$

$$I_T = I_c + I_s = 1076\,240\ cm^4\quad \therefore\ S = \frac{1076\,240}{32.40} \simeq 33\,200\ cm^3$$

$$f_b = \frac{P_r \cdot e}{S} = \frac{92000 \times 24.6}{33200} \simeq 68.17\ Kg/cm^2$$

$$F_b = 0.45\, f'_c = 0.45 \times 200 = 90\ Kg/cm^2$$

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0 \quad \therefore \quad \frac{27.88}{83.60} + \frac{68.17}{90} = 1.09 > 1.0$$

La capacidad de carga es de

$$\frac{92000}{1.09} \simeq 84400\ Kg$$

Se puede intentar otro tanteo para lograr mayor aproximación en la capacidad de carga de la columna, pero el autor considera que no es necesario.

A continuación calculamos el refuerzo de la hélice; figuras 7.27 y 7.28.

Y

6 cm

X X

$d'_e = 52.8$ cm

$d_e = 64.8$ cm

6 cm

(a)

Fig. 7.27. Dimensiones de la columna para calcular el refuerzo de la hélice, (a).

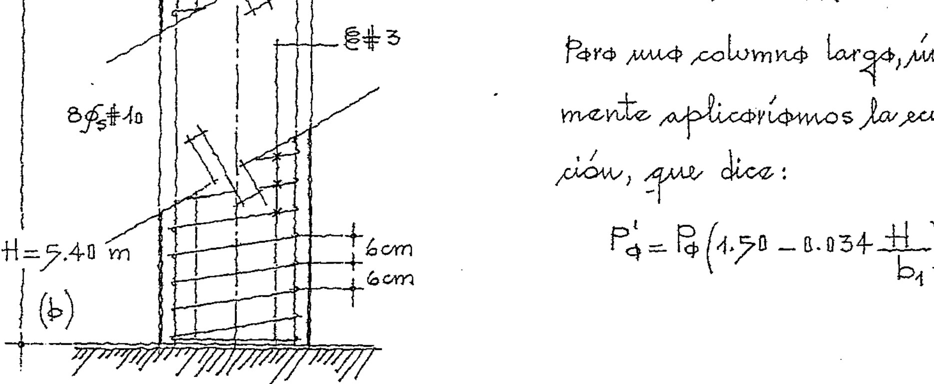


Fig. 7.28. Corte longitudinal de la columna mostrando armados y dimensiones, (b).

$$\rho_s = 0.45\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f'_c}{f_Y}$$

$$0.45\left(\frac{3300}{2189.5} - 1\right)\frac{200}{4200}$$

$$\therefore \rho_s \simeq 0.01 = 1\%$$

Con espiral de 3/8", se tiene

$$\rho_s = \frac{4 A_s \pi (d'_e - \phi\, 3/8")}{paso\,(d'_e)^2}$$

$$= \frac{4 \times 0.71 (52.8 - 0.95)}{paso\,(2788)},$$

$$0.01 \cdot paso\,(2788) = 147.25$$

$$\therefore paso = \frac{147.25}{27.88} \simeq 6.0\ cm$$

La columna es corta.

Para una columna larga, únicamente aplicaríamos la ecuación, que dice:

$$P'_a = P_a\left(1.50 - 0.034\frac{H}{b_1}\right)$$

7.6. Efectos de esbeltez en las columnas.

Ejemplo ilustrativo (Teoría Elástica)

Se tiene una estructura con varios niveles y se quiere calcular la longitud efectiva de las columnas (H'), en el eje B, tramos 1-2 y 2-3. Las columnas se consideran restringidas contra rotación.

En las figs. 7.29 a 7.32, se muestran los datos del problema.

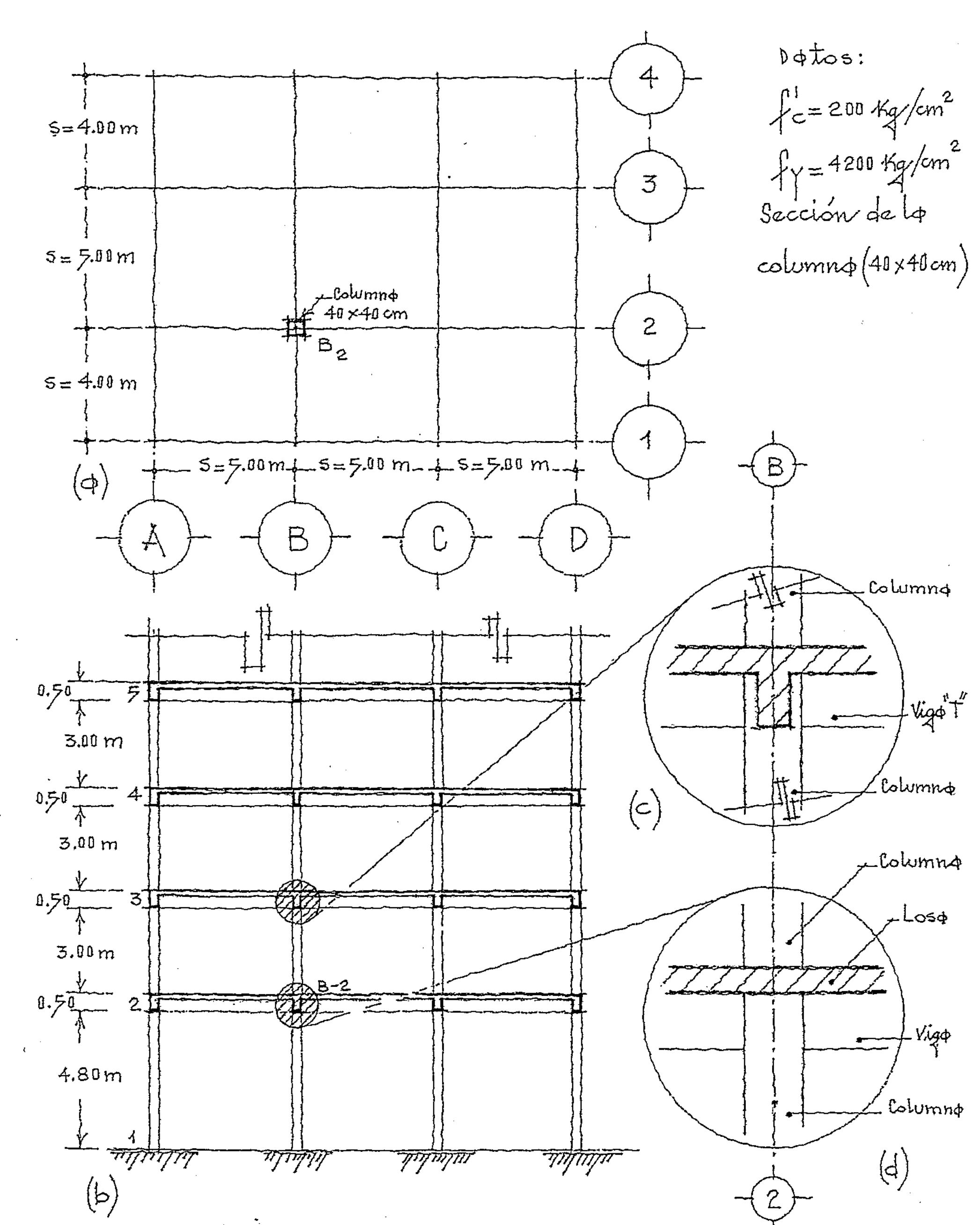


Fig. 7.29. Planta que muestra la estructura de un edificio de varios niveles, (a).

Fig. 7.30. Corte transversal de la estructura, (b).

Fig. 7.31. Corte transversal del nudo B-2, (c). Detalle.

Fig. 7.32. Corte longitudinal del nudo 2-B, (d). Detalle.

Cálculo del ancho del patín, figs. 7.33 y 7.34.

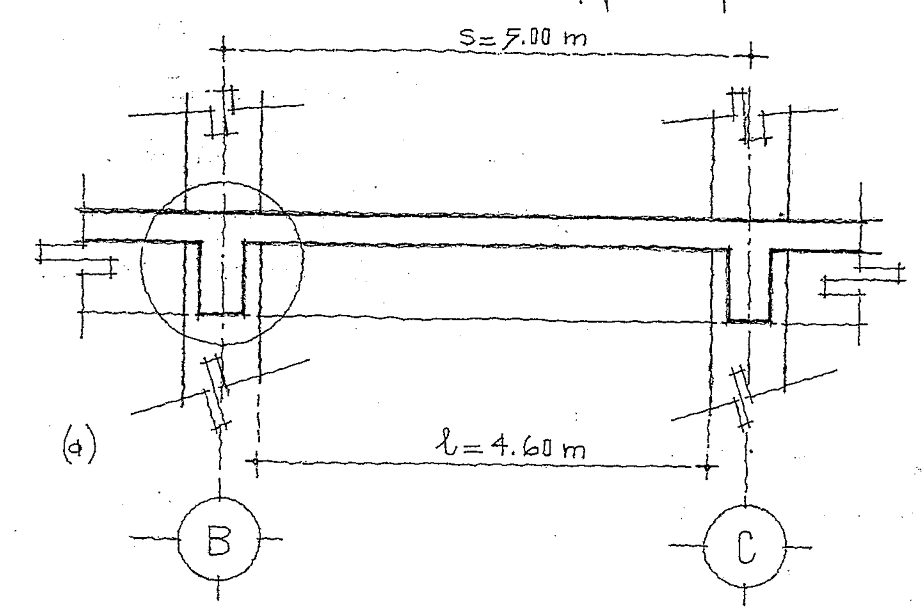


Fig. 7.33. Corte de un entre-eje de la estructura, (a).

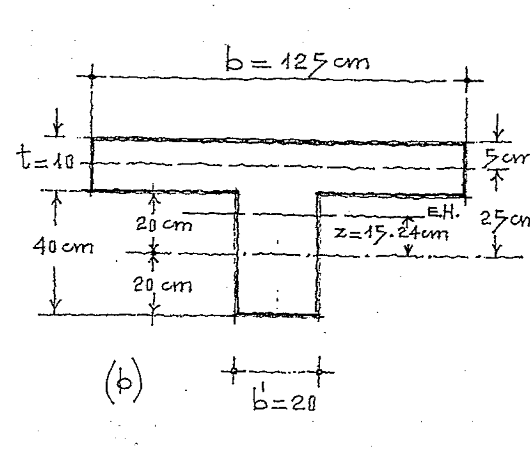


Fig. 7.34. Ancho efectivo del patín en la viga "T", (b).

1. $\frac{l}{2} = \frac{460}{2} = 230$ cm

2. $\frac{Claro}{8} - \frac{b'}{2} = \frac{500}{8} - \frac{20}{2} = 52.5$

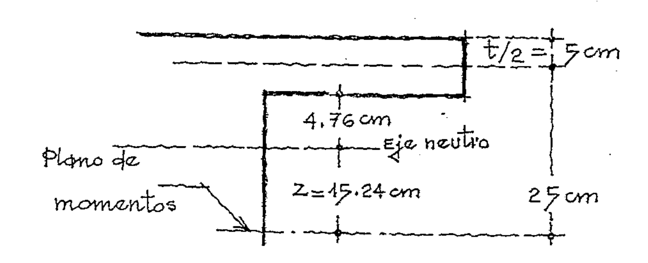
3. $8(t) = 8 \times 10 = 80$ cm

No excederá de 1/4 del claro de la viga, ∴ $b = \frac{500}{4} = 125$ cm

En este ejemplo, la especificación (3) también da como resultado 125 cm

Obtención del plano neutro en la viga "T":

$$z = \frac{125 \times 10 \times 25}{20 \times 40 + 125 \times 10} \simeq 15.24 \text{ cm}$$



Cálculo de la longitud efectiva de la columna:

Eje B (tramo, 1-2)*

$$I_{col.} = \frac{(b_1 = b_2)^4}{12} = \frac{(40)^4}{12} \simeq 213400 \text{ cm}^4$$

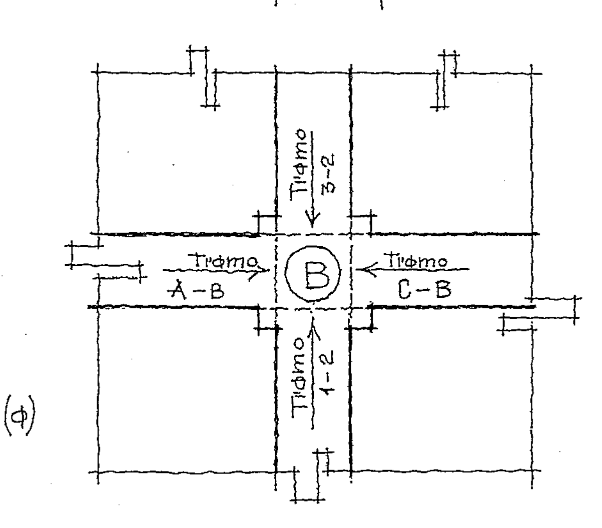
Eje B (tramo, 2-3)*

$$I_{col.} = \frac{(40)^4}{12} \simeq 213400 \text{ cm}^4$$

* En ambos niveles las columnas tienen igual sección. Cuando de un nivel a otro, las dimensiones de las columnas cambian, simplemente se tendrán diferentes momentos de inercia.

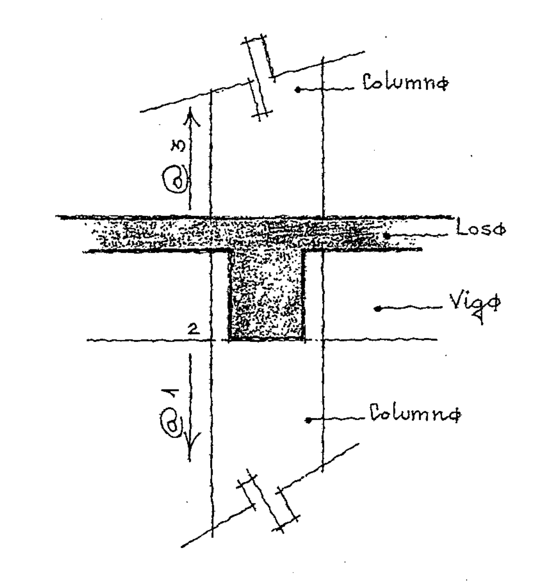
En el nudo 2 y 3 del eje B, se juntan dos columnas y dos trabes, veamos las figs. 7.35 y 7.36.

Fig. 7.35. Columna (B), Nudo (2). Planta, (a).



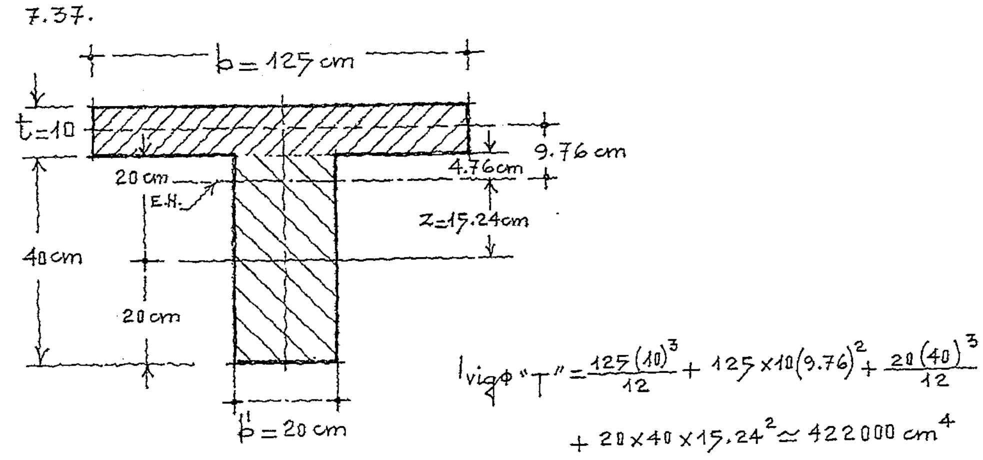
Piso (2) y piso (3) son iguales.

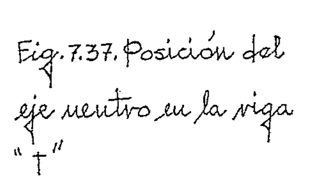
Fig. 7.36. Corte transversal del Nudo (2), (b).



Los tramos de vigas en ambos niveles son también iguales.

Obtención del momento de inercia de la viga "T", figura 7.37.




Fig. 7.37. Posición del eje neutro en la viga "T"

$$I_{viga\ "T"} = \frac{125(10)^3}{12} + 125 \times 10 (9.76)^2 + \frac{20(40)^3}{12} + 20 \times 40 \times 15.24^2 \simeq 422\,000\ cm^4$$

Obtención de la rigidez de la columna (K)

$$K_{col.} = \frac{I_{col.}}{H_{col.}} = \frac{213400}{480} \simeq 445\ cm^3 \text{ (Tramo de columna 1-2).}$$

$$K_{col.} = \frac{I_{col.}}{H_{col.}} = \frac{213400}{300} \simeq 712\ cm^3 \text{ (Tramo de columna 2-3).}$$

Obtención de la rigidez de las vigas (K)

$$K_{viga\ "T"} = \frac{I_{viga}}{S_{viga}} = \frac{422\,000}{500} = 844\ cm^3 \text{ (Tramo de viga A-B) y (B-C).}$$

$$K_{viga\ "T"} = \frac{I_{viga}}{S_{viga}} = \frac{422\,000}{450} \simeq 938\ cm^3 \text{ (Tramo de viga 1-2) y (2-3).}$$

Suma de rigideces (Columnas).

$$\Sigma K_{col.} = 445 + 712 = 1157\ cm^3$$

Suma de rigideces (Vigas).

$$\Sigma K_{vigas} = 844 + 938 = 1782\ cm^3$$

$$r' = \frac{\Sigma K_{col.}}{\Sigma K_{vigas}} = \frac{1157}{1782} \simeq 0.65 < 1.00$$

Al respecto el Reglamento de Construcciones ACI, especifica:

"La longitud efectiva se considerará igual a la longitud sin restricción (H) en columnas donde la estabilidad lateral se proporciona por medio de muros de cortante o contraventeo rígido, por unión a una estructura adyacente de suficiente estabilidad lateral o por cualquier otro medio que

proporcione soporte lateral adecuado".

El mismo reglamento dice:

a) El extremo de una columna se considerará articulado en un plano, si en ese plano (r') excede de 25.

b) Para columnas restringidas contra rotación en un extremo y articulado en el otro, la longitud efectiva será:

$$H' = 2H(0.78 + 0.22\, r') \geq 2H$$

El valor de (r') se tomará en el extremo restringido.

c) Para columnas restringidas contra rotación en ambos extremos, la longitud efectiva se tomará igual a:

$$H' = H(0.78 + 0.22\, r') \geq H$$

El valor de (r') es el promedio de los valores en los extremos de la columna.

d) Para columnas en voladizo, la longitud efectiva será de:

$$H' = 2H$$

Para nuestro ejemplo, se tiene:

$$H' = 4.80\,(0.78 + 0.22 \times 0.65) = 4.43\ \text{m} \quad (Col.\ B_2 \text{ tramo } 1\text{-}2)$$

$$H' = 3.00\,(0.78 + 0.22 \times 0.65) \simeq 2.77\ \text{m} \quad (Col.\ B_2 \text{ tramo } 2\text{-}3)$$

Como las columnas se encuentran restringidas contra rotación en sus extremos, la longitud efectiva se quedará sin sufrir modificación (Caso c).

$$\therefore\ H' = H = 4.80\ \text{m y } 3.00\ \text{m}$$

Una vez obtenido el valor de la longitud efectiva de la columna, ésta se calcula siguiendo los mismos pasos vistos en los ejemplos ilustrativos anteriores.

7.7. Efectos de esbeltez en las columnas.

Ejemplo ilustrativo (*Diseño Plástico*)

El edificio que se muestra en las figs. 7.38 a 7.41, cuenta con planta baja, más tres niveles y planta azotea.

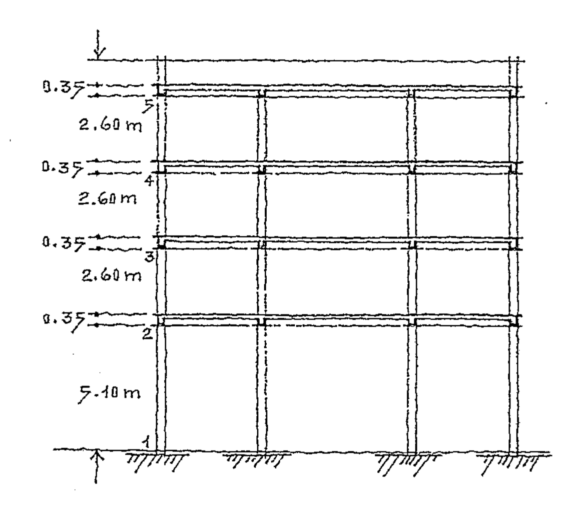
Calcular la longitud efectiva de las columnas en el eje C, tramos 3-4 y 4-5.

La estructura se supone que puede sufrir desplazamientos laterales.

Fig. 7.38. Planta del edificio mostrando los entre-ejes y sus dimensiones, (a).

5
4
3
2
1
5.00 m
5.00 m
5.00 m
5.00 m
Columna
35 X 65 cm
(a)
4.00 m
6.00 m
4.00 m
A
B
C
D

Fig. 7.39. Corte transversal de la estructura (b).



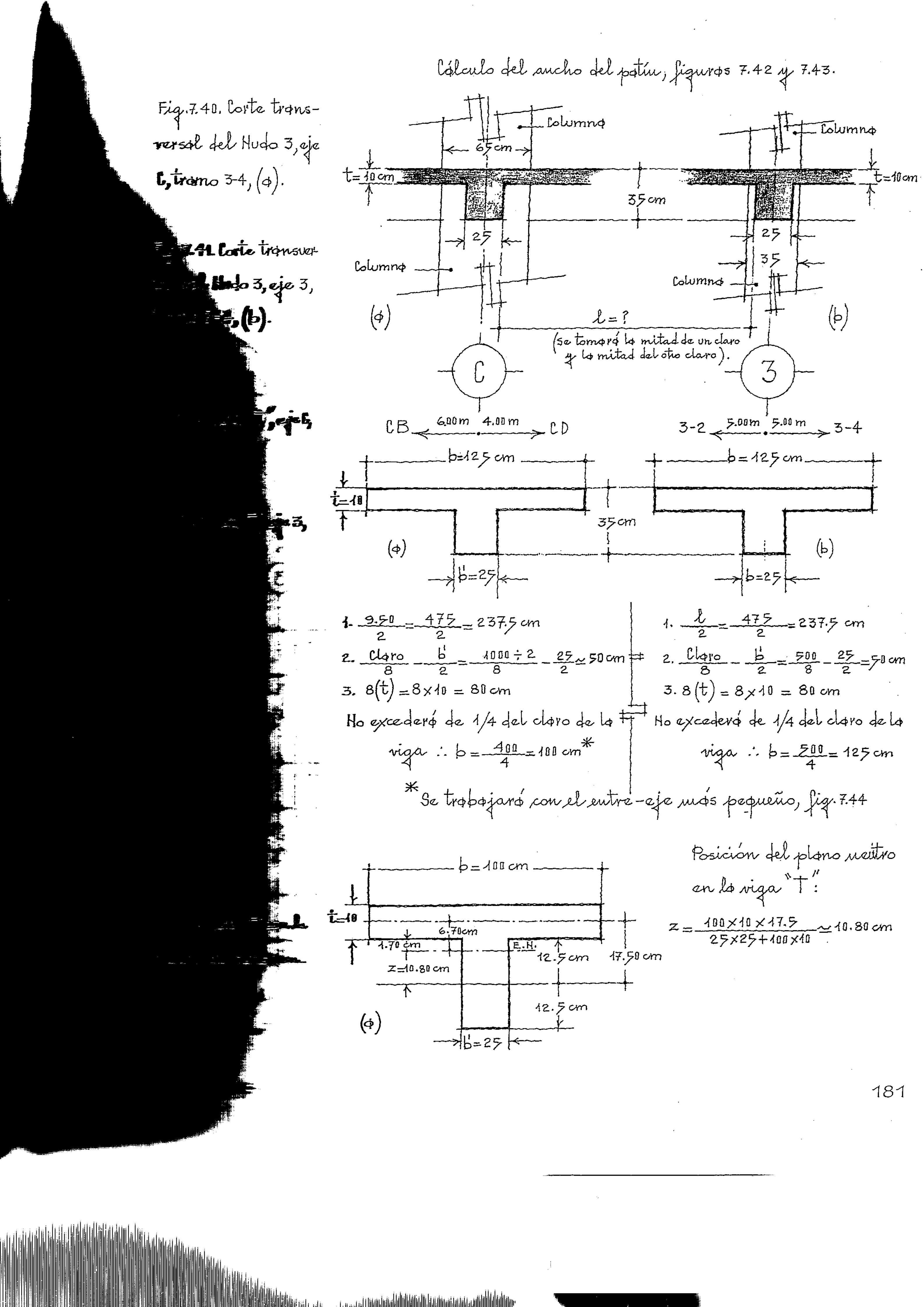


Fig. 7.40. Corte transversal del Nudo 3, eje C, tramo 3-4, (a).

Fig. 7.41 Corte transversal del Nudo 3, eje 3, ... (b).

Cálculo del ancho del patín, figuras 7.42 y 7.43.

1. $\frac{9.50}{2} = \frac{475}{2} = 237.5$ cm

2. $\frac{\text{Claro}}{8} - \frac{b'}{2} = \frac{1000 \div 2}{8} - \frac{25}{2} \simeq 50$ cm

3. $8(t) = 8 \times 10 = 80$ cm

No excederá de 1/4 del claro de la viga $\therefore b = \frac{400}{4} = 100$ cm*

1. $\frac{l}{2} = \frac{475}{2} = 237.5$ cm

2. $\frac{\text{Claro}}{8} - \frac{b'}{2} = \frac{500}{8} - \frac{25}{2} = 50$ cm

3. $8(t) = 8 \times 10 = 80$ cm

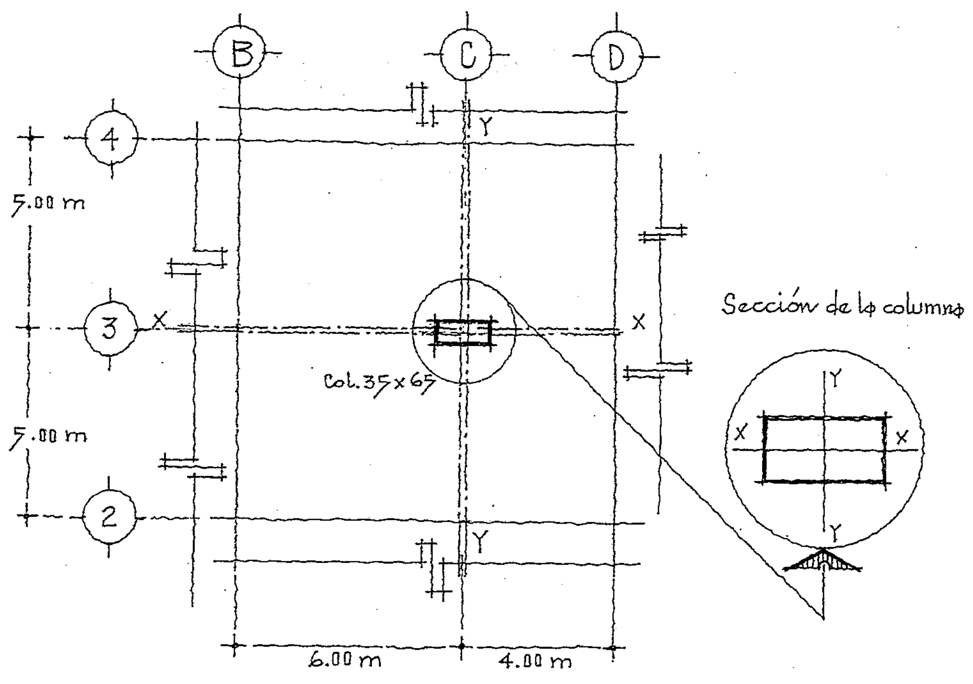
No excederá de 1/4 del claro de la viga $\therefore b = \frac{500}{4} = 125$ cm

*Se trabajará con el entre-eje más pequeño, fig. 7.44

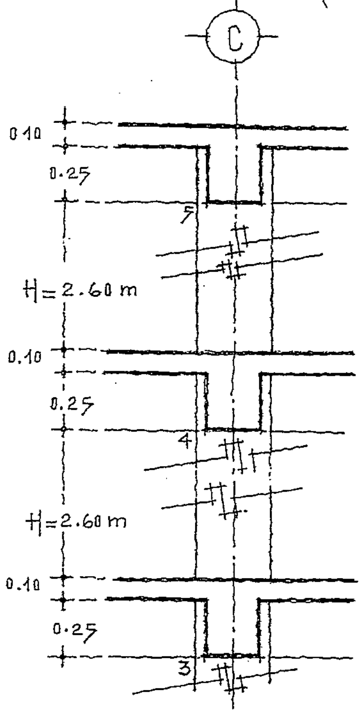
Posición del plano neutro en la viga "T":

$$z = \frac{100 \times 10 \times 17.5}{25 \times 25 + 100 \times 10} \simeq 10.80 \text{ cm}$$

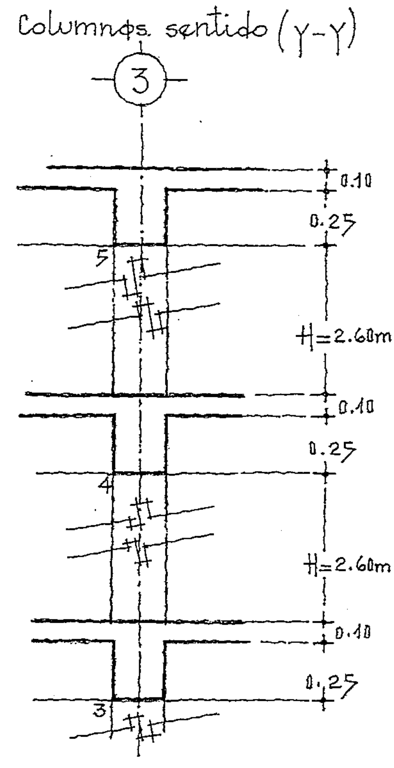
Obtención de los momentos de inercia en ambos sentidos de la estructura, figuras 7.45 a 7.47



Columnas sentido (X-X)



Columnas sentido (Y-Y)



Tramo (3-4); $I_{col.} = \frac{b_2 (b_1)^3}{12} = \frac{65 (35)^3}{12}$

$\simeq 232240 \text{ cm}^4 \therefore$ Tramo $(4\text{-}5) = 232240 \text{ cm}^4$

Tramo (3-4); $I_{col.} = \frac{b_1 (b_2)^3}{12} = \frac{35 (65)^3}{12}$

$\simeq 801000 \text{ cm}^4 \therefore$ Tramo $(4\text{-}5) = 801000 \text{ cm}^4$

Momento de inercia de la viga "T", fig. 7.48.

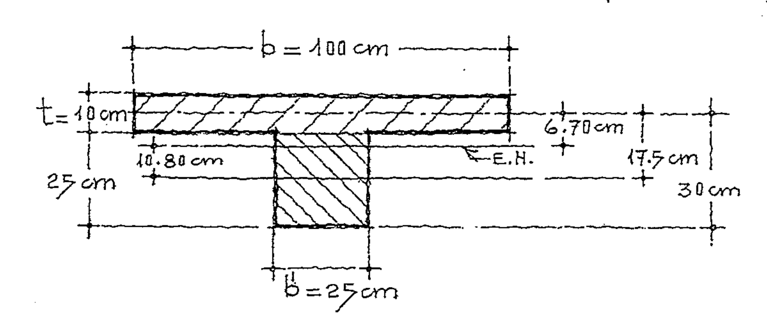


Fig. 7.48. Posición del eje neutro en la viga "T".

$$I_{viga\,"T"} = \frac{100(10)^3}{12} + 100\times 10\,(6.70)^2 + \frac{25(25)^3}{12} + 25\times 25\,(10.80)^2$$

$$= 8334 + 44890 + 32552 + 72900 \simeq 158680\ cm^4$$

Obtención de la rigidez en las columnas:

$$K_{col.} = \frac{I_{col.}}{H_{col.}}$$

Columna (C-3):

- Tramo 4-5* ∴ $K = \frac{232240}{260} \simeq 893\ cm^3$
- Tramo 4-3* ∴ $K = 893\ cm^3$

*Hay autores que toman como altura de la columna, la distancia que hay entre dos niveles de piso terminado. El autor toma la distancia que hay entre el nivel de piso terminado y la parte baja de la viga, es decir, (H).

$$K_{viga\,"T"} = \frac{I_{viga}}{S}$$

Viga "T":

- Tramo CB - CD ∴ $K = \frac{158680}{3.00 + 2.00^{**}} \simeq 318\ cm^3$
- Tramo 3-4 ; 3-2 ∴ $K = \frac{158680}{2.50 + 2.50^{**}} \simeq 318\ cm^3$

Como al nudo "C" le llegan dos columnas iguales, se tiene:

$$\Sigma K_{cols.} = 893 + 893 = 1786\ cm^3$$

Igualmente en el nudo "C" concurren cuatro medias vigas "T"

$$\Sigma K_{vigas\,"T"} = 318 + 318 = 636\ cm^3$$

** Los claros de las vigas en el ejemplo se tomaron a ejes; otros autores prefieren tomar como longitud de viga, los respectivos claros libres.

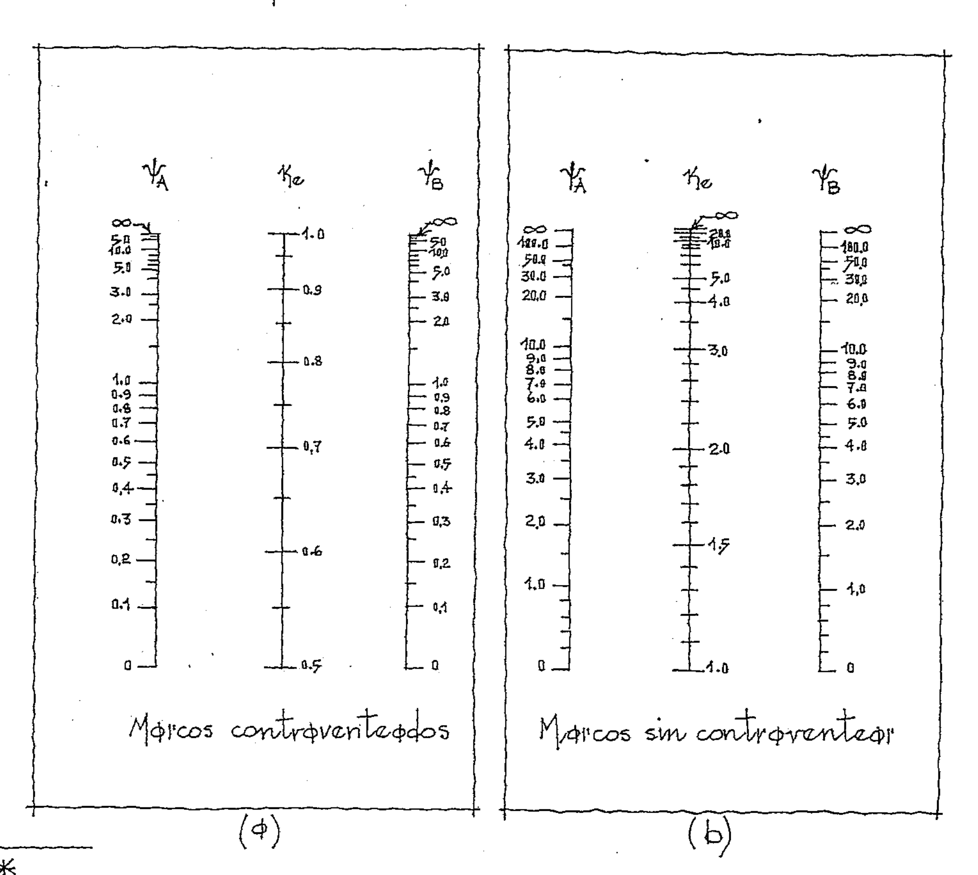
Para obtener los factores de longitud efectiva (Ke)*, el Comite ACI recomienda utilizar los Homogramas de Jackson y Moreland, figuras 7.49 y 7.50 para marcos contraventeados y no contraventeados respectivamente.

Resulta difícil en la práctica asegurar que un marco se encuentra completamente contraventeado o totalmente sin contraventear, por eso, el reglamento expone los factores de longitud efectiva para ambas condiciones (marcos contraventeados y marcos sin contraventear).

En efecto, el reglamento ACI menciona que en la práctica una estructura rara vez se encuentra un marco completamente contraventeado o completamente sin contraventear.

Fig. 7.49. Homograma de Jackson y Moreland para marcos contraventeados, (a).

Fig. 7.50. Homograma de Jackson y Moreland para marcos sin contraventear, (b).



* Se utiliza en los nomogramas el subíndice, e, en la literal, K, para diferenciarla del factor de rigidez o rigidez relativa (K).

Cuando no se quiere utilizar los nomogramas mencionados, el reglamento ACI, da como alternativa para obtener el factor de longitud efectiva de una columna (K_e), en estructuras contraventeadas, el menor valor de las dos expresiones siguientes:

a) $K_e = 0.7 + 0.05\,(\psi_A + \psi_B) \leq 1.0$

b) $K_e = 0.85 + 0.05\,\psi_{mín.} \leq 1.0$

Para estructuras no contraventeadas, la longitud efectiva de la columna se tomará igual a:

para $\quad \psi_m < 2.0 \quad \therefore\ K_e = \frac{20 - \psi_{AV}}{20}\sqrt{1+\psi_m}$

para $\quad \psi_m \geq 2.0 \quad \therefore\ K_e = 0.9\sqrt{1+\psi_m}$

siendo:

ψ_A y ψ_B son los valores de ψ en ambos extremos de la columna.

$\psi_{mín.}$ es el menor de los dos valores.

ψ_m es el promedio de los valores de ψ en ambos extremos del elemento sujeto a compresión.

Para elementos sin contraventeo con un extremo articulado, el factor de longitud efectiva se puede tomar como:

$$K_e = 2.0 + 0.3\,\psi$$

siendo ψ, el valor del extremo que se encuentra empotrado.

Para una extructura contraventeada, se pueden diseñar las columnas con gran seguridad, cuando se toma para (K_e) un valor igual a la unidad.

Tratándose de estructuras no contraventeadas, resulta aconsejable tomar para (K_e) un valor no menor de (1.2).

A continuación proseguimos con nuestro ejemplo, en él aplicaremos estas últimas especificaciones, dejando para el siguiente ejemplo, la utilización de los nomogramas de Jackson y Moreland para obtener los factores de longitud efectiva.

Sentido (X-X)

Columna C_3, Tramos 3-4 y 4-5 *(los tramos son iguales)*

$$\Psi_{3\text{-}4} = \Psi_{4\text{-}5} = \frac{\Sigma K_{col.}}{\Sigma K_{vigas}} = \frac{2 \times 893}{2 \times 318} = \frac{1786}{636} \simeq 2.81$$

Como se trata de una estructura no contraventeada (puede sufrir desplazamientos laterales), y además $\Psi_m > 2.0$, aplicamos la ecuación

$$K_e = 0.9\sqrt{1+\Psi_m} = 0.9\sqrt{1+2.81} \simeq 1.76$$

$$\therefore K_e H = 1.76 \times 2.60 \simeq 4.57\,m$$

Veamos si la columna es esbelta:

$$r = 0.30 \times b_2 = 0.30 \times 65 = 19.5\,cm$$

$$\therefore \frac{K_e H}{r} = \frac{457\,cm}{19.5\,cm} \simeq 23.4 > 22$$

En efecto, la columna es esbelta y será necesario considerar los efectos de esbeltez.

Ante la necesidad de considerar los efectos de esbeltez le asignamos más datos al ejemplo para poder efectuar el cálculo del factor de amplificación de momento, figura 7.51.

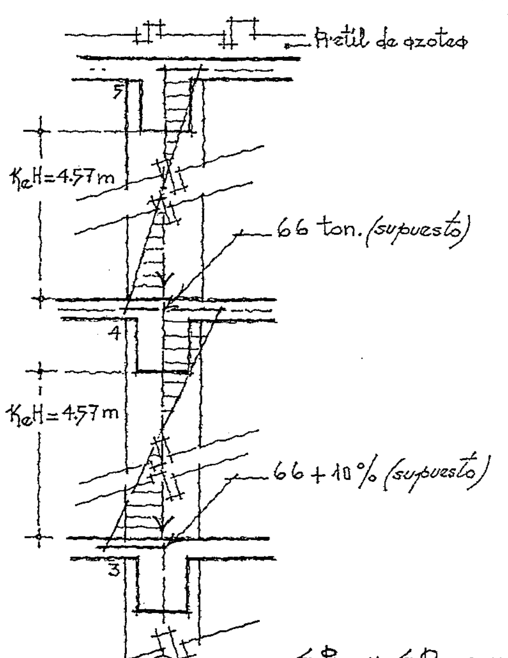


Fig. 7.51. Corte transversal en el eje C, mostrando las cargas en las columnas que llegan a cada nivel de piso.

Las cargas que llegan a cada nivel fueron supuestas y, se supuso también, incrementar un 10% a la carga en la columna que baja de un nivel a otro.

Obtención del factor de amplificación de momento para marcos no contraventeados, δ_s:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma P_u}{F_R \Sigma P_c}} \geq 1.0$$

ΣP_u y ΣP_c son las sumas de la carga de todas las -

columnas en un piso.

P_U y P_c, son la carga axial y carga crítica respectivamente.

Suma de cargas en columna*

Tramo 5-4

$$\Sigma P_U = 66 \text{ ton.}$$

*En el ejemplo únicamente se tomó en cuenta la carga de 66 ton. por plantearse así en el ejercicio. En la práctica, se deberán sumar siempre las cargas de todas las columnas en cada nivel de piso y en todos los pisos.

Para la carga de 66 ton., el Reglamento de Construcciones para el D.F., dice al respecto:

"Cuando la carga axial de diseño, P_U, en miembros sometidos a flexocompresión resulte mayor que

$$P_U > \frac{A_g f'_c}{10}$$

se aplicarán a la columna los requisitos siguientes:

1. La dimensión transversal mínima de la columna, b_1, no será menor de 30 cm.
2. El área total de la sección transversal de la columna, A_g, no será menor que

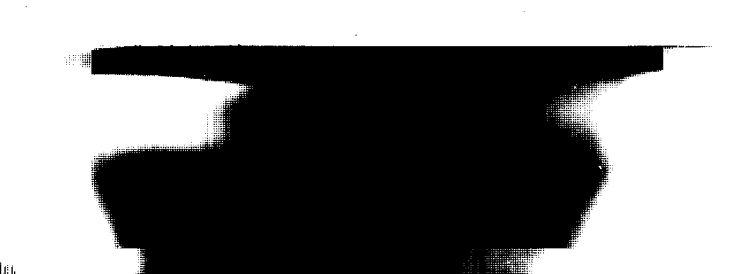
   $P_U / 0.5 f'_c$, para toda combinación de carga.
3. El cociente entre la dimensión transversal menor de la columna, b_1, y su dimensión mayor, b_2, no será menor de 0.4.

   $$\therefore \quad \frac{b_1}{b_2} > 0.4$$
4. El resultado de dividir la altura de la columna, H, (altura libre) y la menor dimensión transversal no excederá de 15

   $$\therefore \quad \frac{H}{b_1} < 15$$

A continuación verificamos cada uno de los requisitos especificados por reglamentación

veamos: . .



$P_U = 66$ ton. (carga que llega al piso 4)

$$\therefore \frac{Ag\,f'_c}{10} = \frac{35 \times 65 \times 200}{10} = \frac{455000}{10} = 45500 \text{ Kg}$$

$$\therefore P_U > 45500 \text{ Kg.}$$

se aplicarán los requisitos impuestos por el reglamento:

1. $b_1 = 35$ cm > 30 (correcto)

2. $Ag > \frac{P_U}{0.5 f'_c} \quad \therefore 35 \times 65 > \frac{66000}{0.5 \times 200}$

$2275 > 660$ (correcto)

3. $\frac{b_1}{b_2} > 0.4 \quad \therefore \frac{35}{65} = 0.538 > 0.4$ (correcto)

4. $\frac{H}{b_1} < 15 \quad \therefore \frac{260}{35} = 7.42 < 15$ (correcto)

Obtención de la carga crítica en la columna; aplicamos la ecuación dada por el reglamento ACI,

donde $P_c = \frac{(\pi)^2 EI}{(K_e H)^2}$ . . . . . . y

obtenemos primeramente, EI, aplicando la ecuación

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d} = \frac{1.98 \times 10^5 \times 232240 / 2.5}{1 + 0.25} \simeq 14700 (10)^6$$

$$\therefore E_c = 14000 \sqrt{200} \simeq 198000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{65 (35)^3}{12} = 232240 \text{ cm}^4$$

β_d, valor que se obtiene de la relación entre el momento máximo por carga muerta y el momento máximo por carga total, resultado siempre positivo.

Por facilidad y sin afectar mayormente en los resultados finales, el autor recomienda tomar para β_d un valor comprendido entre 0.1 y 0.3.

Para nuestro ejemplo tomamos $\beta_d = 0.25$

$$\therefore P_c = \frac{(\pi)^2 EI}{(K_e H)^2} = \frac{(3.1415)^2 \times 14700 (10)^6}{(457)^2} = \frac{145000 (10)^6}{208800} \simeq 694000 \text{ Kg}$$

Finalmente se tiene

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_U}{F_R \Sigma P_c}} \geq 1.0 \quad \therefore \quad \frac{1}{1 - \frac{66000}{0.70 (694000)}} = \frac{1}{1 - 0.13} \simeq 1.15$$

0.70 es un factor de reducción (F_R) que el reglamento ACI establece para columnas estribadas.

Obtención del momento amplificado, fig 7.52 y 7.53.

Fig. 7.52. Mostrando la carga y el momento que afectan a la columna en el eje (x-x).

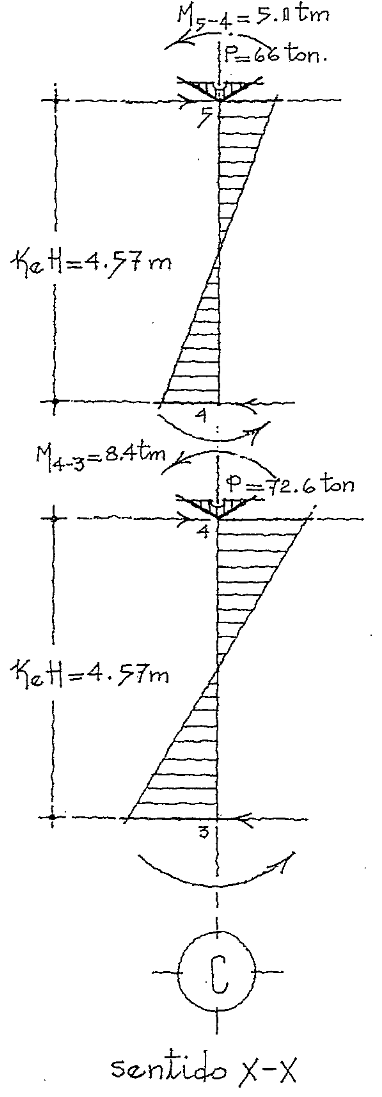


Fig. 7.53. La columna mostrando la carga y el momento a que se encuentra sometida eje (x-x).

Todos los valores que aparecen en las figuras han sido supuestos, pero es lógico pensar que en la práctica, deberán calcularse por medio de un análisis estructural de primer orden.

En efecto, para analizar una columna en uno u otro sentido, será necesario tomar en cuenta:

1. Carga considerada que es igual a la suma de cortantes más la carga tributaria.
2. Momentos en el extremo superior e inferior (sentido X-X; Y-Y o en ambos), y comprende:

   Carga muerta
   Carga viva
   Carga por sismo

Momento amplificado

$$1.15 \times 5.0 = 5.75 \text{ tm} = 5750 \text{ Kgm}$$

En el tramo 4-3 se repiten los mismos pasos que los aplicados para el tramo 5-4.

El autor optó dejarlo como ejercicio práctico, para no alargar demasiado el ejemplo ilustrativo.

Ejemplo ilustrativo (Diseño Plástico)

Se tiene una estructura formada con vigas de concreto armado en ambos sentidos con dos niveles y tres entre-ejes, figs. 7.54 a 7.58.

Revisar la columna en el tramo 0-1 del eje B-2.

Fig. 7.54. Planta N.1, (a).

Fig. 7.55. Planta N.2, (b).

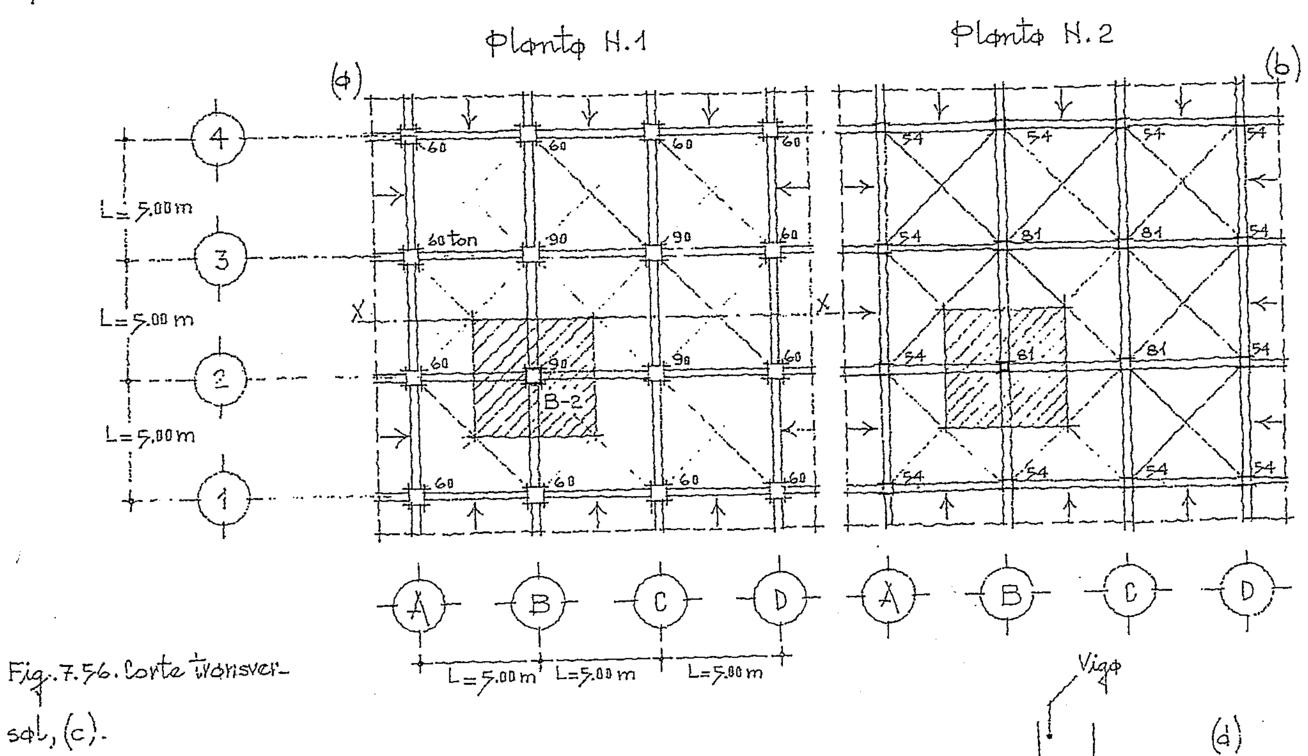
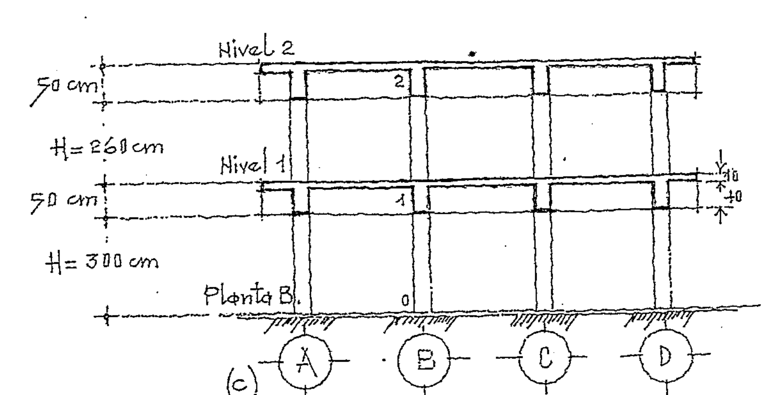


Fig. 7.56. Corte transversal, (c).



(d) Viga; Viga; Viga; columna; $b_2 = 50$ cm; $b_1 = 50$ cm

(e) Losa; Viga; Columna; 50 cm; 30 cm

Fig. 7.57. Detalle en planta de columna y vigas, (d).

Fig. 7.58. Detalle en perspectiva de columna, viga y losa, (e).

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

Diseño de elementos estructurales

Viga: $h = \frac{L}{10} = \frac{500\ cm}{10} = 50\ cm$; Ancho $\simeq 30$ cm

Columnas:

Eje B (Tramo 0-1), $I_{col.} = b_1 = b_2 = \frac{(50)^4}{12} \simeq 520800\ cm^4$

Eje B (Tramo 1-2), $I_{col.} = b_1 = b_2 = \frac{(30)^4}{12} = 67500\ cm^4$

Obtención de rigideces, K

Vigas (todos los tramos son iguales)

$$K = \frac{I_{viga}}{L_{viga}} = \frac{312500}{500} = 625\ cm^3$$

$$I_{viga} = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 50^3}{12} = 312500\ cm^4$$

Columnas:

Eje B (Tramo 0-1) $\therefore$ $K = \frac{I_{col.}}{H_{col.}} = \frac{520800}{300} = 1736\ cm^3$

Eje B (Tramo 1-2) $\therefore$ $K = \frac{I_{col.}}{H_{col.}} = \frac{67500}{260} \simeq 260\ cm^3$

A continuación comprobamos la esbeltez de las columnas en el eje B, aplicando los nomogramas de Jackson y Moreland véanse las figs. 7.49 a y 7.50 b

Nudo 1, Eje B (al nudo concurren dos columnas y cuatro medias vigas)

$$\psi_1 = \frac{\Sigma K_{cols.}}{\Sigma K_{vigas}} = \frac{260 + 1736}{625 + 625} = \frac{1996}{1250} \simeq 1.60$$

$\psi_0 = 0$ (por encontrarse empotrado)

Cálculo de las longitudes efectivas en las columnas.

El Reglamento ACI en su sección "Longitud efectiva de elementos sujetos a compresión", dice:

"Como resulta difícil encontrar una estructura totalmente contraventeada o totalmente sin contraventear, es necesario tener un conjunto de factores de longitud efectiva para ambas condiciones."

Por tanto

Columna Eje B (con desplazamiento lateral, marco sin contraventear), tramo 0-1

$\psi_0 = 0$ (empotre)

$\psi_1 = 1.60$ ..

Columna Eje B (sin desplazamiento lateral, marco contraventeado), tramo 0-1

$\Psi_0 = 0$ (empotra)

$\Psi_1 = 1.60$

En la fig. 7.50 b, (marco sin contraventear), se traza una recta desde el punto, 0, en la columna Ψ_A, hasta el punto 1.60 de la columna Ψ_B. La línea cruza la columna central, K_e, encontrando el valor de

$$K_e = 1.22$$

Siguiendo la misma secuencia, pero ahora en la fig. 7.49 a, encontramos el valor de

$$K_e = 0.65$$

Longitud efectiva de columnas:

Tramo 0-1 $\therefore K_eH = 1.22 \times 3.00 = 3.66$ m

Tramo 0-1 $\therefore K_eH = 0.65 \times 3.00 = 1.95$ m

Radio de giro

$$r = 0.30 \times 50 = 15 \text{ cm}$$

Con desplazamiento lateral

$\frac{K_eH}{r} = \frac{366}{15} = 24.4 > 22$ (Es necesario considerar el efecto de esbeltez)

Sin desplazamiento lateral

$\frac{K_eH}{r} = \frac{195}{15} = 13 < 22$ (No es necesario considerar el efecto de esbeltez)

El reglamento considera:

"Cuando los elementos estructurales sujetos a compresión, se encuentran contraventeados para evitar el desplazamiento lateral, los efectos de esbeltez se pueden despreciar, si

$$\frac{K_eH}{r} < 34 - \frac{M_{1b}}{M_{2b}}\text{"}$$

donde,

M_{1b}, momento menor en el extremo del elemento.

M_{2b}, momento mayor en el extremo del elemento.

$\therefore\ 13 < 34 - \frac{12\,M_{1b}}{M_{2b}}$, veáse la fig. 7.59

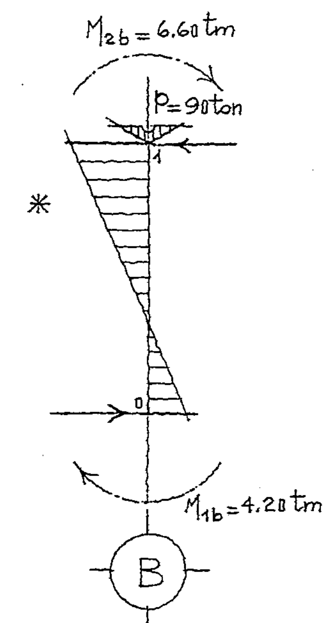


Fig. 7.59. Carga y momento en el eje B, tramo 0-1.

* La carga y los momentos han sido supuestos.

En la práctica, será necesario hacer un análisis estructural de primer orden.

$$\therefore\ 34 - \frac{12 \times 4.20}{6.60} = 26.36$$

(el efecto de esbeltez se puede despreciar)

Carga crítica en la columna

$P_c = \frac{(\pi)^2\, EI}{(K_e H)^2}$, obtenemos primeramente, EI, veamos:

$$EI = \frac{E_c\, I_{col.} \div 2.5}{1 + \beta_d} = \frac{14000\sqrt{200} \times 520800 \div 2.5}{1 + 0.2^{**}} \simeq 34300 \times 10^6$$

$$\therefore P_c = \frac{(3.1415)^2 \times 34300 \times 10^6}{(366)^2} \simeq 2530 \text{ ton}$$

Suma de cargas en el piso, ΣP_u:

$$4 \times 90 + 12 \times 60 = 1080 \text{ ton}$$

Suma de cargas críticas en el piso; figs. 7.60 a 7.62

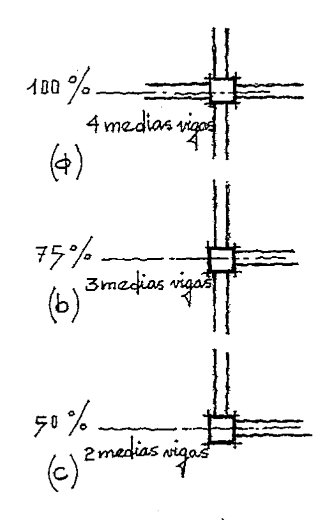


Fig. 7.60. Porcentaje correspondiente a la rigidez de las vigas, (a).

Fig. 7.61. Porcentaje que proporcionan de rigidez las vigas, (b).

Fig. 7.62. Porcentaje de rigidez que dan las vigas, (c).

El valor obtenido de, P_c, es para aquellas columnas donde concurren en el nudo 4 medias vigas (cols. B_2, B_3, C_2 y C_3); en las cols. A_2, A_3, B_1, B_4, C_1, C_4, D_2 y D_3, concurren sólo 3 medias vigas y en las columnas de esquina A_1, A_4, D_1 y D_4, llegan al nudo únicamente 2 medias vigas.

Cols. B_2, B_3, C_2 y C_3 $\therefore\ \Psi_0 = 0$ y $\Psi_1 = 1.60$

Cols. A_2, A_3, B_1, B_4, C_1, C_4, D_2 y D_3

$$\Psi_{1-0} = \frac{1996}{1250\,(75\%)} = \frac{1996}{937.5} \simeq 2.13 \text{ (sin contraventeo)}$$

$\therefore K_e = 1.28$ y $K_e H = 1.28 \times 300 \text{ cm} = 384 \text{ cm}$; $\Psi_0 = 0$ (empotre)

** Recuérdese que el valor de β_d se encuentra comprendido entre 0 y 0.3.

Cols. A_1, A_4, D_1 y D_4

$$\psi_{1-0} = \frac{1996}{1250(50\%)} = \frac{1996}{625} \simeq 3.19 \text{ (sin contraventeo)}$$

$\therefore K_eH = 1.40 \times 300 = 420$ cm ; $\psi_0 = 0$ (empotramiento)

Suma de cargas críticas

Cols. B_2, B_3, C_2 y C_3

4 Cols. $\times$ 2530 = 10120 ton.

Cols. A_2, A_3, B_1, B_4, C_1, C_4, D_2 y D_3

$$P_c = \frac{(\pi)^2\, 34300 \times 10^6}{(384)^2} = 2296 \text{ ton}$$

8 Cols. $\times$ 2296 = 18368 ton.

Cols. A_1, A_4, D_1 y D_4

$$P_c = \frac{(\pi)^2\, 34300 \times 10^6}{(420)^2} = 1919 \text{ ton.} \quad \therefore \quad 4 \text{ Cols.} \times 1919 = 7676 \text{ ton.}$$

Por tanto

$$\Sigma P_c = 10120 + 18368 + 7676 = 36164 \text{ ton.}$$

Cálculo del factor de amplificación de momento para marcos no contraventeados

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u}{F_R \Sigma P_c}} \geq 1.0 \quad \therefore \quad \delta_s = \frac{1}{1 - \frac{1080}{0.70 \times 36164}} \simeq 1.05$$

Cálculo del factor de amplificación de momento para marcos contraventeados

$$\delta_b = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{F_R\, P_c}} \geq 1.0 \,, \quad y \quad C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_{1b}}{M_{2b}}$$ pero no menor que 0.4. Otros casos, $C_m = 1.0$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{4.20}{6.60} \simeq 0.85$$

Para δ_b, se tiene:

$$\delta_b = \frac{0.85}{1 - \frac{90}{0.7 \times 2530}} = \frac{0.85}{1 - 0.05} \simeq 0.89 \text{ (se tomará igual a 1.0)}$$

En efecto, no es necesario considerar el efecto de esbeltez.

Finalmente obtenemos

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s} = 1.0 \times 6.60 + 1.05 \times 6.60 = 13.53 \text{ tm}$$

Momento amplificado

Para completar el ejemplo, calculamos a continuación la resistencia de la columna a flexocompresión.

Para ello, aplicamos la ecuación de Bresler dada por el Reglamento de Construcciones para el D.F., que dice:

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{RX}} + \frac{1}{P_{RY}} - \frac{1}{P_{R0}}}$$

En nuestro ejemplo únicamente se analizó en el eje X-X, pero como la columna es de sección cuadrada suponemos que el elemento estructural se encuentra sometido a flexión biaxial, por tanto aplicaremos la mencionada ecuación de Bresler, donde

P_R, carga normal resistente de diseño aplicada con excentricidad en ambos ejes.

P_{R0}, carga axial resistente de diseño suponiendo $e_X = e_Y = 0$.

P_{RX}, carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad e_X.

P_{RY}, carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad e_Y.

La ecuación es válida cuando

$$\frac{P_R}{P_{R0}} \geq 0.10$$

Cuando $\frac{P_R}{P_{R0}} < 0.10$, se tomará la expresión:

$$\frac{M_{UX}}{M_{RX}} + \frac{M_{UY}}{M_{RY}} \leq 1.0 \text{, siendo}$$

M_{UX} y M_{UY} los momentos de diseño según los ejes X y Y. Los valores de M_{RX} y M_{RY} son los momentos resistentes de diseño según los mismos ejes X y Y.



Continuamos con el ejercicio

$P_U = 90$ ton

Suponemos, $\rho_s \simeq 2.4\% = 0.024 \therefore A_s = 0.024 \times 2500 = 60\ cm^2$

con varillas $\#10 = \frac{60}{7.94} \simeq 8\ \phi_s\ \#10$

$$P_{R0} = A_g\left(0.18 f'_c + 0.40 f_Y \times 0.024\right) = 50^2\left(0.18\times 200 + 0.40\times 4200\times 0.024\right)$$

$$= 2500\left(36 + 40.32\right) = 190800\ Kg = 190.8\ ton$$

Obtención de la carga normal resistente de diseño, P_R, con excentricidad en ambas direcciones, e_X y e_Y; veamos las figuras 7.63 a 7.66.

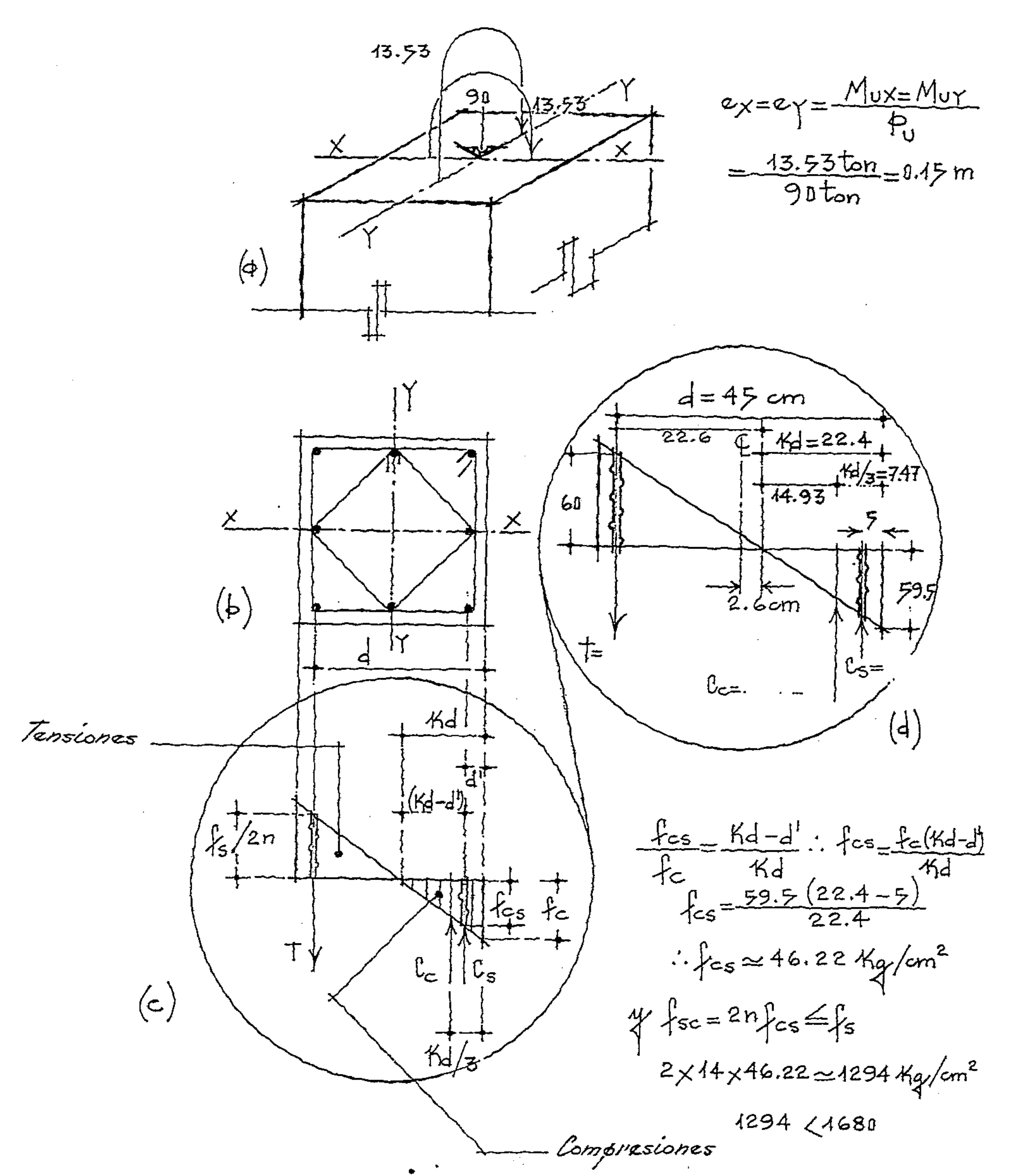


Fig. 7.63. La columna mostrando la carga axial y los momentos en ambos sentidos. Perspectiva, (a).

Fig. 7.64. Planta de la columna, (b).

Fig. 7.65. La columna mostrando sus esfuerzos internos como una viga doblemente armada, (c).

Fig. 7.66. Detalle, (d).

Por comparación de triángulos calculamos, Kd, (profundidad del eje neutro), fig. 7.65 (c), veamos:

$$\frac{Kd}{d}=\frac{f_c}{f_c+\frac{f_s}{2n}} \quad \therefore \quad Kd=\frac{d\,f_c}{f_c+\frac{f_s}{2n}}$$

donde

$$f_s \leq 0.40 f_Y = 0.40 \times 4200 = 1680 \ Kg/cm^2$$

$$n=\frac{E_s}{E_c}=\frac{2000000}{10000\sqrt{200}} \simeq 14$$

$$\frac{f_s}{2n}=\frac{1680}{2\times 14}=60 \ Kg/cm^2$$

$$d=45 \ cm$$

El reglamento especifica:

"En condiciones de servicio el concreto no excederá del 35% de $(0.85 f_c'')$"

$$\therefore 0.35 \times 0.85 \times 200 = 59.5 \ Kg/cm^2$$

Por tanto, Kd, vale

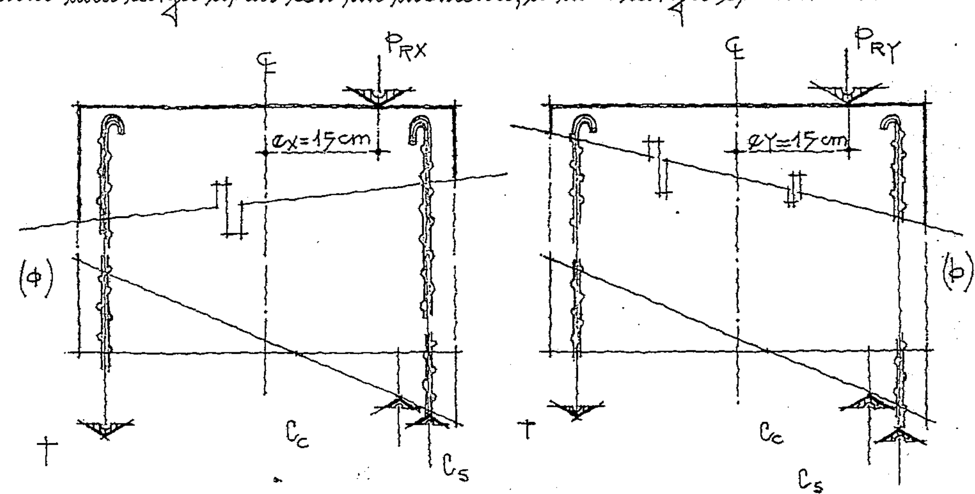
$$Kd=\frac{45\times 59.5}{59.5+\frac{1680}{28}}=\frac{2677.5}{119.5}=22.40 \ cm$$

y, $K=\frac{22.40}{45}\simeq 0.4978$

En las figuras 7.67 y 7.68, se muestra la equivalencia que tiene una carga axial con un momento, a una carga excéntrica.

Fig. 7.67. Carga excéntrica equivalente, eje X-X (a).

Fig. 7.68. Carga excéntrica equivalente, eje Y-Y (b).



Haciendo momentos con respecto al eje neutro, fig. 7.65, se obtiene el momento resistente de diseño en flexocompresión en el sentido X-X; (en este caso, el momento resistente en el eje Y-Y tiene el mismo valor).

$$M_{RX} = C_c(14.93) + C_s(17.40) + T(22.60)$$

donde:

$$C_c = \frac{1}{2} f_c b_1 Kd (14.93) = 0.5 \times 59.5 \times 50 \times 22.4 (14.93) \simeq 497400 \text{ Kg cm}$$

$$C_s = 3\phi_s A'_s f_{sc}(17.40) = 3 \times 7.94 \times 1294 (17.40) \simeq 536300 \text{ Kg cm}$$

$$T = 3\phi_s A_s f_s (22.60) = 3 \times 7.94 \times 1680 (22.60) \simeq 904400 \text{ Kg cm}$$

Sumando las cantidades, obtenemos:

$$\Sigma = 1938100 \text{ Kg cm}$$

La carga normal resistente de diseño con una excentricidad de, $e_x = 15$ cm, vale

$$P_{RX} = \frac{1938100}{15} \simeq 129200 \text{ Kg} = 129.2 \text{ ton}$$

Por tanto

$$P_{RX} = P_{RY} = 129.2 \text{ ton}$$

Aplicando la ecuación de Bresler, se tiene:

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{129.2} + \frac{1}{129.2} - \frac{1}{190.8}} = \frac{1}{0.0078 + 0.0078 - 0.0052} \simeq 96.15$$

$\therefore 96.15 > 90$ (la capacidad portante resultó un poco mayor que la requerida).

La ecuación de Bresler será válida si, $P_R / P_{R0} \geq 0.10$, veamos:

$$\frac{96.15}{190.80} \simeq 0.50 > 0.10 \text{ (La ecuación es válida).}$$

En el ejemplo, se tomó para el concreto en condiciones de servicio, el valor de $0.35 \times 0.85 (f'_c) \simeq 0.30 f'_c$.

El autor aconseja tomar para las mismas condiciones, el valor de $0.18 (f'_c)$, considerando la importancia que tiene la columna como elemento estructural.

(véase el Capítulo 6, "Columnas sometidas a carga axial.")

En las figuras 7.69 y 7.70 se muestran los armados en la columna.

Fig. 7.69. Corte longitudinal mostrando la colocación de estribos, (a).

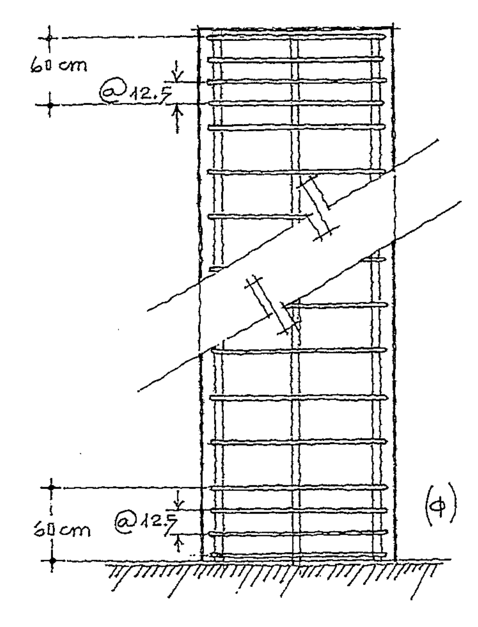
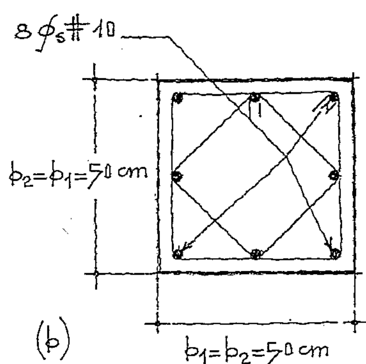


Fig. 7.70. Sección transversal de la columna vista en planta, (b).



El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

"En miembros a flexocompresión donde la carga de diseño, P_U, sea mayor que, $A_g f'_c/10$, se aplicarán los siguientes requisitos":

$$\frac{50 \times 50 \times 200}{10} = 50000 \text{ Kg}$$

$$\therefore 90000 > 50000$$

Se aplicarán las restricciones:

1. Lado menor de la columna igual a 30 cm., $\therefore b_1 = 50$ cm (Correcto)
2. A_g, no menor que $P_U/0.5 f'_c$

   $$\therefore \frac{90000}{0.5 \times 200} = 900 \text{ cm}^2$$

   $2500 > 900$ (Correcto)
3. Relación entre ambos lados de la columna no será menor que 0.4

   $\therefore \frac{50}{50} = 1.0 \quad \therefore 1.0 > 0.4$ (Correcto)
4. La relación entre la altura libre de la columna y la menor dimensión transversal no será mayor de 15.

   $\therefore \frac{300}{50} = 6 < 15$ (Correcto)

Separación de estribos:

$$\frac{850}{\sqrt{4200}} 3.18 \simeq 42 \text{ cm}$$

48×0.95 (varilla #3) $= 48 \times 0.95 \simeq 46$ cm

$$\frac{50}{2} = 25 \text{ cm}^*$$

* Los estribos se colocarán a cada 25 cm.

Referencias bibliográficas

Capítulo 7

MacGregor, James G., Breen, John E. y Pfrang, Edward O., "Design, of Slender Concrete Columns," ACI Journal, Proceedings, 1970.

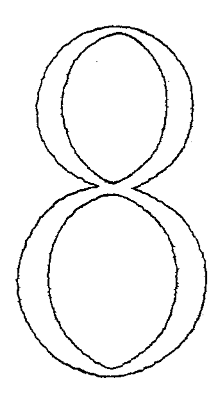
Meli, R., "Pandeo lateral de elementos de concreto reforzado", Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1977.

Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado, ACI 318-83, Detroit, 1983.

Bresler, Boris, "Design Criteria for Reinforced Concrete Columns Under Axial Load and Biaxial Bending, ACI Journal, Proceedings, 1960.

Cranston, W. B., "Analysis and Design of Reinforced Concrete Columns," Cement and Concrete Association, Londres, 1972.

Parme, A. L., Nieves, J. M. y Gouwens, A., "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subjected to Biaxial Bending," ACI Journal, Proceedings, 1966.



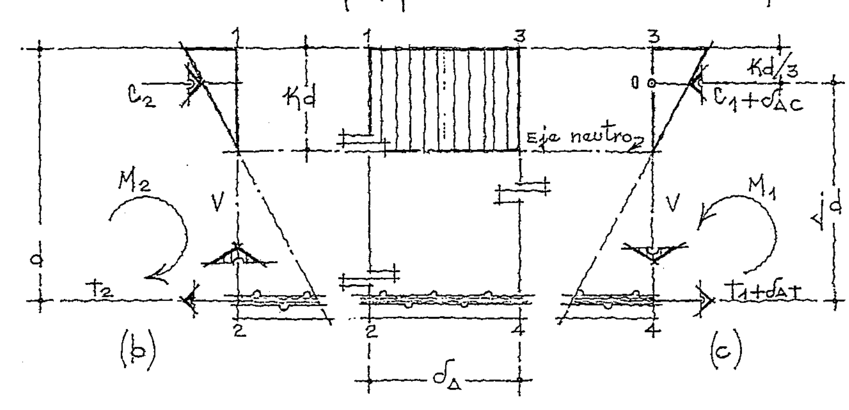
FUERZA CORTANTE Y TENSIÓN DIAGONAL

8.1. Generalidades

En los anteriores capítulos se han estudiado los elementos estructurales sometidos a la combinación de carga axial y momento flexionante, ahora estudiaremos el esfuerzo que produce una fuerza cortante combinada con flexión y carga axial.

Para su estudio, suponemos una viga de sección rectangular sometida a una determinada condición de carga, figuras 8.1 a 8.4.

Fig. 8.1. Sección longitudinal de la viga de concreto armado, (a).

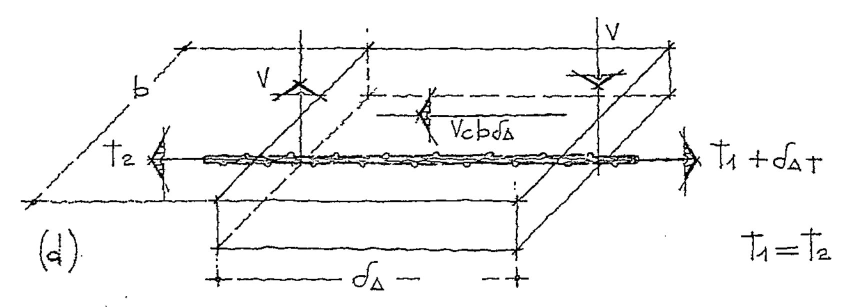


Si cortamos la viga y aislamos la sección según 1-2 y 3-4,

Fig. 8.2 y 8.3. Esfuerzos en un trozo de la viga, (b) y (c).

para que haya equilibrio será necesario aplicar un par de fuerzas que

Fig. 8.4. Esfuerzo cortante (rasante) horizontal, (d).



forman el momento resistente de la pieza.

Haciendo momentos en el punto 0, obtenemos:

$$\Sigma M_0 = V\sigma_\Delta - \sigma_{\Delta T}(jd) = 0$$

$$\therefore \sigma_{\Delta T} = \frac{V\sigma_\Delta}{jd}$$

Ahora bien, si cortamos el trozo de viga por abajo del eje neutro figura 8.4(d), será necesario para lograr el equilibrio de la fuerza diferencial de tensión ($\sigma_{\Delta T}$), un esfuerzo cortante representado por la literal V_c actuando sobre la superficie $b\sigma_\Delta$.

Por tanto

$$\sigma_{\Delta T} = V_c\, b\, \sigma_\Delta = \frac{V\sigma_\Delta}{jd} \quad \therefore V_{CR} = \frac{V\sigma_\Delta}{b\sigma_\Delta jd}$$

y,

$$V_{CR} = \frac{V}{bjd}$$

El reglamento determina omitir la literal "j", quedando finalmente la ecuación

$$V_{CR} = \frac{V_{máx.}}{bd}$$

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

La fuerza cortante que toma el concreto, V_{CR}, cumplirá con las siguientes condiciones:

"Cuando la relación entre claro y peralte total de la viga ($L/h > 5$), la fuerza cortante que toma el concreto, se calculará con el siguiente criterio,

a) Cuando $p_s < 1\%$ $\therefore V_{CR} = F_R\, bd\,(0.2 + 30\, p_s)\sqrt{f_c^*}$, . . . ec. 8.1

b) Cuando $p_s \geq 1\%$ $\therefore V_{CR} = 0.5 F_R\, bd\sqrt{f_c^*}$, ... ec. 8.2

Cuando la relación ($L/h < 4$), V_{CR} se obtiene multiplicando el valor que resulta de la ec. 8.2 por

$3.5 - 2.5\dfrac{M}{Vd} > 1.0$, pero sin que V_{CR} sea mayor que

$$1.5\, F_R\, bd\sqrt{f_c^*}$$

siendo,

M y V, momento flexionante y fuerza cortante respectivamente que actúan en la sección.

Cuando la relación se encuentra comprendida entre 4 y 5, V_{CR} se hará variar linealmente hasta los valores dados por las ecuaciones 8.1 y 8.2.

Todas las especificaciones mencionadas para V_{CR} se pueden aplicar cuando $h/b \leq 6$. Cuando la condición mencionada no se cumpla, V_{CR}, se reducirá un 30%."

El mismo reglamento especifica:

"Cuando se trate de vigas T, I o L, en lugar de la literal b, se usará, b'.

Cuando el patín se encuentre sometido a compresión, al valor (b'd) se le puede sumar el producto (t^2) en vigas T e I, y ($t^2/2$), para vigas L."

Si la fuerza cortante de diseño, V_U, resulta menor que V_{CR}, se colocarán refuerzos mínimos por tensión diagonal, formados con estribos verticales de diámetro no menor de 1/4". Los estribos serán cerrados.

Su separación no será mayor de la mitad del peralte a cada lado de la unión de vigas con columnas o muros en una longitud de 1/4 del claro, figuras 8.5 y 8.6.

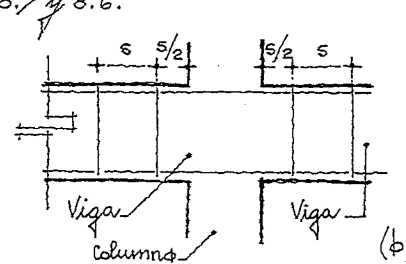


Fig. 8.5. Separación de estribos a partir del apoyo, (a).

Fig. 8.6. Separación de estribos a ambos lados del apoyo, (b).

Cuando V_U resulte mayor que V_{CR} la separación de estribos, s, se calculará con la expresión

$$s = \frac{F_R A_v f_y d (\text{sen}\,\theta + \cos\theta)}{V_U - V_{CR}} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5\, b}$$

En ningún caso la separación, s, será menor de 5 cm.

El Reglamento ACI (American Concrete Institute), presenta otras especificaciones y otras literales para obtener la resistencia a - cortante proporcionada por el concreto. A continuación se exponen dichas especificaciones para que el diseñador de estructuras tome la que considere mejor o de aplicación más sencilla.

El autor considera que ambas opciones tienen como finalidad lograr la seguridad estructural y, como tal, la aplicación de cualquiera de ellas cumple ampliamente para proporcionarle a la estructura la seguridad que requiere.

El mismo reglamento también especifica que, todo elemento de concreto reforzado que se encuentre sometido a esfuerzos de flexión y cuando la fuerza cortante, $V_U > 50\%$ que la resistencia al cortante proporcionada por el concreto, $F_R V_C$, deberá colocarse un área mínima de refuerzo por cortante

$$A_v = 3.5 \frac{b_w s}{f_y}$$

Cuando se trate de estructuras donde intervienen elementos de gran peralte el reglamento ACI especifica:

a) Si $l_n/d < 2$, la resistencia al cortante, V_n, no deberá considerarse mayor que

$$V_n \leq 2.1 \sqrt{f'_c}\, b_w d$$

b) Cuando l_n/d se encuentre entre 2 y 5,

$$V_n = 0.18 \left(10 + \frac{l_n}{d}\right) \sqrt{f'_c}\, b_w d$$

siendo,

l_n, claro libre, distancia entre paños.

Cuando una sección se encuentre sometida a cortante, la fuerza cortante factorizada, V_U, será igual a

$$V_U \leq F_R V_n$$

$$V_n = V_c + V_s$$

donde

V_u, fuerza cortante factorizada.

V_n, resistencia nominal al cortante.

V_c, resistencia al cortante proporcionada por el concreto.

V_s, resistencia al cortante proporcionada por el refuerzo para cortante.

Cuando el elemento estructural se encuentra sometido únicamente a fuerza cortante y flexión el concreto resiste:

$$V_c = 0.53\sqrt{f'_c}\; b_w d$$

siendo,

b_w, espesor o ancho del alma.

Cuando el elemento se encuentra sometido a compresión axial, la resistencia del concreto a cortante viene dada por la ecuación:

$$V_c = 0.53\left(1.0 + 0.0071\frac{N_u}{A_g}\right)\sqrt{f'_c}\; b_w d\ .$$

donde,

N_u, carga axial perpendicular a la sección transversal; se tomará positiva para la compresión y negativa para la tensión.

A_g, área total de la sección.

$$\frac{N_u}{A_g}\text{, se expresará en Kg/cm}^2$$

El acero de refuerzo para absorber el cortante puede proporcionarse de varias formas:

a) Estribos formando un ángulo de 90° con el eje del elemento.

b) Malla soldada con alambres colocados en ángulo recto con el eje del elemento.

c) Estribos formando ángulo de 45° con respecto al acero longitudinal por tensión.

d) Acero longitudinal doblado formando un ángulo de 30° o más con el eje longitudinal del elemento.

e) Combinando los estribos verticales con las varillas dobladas.

f) Colocando el refuerzo en espiral, (usado por torsión).

8.2 Máxima separación del acero por cortante

1. Cuando se utilicen estribos verticales formando un ángulo de 90° con el eje longitudinal del elemento, la separación entre ellos no excederá de d/2, figura 8.7.

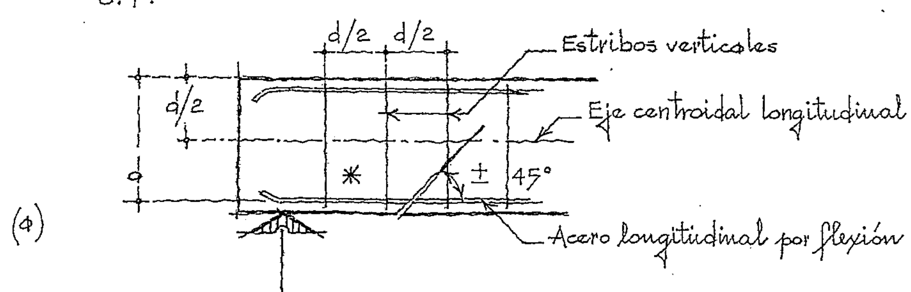


Fig. 8.7. Viga con estribos verticales, (a).

*La separación entre estribos no excederá de 60 cm.

2. Utilizando estribos inclinados o varillas longitudinales dobladas, su separación será tal que cada línea a 45°, trazada desde el eje longitudinal del elemento, hasta el refuerzo longitudinal de tensión, estará cruzada, como mínimo, por una línea de refuerzo por cortante, figuras 8.8 y 8.9.

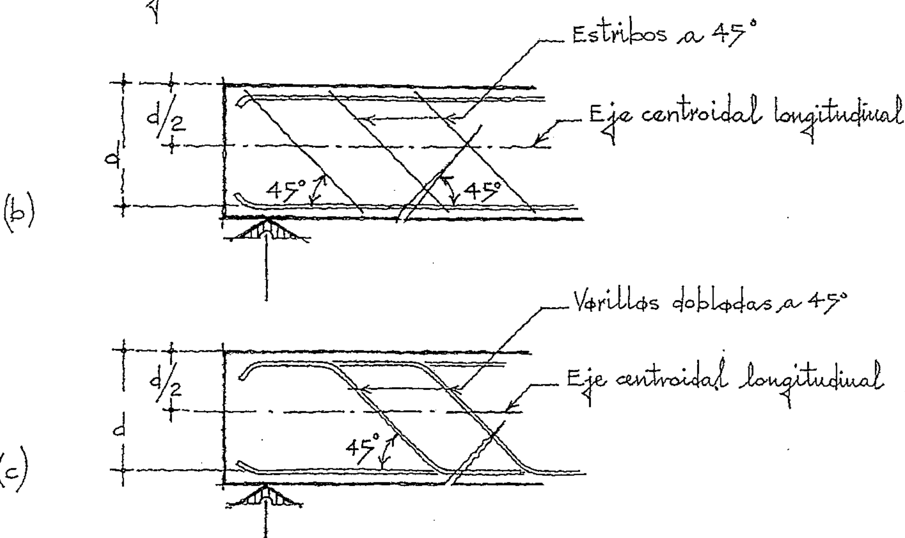


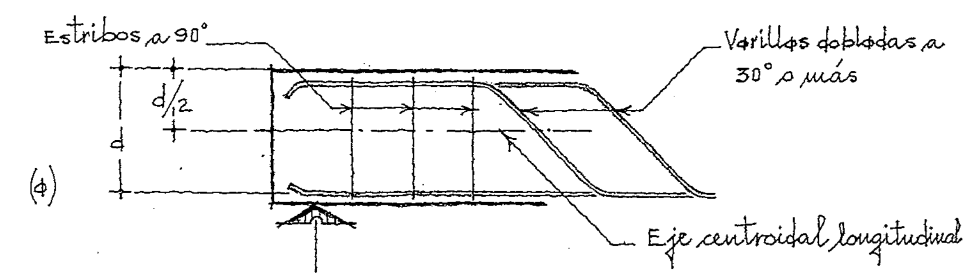
Fig. 8.8. Viga con estribos a 45°, (b).

Fig. 8.9. Viga con varillas a 45°, (c).

Cuando $V_s > 1.10 \sqrt{f'_c}\, b_w d$, las separaciones antes mencionadas se reducirán a la mitad.

En la figura 8.10 se muestra una viga donde se combinan estribos verticales con varillas longitudinales dobladas.

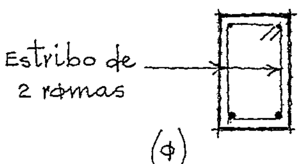
Fig. 8.10. Viga con varillas dobladas y estribos verticales, (a).



El refuerzo por cortante más generalizado es el estribo en forma de "U" (estribo sencillo), siendo las partes verticales las que se consideran para el cálculo, es decir, en este caso 2 ramas, fig. 8.11; también se utilizan los de forma doble "U" (estribo doble), donde trabajan 4 ramas, pero éstos se usan con menos frecuencia, fig 8.12.

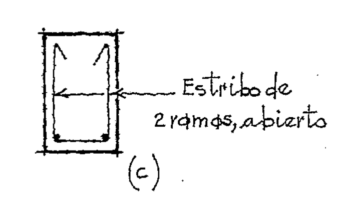
Fig. 8.11. Estribo sencillo, (a).

Fig. 8.12. Estribo doble, (b).



El estrib se puede colocar como se muestra en la figura 8.13, pero el reglamento recomienda que los estribos se hagan cerrados totalmente.

Fig. 8.13. Estribo abierto sencillo, (c).



El diámetro mínimo será el alambrón de 1/4" (*el autor aconseja que el diámetro mínimo deberá ser de 5/16"*), y la resistencia a la fluencia del refuerzo por cortante no mayor de 4200 Kg/cm^2.

El reglamento ACI, dice:

"El refuerzo por cortante (estribos, varillas o alambres) deberán prolongarse una distancia d (peralte efectivo) de la fibra extrema en compresión y anclarse en ambos extremos, figura 8.12

El anclaje podrá hacerse de varias formas, veamos

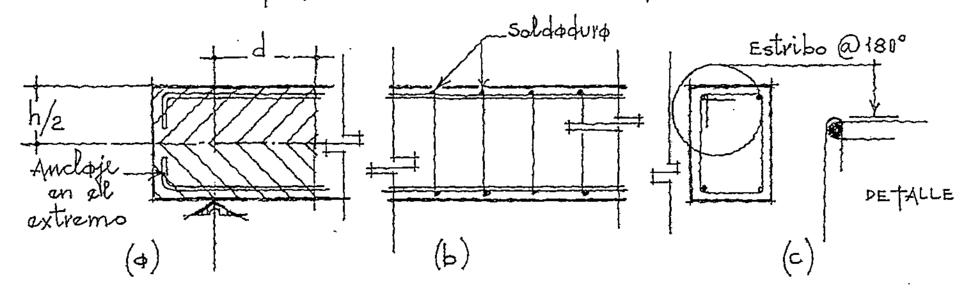


Fig. 8.14. Anclaje del refuerzo longitudinal en el extremo del elemento, (a).

Fig. 8.15. Soldadura para unir ambos elementos, (b)

Fig. 8.16. Estribos doblados 180°, (c).

1. La varilla quedará ahogada en el concreto por arriba o por abajo de la mitad de la altura de la viga en la zona de compresión, una longitud mínima de 24 veces el diámetro de la barra, fig. 14.
2. Utilizando soldadura para unir los estribos con las varillas longitudinales, fig. 8.15.
3. Doblando el estribo alrededor del refuerzo longitudinal un ángulo de 180°, figura 8.16.

Además, el reglamento determina:

Cuando se requiere refuerzo por cortante a base de estribos perpendiculares al eje centroidal longitudinal, la resistencia al cortante proporcionada por el refuerzo será igual a

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s}$$

donde

A_v, área del refuerzo por cortante.

Cuando se utilicen estribos inclinados (a 30° o más) como refuerzo por cortante

$$V_s = \frac{A_v f_y (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) d}{s}$$

siendo

θ, ángulo que forma el estribo inclinado con el eje longitudinal del elemento.

Cuando se utiliza una varilla individual o un grupo de varillas paralelas y dobladas

$$V_s = A_v f_y \operatorname{sen}\theta \leq 0.8\sqrt{f'_c}\, b_w d$$

Ejemplo ilustrativo (Teoría Elástica)

En una viga simplemente apoyada en ambos extremos y sometida a una carga repartida uniformemente, calcular:

A. Cortante excedente con estribos verticales.

B. Cortante excedente con varillas dobladas.

Véanse las figuras 8.17 a 8.19.

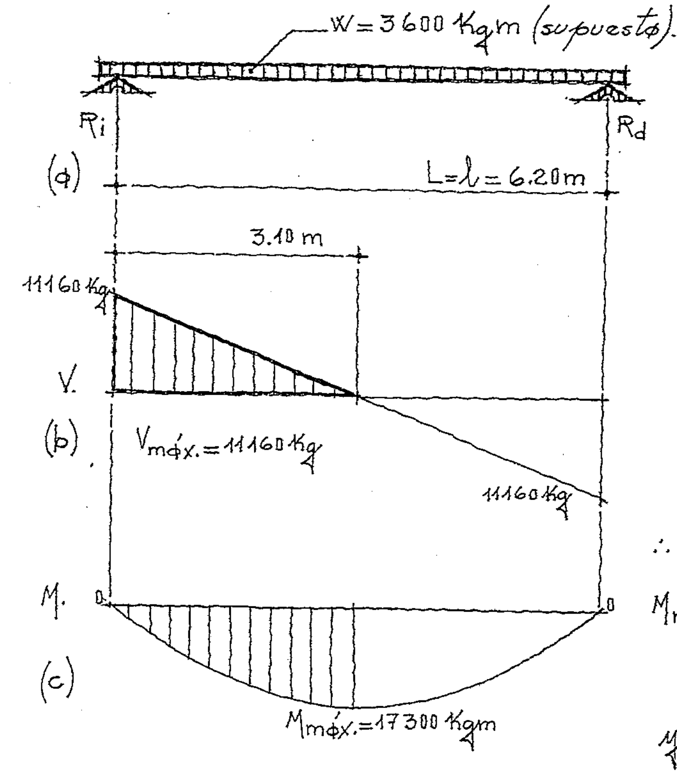


Fig. 8.17. Viga simplemente apoyada, (a).

Fig. 8.18. Diagrama de esfuerzo cortante, (b).

Fig. 8.19. Diagrama de momento flexionante, (c).

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$

$f_y = 4200\ Kg/cm^2$

$d = 55\ cm;\ b = 25\ cm$

$h = 60\ cm$

$$R_i = R_d = \frac{wl}{2} = V_{máx.}$$

$$\therefore \frac{3600 \times 6.20}{2} = 11160\ Kg$$

$$M_{máx.} = \frac{wl^2}{8} = \frac{3600 \times 6.20^2}{8}$$

$$\simeq 17300\ Kgm$$

y $M_{máx.} = 1730000\ Kgcm$

$$A_s = \frac{1730000}{2100 \times 0.87 \times 55} \simeq 17.22\ cm^2;\ \text{con } \phi_s \#6,\ \frac{17.22}{2.87} \simeq 6\phi_s$$

Armados en la viga, fig. 8.20

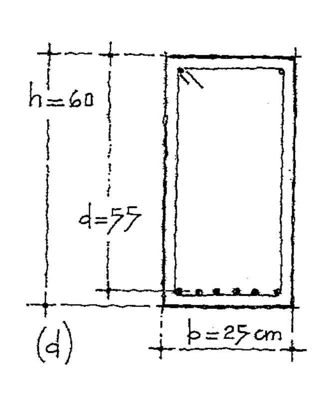


Fig. 8.20. Corte transversal de la viga, (d).

Esfuerzo cortante:

$$v = \frac{V_{máx.}}{b\,d} = \frac{11160}{25 \times 55} \simeq 8.12\ Kg/cm^2$$

Aplicando especificaciones, se tiene:

Cuando $L/h > 5\ \therefore \frac{620}{60} \simeq 10.34$

por tanto

$10.34 > 5$

Cálculo del porcentaje de acero

$$\rho_s = \frac{A_s}{b\,d} = \frac{6 \times 2.87}{25 \times 55} = \frac{17.22}{1375} \simeq 0.0125 = 1.25\% > 1\%$$

El concreto toma

$$V_{CR} = 0.5\,F_R\,b\,d\sqrt{f_c^*} = 0.5 \times 0.8 \times 25 \times 55\sqrt{160} \simeq 6960 \text{ Kg}$$

donde

F_R, factor de resistencia para cortante $= 0.8$

f_c^*, es igual a $0.8 f'_c$ $\therefore$ $0.8 \times 200 = 160$ Kg/cm^2

La fig. 8.21 muestra los valores del cortante, veamos:

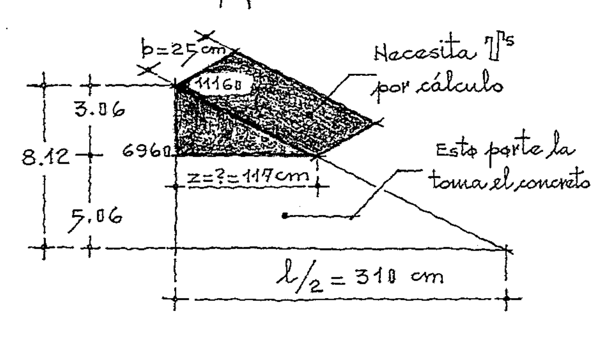


Fig. 8.21. Volumen del prisma triangular excedente.

Por comparación de triángulos $\frac{310}{z} = \frac{8.12}{3.06}$

$\therefore z \simeq 117$ cm

Obtención del volumen del prisma triangular excedente,

$$v = \frac{V_{máx.}}{b\,d} = \frac{11160}{1375} \simeq 8.12 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore T = \frac{3.06 \times 25 \times 117}{2} \simeq 4475 \text{ Kg (Esfuerzo cortante excedente)}$$

A. Tomando el cortante excedente con estribos verticales.

Como el esfuerzo cortante excedente es pequeño, se suponen estribos de 5/16" (#2.5).

$A_s = 0.49$ cm^2, y como cada estribo sencillo cuenta con dos barras verticales, la resistencia de cada estribo será de:

$$t_{⊓s} = 2A_s \times 0.40 f_y^* = 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \simeq 1646 \text{ Kg}$$

$$\text{Número de estribos} = \frac{T}{t_{⊓s}} = \frac{4475}{1646} \simeq 3\ ⊓s\ \#2.5$$

Separación de estribos

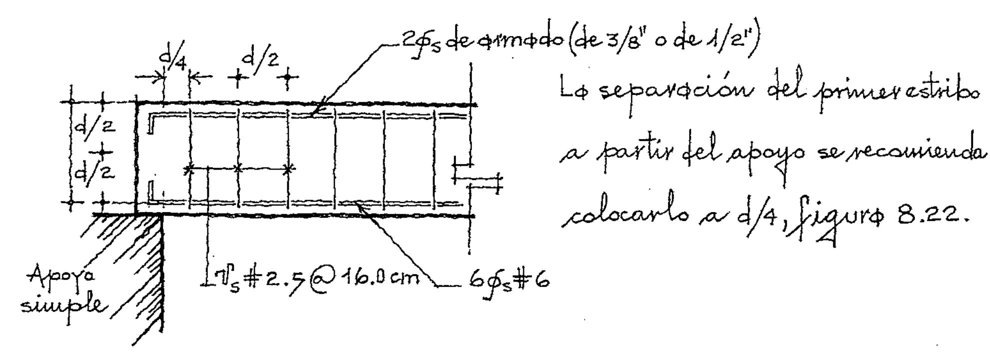
$$s_{⊓s} = \frac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200\,(\text{sen}\,90° + \cos 90°)\,55}{11160 - 6960} \simeq 18 \text{ cm}$$

y también, $$s_{⊓s} \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 4200 \times 0.40}{3.5 \times 25} \simeq 16 \text{ cm}$$

El reglamento ACI especifica que la resistencia del acero a la fluencia se afectará por un factor de resistencia, $F_R = 0.85$. Además, se afectará también la resistencia a cortante que toma el concreto, V_{CR}, por un factor, $F_R = 0.8$.

* El autor afecta la resistencia por un factor, $F_R = 0.40$, para protegerse de una posible falla catastrófica.

Fig. 8.22. Separación de estribos. Corte longitudinal.



La separación del primer estribo a partir del apoyo se recomienda colocarlo a d/4, figura 8.22.

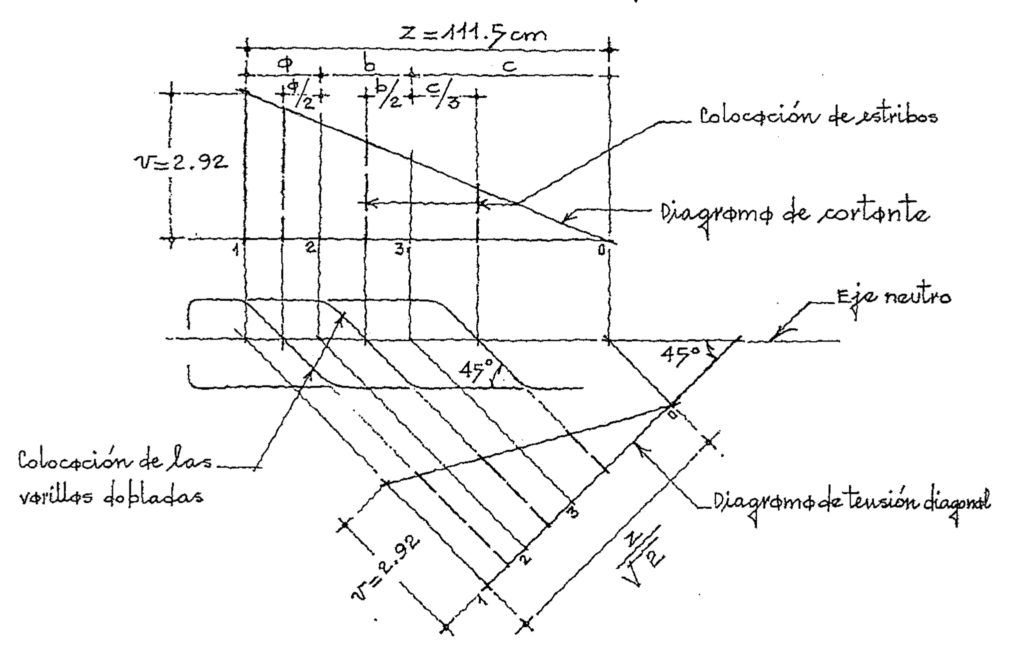
B. Tomando el cortante excedente con varillas dobladas, véase la fig. 8.18(b), se obtiene:

Cuando se utilicen varillas dobladas para tomar la tensión diagonal, T_d, excedente, éstas se doblarán por pares y cuando se trate de una sola varilla doblada, se escogerá la varilla central,

Fig. 8.23. Diagrama de esfuerzo cortante.

Fig. 8.24. Doblado de las varillas a 45°.

Fig. 8.25. Diagrama de tensión diagonal.



Al tratar el refuerzo con estribos para absorber el cortante ya se vio, figuras 8.23, 8.24 y 8.25, que

$$T = \frac{v\,b\,z}{2} \text{ (Volumen del prisma triangular excedente)}$$

Ahora bien, la tensión diagonal es igual a

$$T_d = \frac{v\,b\,z}{2\sqrt{2}}, \text{ y como } T = \frac{v\,b\,z}{2} \therefore \quad T_d = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

b, espesor o ancho de la viga.

z, longitud que requiere estribos por cálculo.

Cálculo de la tensión diagonal

$$T_d = \frac{2.92 \times 25 \times 111.5}{2\sqrt{2}} \simeq 2878 \text{ Kg}$$

Resistencia de un par de varillas del #6

$$t_d = 2A_s \times 0.40 f_Y = 2 \times 2.87 \times 0.40 \times 4200 \simeq 9600 \text{ Kg}$$

$$\therefore 9600 \text{ Kg} > 2878 \text{ Kg}$$

En este caso no resulta conveniente el empleo de varillas dobladas (la tensión diagonal es muy pequeña).

A continuación se presenta un ejemplo donde se pueda aplicar la combinación de estribos y varillas dobladas.

Ejemplo ilustrativo (Teoría Elástica)

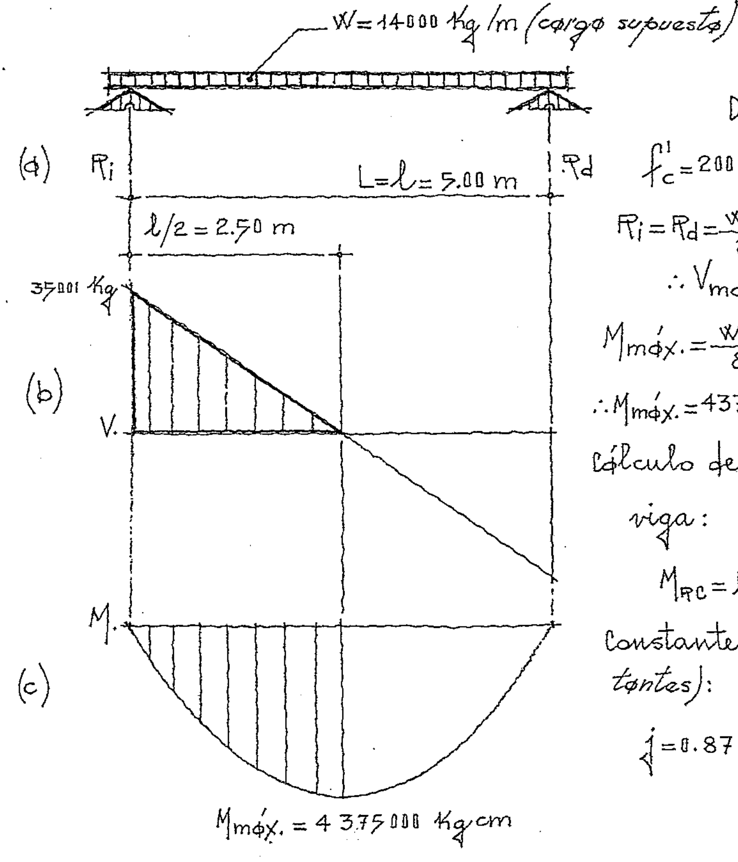
Una viga simplemente apoyada se encuentra sometida a una carga uniformemente repartida de 14000 Kg/m.

Calcular el esfuerzo cortante excedente utilizando estribos verticales en combinación con varillas dobladas, figuras 8.26 a 8.29.

Fig. 8.26. Viga simplemente apoyada, (a).

Fig. 8.27. Diagrama de esfuerzo cortante, (b).

Fig. 8.28. Diagrama de momento flexionante, (c).



Datos:

$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$; $f_Y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$

$$R_i = R_d = \frac{wl}{2} = \frac{14000 \times 5}{2} = 35000$$

$$\therefore V_{máx.} = 35000 \text{ Kg}$$

$$M_{máx.} = \frac{wl^2}{8} = \frac{14000 \times 5^2}{8}$$

$$\therefore M_{máx.} = 43750 \text{ Kgm} = 4375000 \text{ Kgcm}$$

Cálculo de la sección de la viga:

$$M_{RC} = R b d^2$$

Constantes (ver tabla de constantes):

$j = 0.87$; $K = 0.38$; $n = 14$

$$R = 15 \text{ Kg/cm}^2$$



$4\,375\,000 = 15\, b d^2$; se puede suponer una relación en b y d, veamos

Por ejemplo suponemos: $d = 2.2\, b$

$$\therefore\ 4\,375\,000 = 15 \times b \times 2.2 b \times 2.2 b = 72.6\, b^3$$

$$y,\quad b = \sqrt[3]{\frac{4\,375\,000}{72.6}} \simeq 39.2 \text{ cm}$$

Por tanto

$$d = 2.2 \times 39.2 \simeq 86 \text{ cm}$$

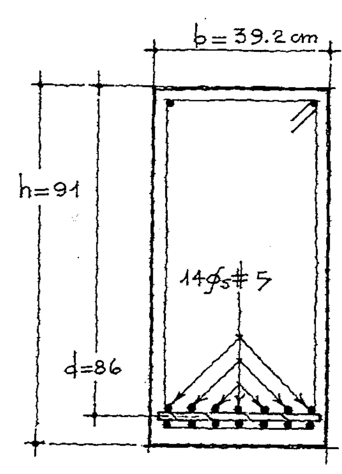


Fig. 8.29. Corte transversal de la viga, (d).

$$A_s = \frac{M_{máx.}}{f_s\, j\, d} = \frac{4\,375\,000}{2100 \times 0.87 \times 86}$$

$$= 27.85 \text{ cm}^2 \therefore \text{ con } \phi_s \# 5$$

$$N^\circ \phi_s = \frac{27.85}{1.99} \simeq 14\, \phi_s \# 5$$

Armados en la viga, fig. 8.29(d)

Cálculo del esfuerzo cortante unitario, figura 8.30.

$$v = \frac{V}{b d} = \frac{35\,000}{39.2 \times 86} \simeq 10.38 \text{ Kg/cm}^2$$

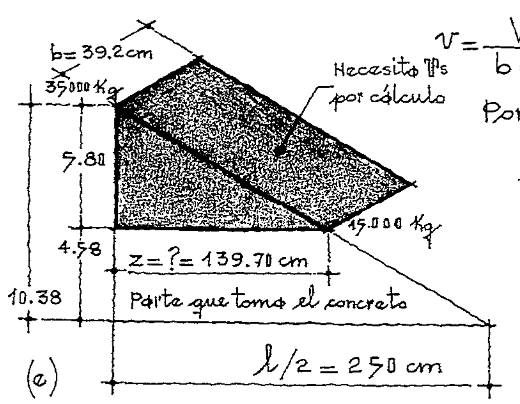


Fig. 8.30. Volumen del prisma triangular excedente, (e).

Porcentaje de acero:

$$L/h = \frac{500}{91} \simeq 5.5 > 5.0$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{b d} = \frac{27.85}{39.2 \times 86} \simeq 0.008$$

$$0.8\% < 1\%$$

El concreto toma:

$$V_{CR} = F_R\, b d\, (0.2 + 30 \rho_s) \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 39.2 \times 86 \,(0.2 + 30 \times 0.008)\, 12.65^*$$

$$\therefore\ V_{CR} \simeq 15\,000 \text{ Kg}$$

Por comparación de triángulos obtenemos el valor de "z"

$$\frac{250}{z} = \frac{10.38}{5.80} \quad \therefore\ z = \frac{250 \times 5.80}{10.38} \simeq 139.70 \text{ cm}$$

---

* El reglamento especifica:

$$f^* = 0.8 f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ Kg/cm}^2$$

Obtención del esfuerzo cortante excedente

$$T = \frac{5.80 \times 39.2 \times 139.70}{2} \simeq 15880 \text{ Kg}$$

A. tomando el cortante excedente con estribos verticales.

Suponemos estribos de 3/8" (#3).

$$\therefore t_{v} = 2A_s \times 0.40 f_y = 2 \times 0.71 \times 0.40 \times 4200 \simeq 2386 \text{ Kg}$$

$$\text{N° de estribos} = \frac{T}{t_d} = \frac{15880}{2386} \simeq 7 \text{ V}^s \# 3$$

Separación de estribos:

$$s_v = \frac{0.85 \times 2 \times 0.71 \times 0.40 \times 4200 \, (\text{sen } 90° + \cos 90°) \, 86}{35000 - 15000} \simeq 9 \text{ cm}$$

y,

$$s_v \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.71 \times 0.40 \times 4200}{3.5 \times 39.2} \simeq 15 \text{ cm}$$

Los estribos se colocarán a cada 9 cm, figura 8.31 y 8.32.

Fig. 8.31. Corte longitudinal mostrando armados, (a).

Fig. 8.32. Zonas de la viga donde se requieren estribos por cálculo (b).

Fig. 8.33. Espacio ocupado por las varillas longitudinales, (c).

Espacio ocupado por las varillas, fig. 8.33.

7 varillas = 7 × 1.59 cm = 11.13 cm

8 espacios = 8 × 3.00 cm = 24.00 cm

Suma = 35.13 cm

$\therefore$ 35.13 < 39.2 cm (correcto)

B. Cortante excedente con varillas dobladas.

Como las varillas dobladas ya se mencionó que se tienen que colocar por pares, se tiene:

Resistencia de un par de varillas dobladas de 5/8"

$$t_d = 2A_s \times 0.40 \times f_y = 2 \times 1.99 \times 0.40 \times 4200 \simeq 6680 \text{ Kg}$$

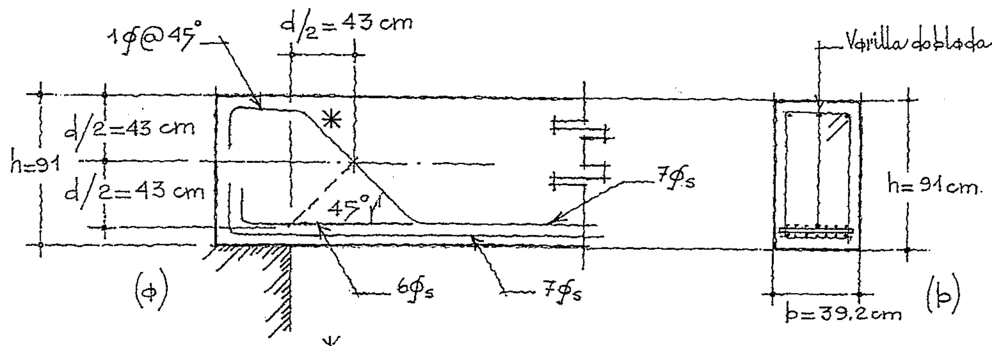
Valor de la tensión diagonal excedente, T_d:

$$T_d = \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{4475}{1.41} \simeq 3170 \text{ Kg}$$

$$\text{Número de varillas dobladas} = \frac{T_d}{t_d} = \frac{3170}{6680} \simeq 1 \text{ par}$$

Como el par de varillas se encuentra muy sobrado, se puede doblar únicamente una sola varilla (la central) que cubre ampliamente el esfuerzo de tensión diagonal excedente, figs. 8.34 y 8.35.

Fig. 8.34. Corte longitudinal mostrando la varilla doblada, (a).
Fig. 8.35. Corte transversal mostrando la varilla que se dobla, (b).



* El autor aconseja que la separación máxima entre varillas dobladas no exceda de:

$$\frac{d}{\sqrt{2}} \div 2 = \frac{86}{1.41} \div 2 \simeq 30 \text{ cm}$$

El reglamento dice:

Normalmente se manda hasta el apoyo, sin doblar, el 50% de las varillas, pues no es conveniente doblarlas todas, ya que la viga quedaría desprotegida para tomar cualquier fuerza imprevista.

En muchos casos se permite pasar hasta el apoyo, sin doblar, el 33% del acero, doblando el 66%.

C. Combinación de estribos con varilla doblada, fig. 8.36.

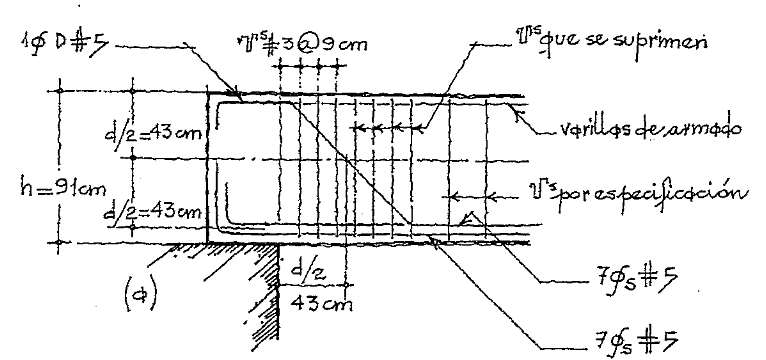


Fig. 8.36. Corte longitudinal mostrando la combinación de estribos y varillas dobladas, (a).

Cuando la tensión diagonal excedente es muy fuerte, se recomienda para absorberla combinar estribos verticales con varillas dobladas. La solución consiste simplemente en tomar un porcentaje del excedente con estribos y el resto con varillas dobladas.

En la práctica no resulta tan sencilla su construcción ya que generalmente se enciman ambos aceros resultando difícil determinar donde empiezan unos y donde terminan los otros.

Ahora bien, toda viga necesita llevar estribos aunque se coloquen únicamente por especificación, resultando más práctico separar dichos refuerzos y absorber el excedente con estribos verticales, con estribos inclinados o con varillas dobladas.

Una manera práctica y rápida de calcular el número de estribos y su separación, se logra fácilmente en forma gráfica, veamos la fig. 8.37.

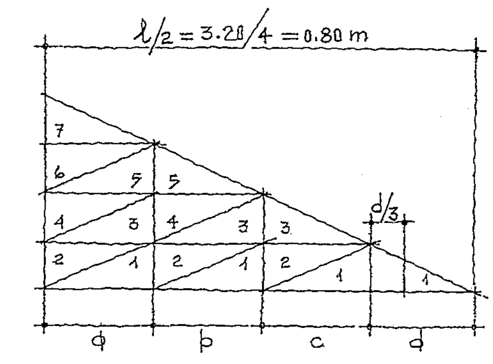


Fig. 8.37. Diagrama de esfuerzo cortante triangular. Número de estribos y separación, (b).

N° de espacios = 4 espacios iguales

$a = \frac{80\ cm}{7\ T^s} \simeq 11.40\ cm$

$b = \frac{80\ cm}{5\ T^s} = 16.00\ cm$

$c = \frac{80\ cm}{3\ T^s} \simeq 26.70\ cm$

$d = \frac{80\ cm}{3} = 26.70\ cm$

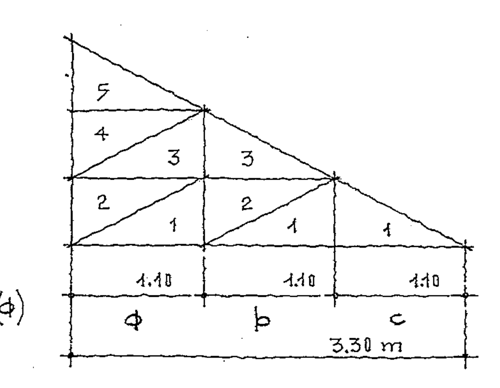
El procedimiento se explica a continuación.

Pasos a seguir:

1. Saber el número de estribos.
2. Para hacer la repartición de espacios se debe saber que el espacio representado con un pequeño triángulo contará con un estribo, el segundo espacio con tres estribos, el siguiente con cinco, siete, nueve, once, etc...

Para mayor claridad supongamos que se tienen once estribos, fig. 8.38.

Fig. 8.38. Esfuerzo cortante excedente de forma triangular, (a).



Número de estribos = 11

Número de espacios = 3

Con la división obtenemos 9 estribos y nos faltan 2. Se aconseja colocar 6 en el espacio, a, y 4 en el espacio b, por ser estos trapecios los que se encuentran sometidos a mayor esfuerzo cortante.

$$a = \frac{110}{5\,E} = 22\text{ cm}$$

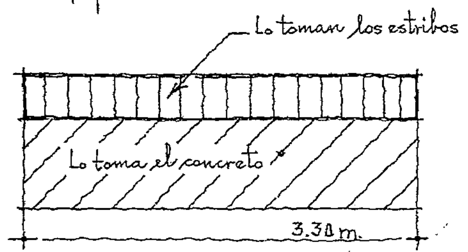
$$b = \frac{110}{3\,E} = 36.7\text{ cm}$$

$$c = \frac{1}{3}\,110 = 36.7\text{ cm}$$

3. La dimensión de cada espacio se divide entre el número de estribos y se obtiene la separación entre ellos en cada espacio.
4. Cuando la separación rebase la especificación, se colocarán a la distancia que determine dicha especificación.

Cuando el esfuerzo cortante excedente tiene forma rectangular, fig. 8.39.

Fig. 8.39. Esfuerzo cortante excedente de forma rectangular, (b).



separación de estribos

$$\frac{330\text{ cm}}{11\,E^{s}} = 30\text{ cm}$$

Ejemplo ilustrativo (*Diseño Plástico*)

Una viga con apoyos simples en ambos extremos se encuentra sometida a una carga concentrada de 25 ton.; se desprecia el peso propio de la viga, calcular:

Cortante excedente con estribos verticales.

Véanse las figuras 8.40 a 8.43.

Fig. 8.40. Viga con apoyos simples, (a).

(a) P = 25 ton. (No se consideró el peso propio) $R_i = V_i$ $R_d = V_d$ $a = 2.00$ m $b = 3.80$ m $l = 5.80$ m

Datos:

$f'_c = 250$ Kg/cm²

$f_y = 4200$ Kg/cm²

Solución según el Reglamento de Construcciones para el D.F.

Fig. 8.41. Diagrama de esfuerzo cortante, (b).

(b) V. 16.38 0 0 8.62

$$R_i = V_i = \frac{P \times b}{l} = \frac{25 \times 3.8}{5.8}$$

$\therefore R_i = V_i \simeq 16.38$ ton.

$$R_d = V_d = \frac{P \times a}{l} = \frac{25 \times 2.0}{5.8}$$

$\therefore R_d = V_d = 8.62$ ton.

Fig. 8.42. Diagrama de momento flexionante, (c).

(c) M. 0 0 $M_{máx.} = 32760$ Kg m

$$M_{máx.} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = \frac{25 \times 2 \times 3.8}{5.8} \simeq 32.76 \text{ tm}$$

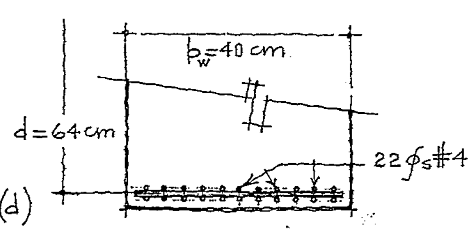
$A_s = \dfrac{M}{f_s j d}$, obtenemos primeramente el peralte:

$$d = \sqrt{\frac{M_{máx.}}{R\ b}} = \sqrt{\frac{3276000}{20 \times 40}} \simeq 64 \text{ cm}; \ h = 70 \text{ cm}$$

Se supuso un espesor en la viga de 40 cm.

$$\therefore A_s = \frac{3276000}{2100 \times 0.87 \times 64} = 28 \text{ cm}^2; \text{ con } \phi_s \#4 = \frac{28 \text{ cm}^2}{1.27 \text{ cm}^2} = 22 \phi_s \ 1/2''$$

Fig. 8.43. Corte transversal de la viga, (d).



$11 \phi_s \times 1.27 \text{ cm} = 13.97$ cm

12 espacios = 24.00 cm

$\simeq 40.00$ cm

El espesor de la viga está correcto.

Esfuerzo cortante excedente, fig. 8.44.

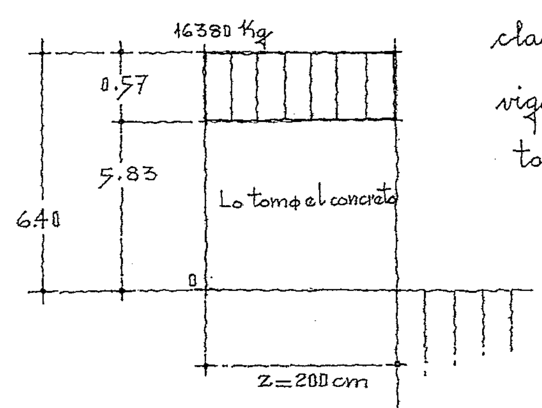


Fig. 8.44. Esfuerzo cortante excedente.

Cuando la relación entre el claro y el peralte total de la viga, $L/h > 5$, la fuerza que toma el concreto se calculará:

$$\frac{580}{70} \simeq 8.29 > 5$$

Porcentaje de acero

$$\rho_s = \frac{A_s}{bd} = \frac{28}{40 \times 64} \simeq 0.011$$

$$\therefore 1.10\% > 1.0\%$$

La fuerza que toma el concreto, V_{CR}, vale:

$$V_{CR} = 0.5\, F_R\, bd \sqrt{f_c^*} = 0.5 \times 0.8 \times 40 \times 64 \sqrt{212.5} \simeq 14930 \text{ Kg}$$

$$y,\ f_c^* = 0.85 f'_c = 0.85 \times 250 = 212.5 \text{ Kg/cm}^2$$

Valor del esfuerzo cortante unitario

$$v = \frac{V}{b\,d} = \frac{16380}{40 \times 64} = 6.40 \text{ Kg/cm}^2$$

Obtención del volumen del rectángulo excedente

$$T = 0.57 \times 40 \times 200 = 4560 \text{ Kg} \quad \therefore \quad T_d = \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{4560}{1.41} = 3234 \text{ Kg}$$

Además, el reglamento especifica que el valor obtenido de V_{CR}, será válido cuando

$$h/b \leq 6 \quad \therefore \quad \frac{70}{40} = 1.75 < 6$$

Tomando el cortante excedente con estribos a 90°, se tiene

con V^s # 2.5 ; $t_d = 2A_{sv} \times 0.40 \times f_Y = 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \simeq 1646$ Kg

$$\text{Número de estribos} = \frac{T_d}{t_d} = \frac{3234}{1646} \simeq 2\ V^s \# 2.5$$

con V^s # 2 ; $t_d = 2 \times 0.32 \times 0.40 \times 4200 \simeq 1075$ Kg

$$\text{Número de estribos} = \frac{T_d}{t_d} = \frac{3234}{1075} = 3\ V^s \# 2$$

Separación de estribos

$$s_V = \frac{F_R A_{sv}\, 0.40 f_Y d\,(\text{sen } 90° + \cos 90°)}{V - V_{CR}} = \frac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \times 64}{16380 - 14930}$$

$$s_V = 62 \text{ cm}$$

pero:

$$s_V \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200}{3.5 \times 40} \simeq 10 \text{ cm}$$

Como ya lo hemos visto en el tramo, a, de la viga se necesitan 2 estribos del #2.5 y su separación sería de

$$\frac{200\ cm}{2} = 100\ cm > \frac{d}{2} \text{ (No es aceptable)}$$

Por tanto, se colocarán a, fig. 8.45

$$\frac{d}{2} = \frac{64}{2} = 32\ cm$$

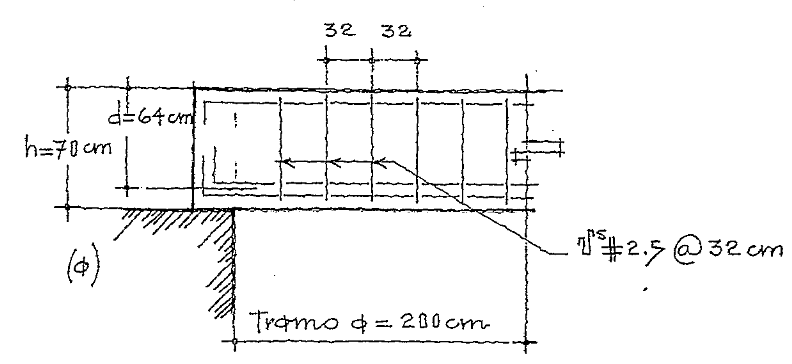


Fig. 8.45. Colocación de estribos y separación de los mismos, (a).

En el tramo, b, se colocarán estribos #2 a cada 32 cm, fig. 8.46.

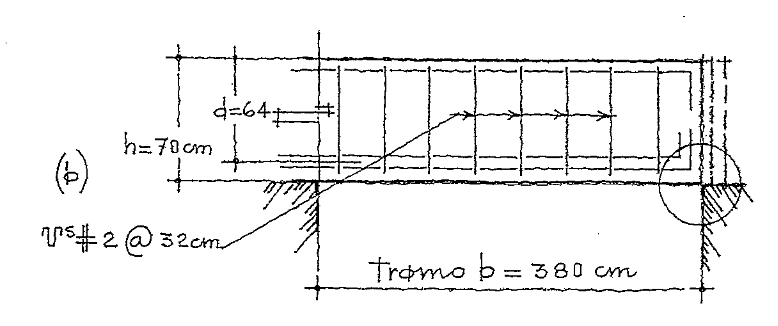


Fig. 8.46. Colocación de estribos y su separación, (b).

En la fig. 8.47 se muestra el armado completo de la viga

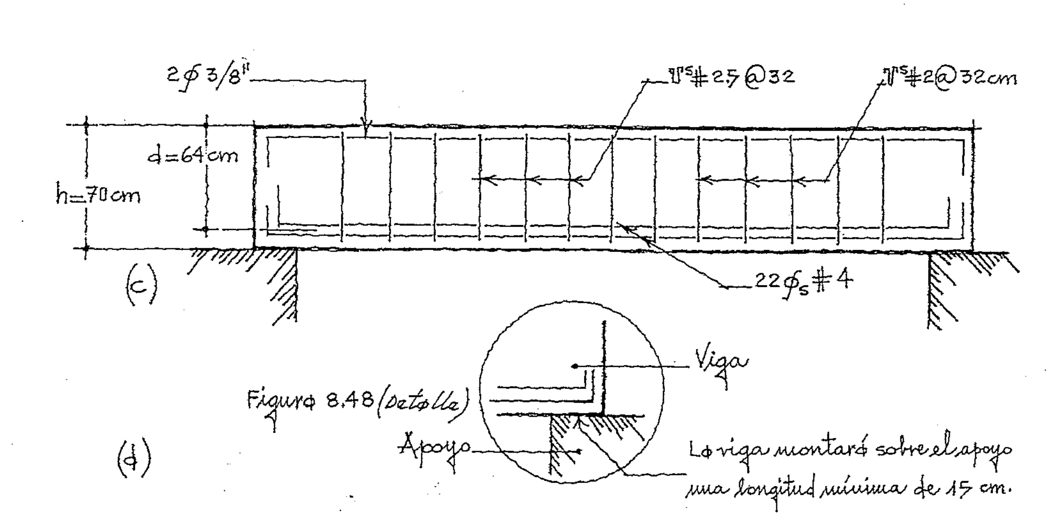


Fig. 8.47. Armado completo de la viga, (c).

Fig. 8.48. Detalle del apoyo, (d).

Ejemplo ilustrativo (*Diseño Plástico*)

Se tiene una viga apoyada en ambos extremos sometida a dos cargas concentradas fuertes; el peso propio de la viga no se consideró.

Calcular el esfuerzo cortante excedente utilizando estribos a 45°, figs. 8.49 a 8.52.

Fig. 8.49. Viga con apoyos simples.

Fig. 8.50. Diagrama de esfuerzo cortante.

Fig. 8.51. Diagrama de momento flexionante.

Fig. 8.52. Corte transversal de la viga.

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2;\ f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

Solución de acuerdo con las especificaciones del Reglamento de Construcciones para el D.F.

$$R_i = V_i = \frac{P_1(l - a) + P_2 b}{l}$$

$$= \frac{16(6.20 - 1.60) + 35 \times 2.20}{6.20}$$

$$\therefore R_i = V_i = 24.29 \text{ ton}$$

$$R_2 = V_2 = \frac{P_1 a + P_2(l - b)}{l}$$

$$= \frac{16 \times 1.60 + 35(6.20 - 2.20)}{6.20}$$

$$\therefore R_2 = V_2 = 26.71 \text{ ton}$$

$$M_1 = R_i\, a = 24.29 \times 1.60 \simeq 38.86 \text{ tm}$$

$$M_2 = R_d\, b = 26.71 \times 2.20 \simeq 58.76 \text{ tm}$$

Cálculo del peralte de la viga:

$$d = \sqrt{\frac{M\,máx.}{R\ b}} = \sqrt{\frac{5876000}{15 \times 50}} \simeq 90 \text{ cm}$$

Obtención del área de acero

$$A_s = \frac{5876000}{2100 \times 0.87 \times 90} = 35.74 \text{ cm}^2$$

Con varillas # 6

$$N.^\circ\ \phi_s = \frac{35.74}{2.87} \simeq 12 \phi_s \# 6$$

Porcentaje de acero:

$$\rho_s = \frac{A_s}{bd} = \frac{35.74}{50 \times 90} \simeq 0.008 = 0.8\% < 1\%$$

El concreto toma

$$V_{CR} = F_R\, bd\,(0.2 + 30\rho_s)\sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 50 \times 90\,(0.2 \times 30 \times 0.008)\sqrt{160}$$

$$\therefore V_{CR} \simeq 20\,000 \text{ Kg}$$

En la fig. 8.53 se muestran los valores del cortante excedente.

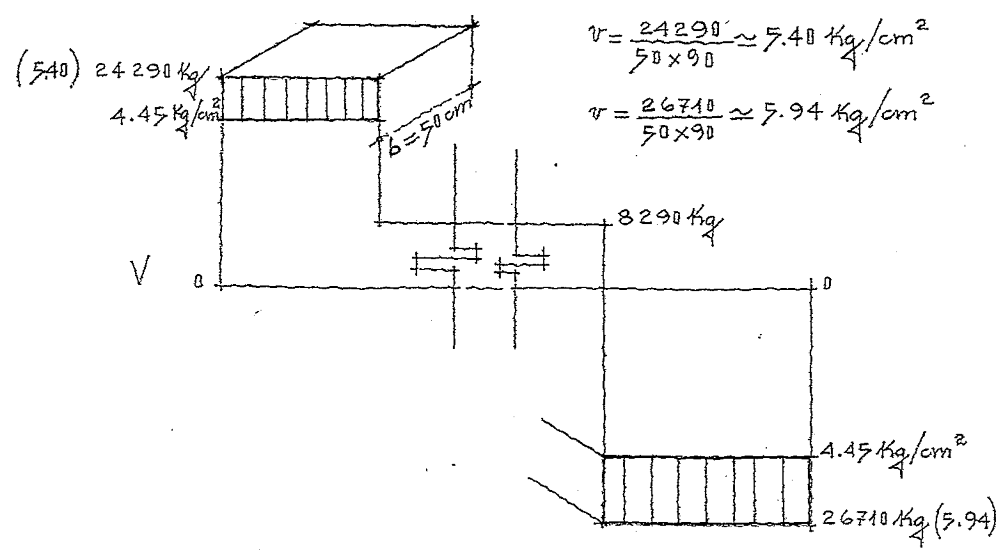


Fig. 8.53. Diagrama de cortantes.

Obtención de los cortantes excedentes (volumen), figs. 8.54 y 8.55.

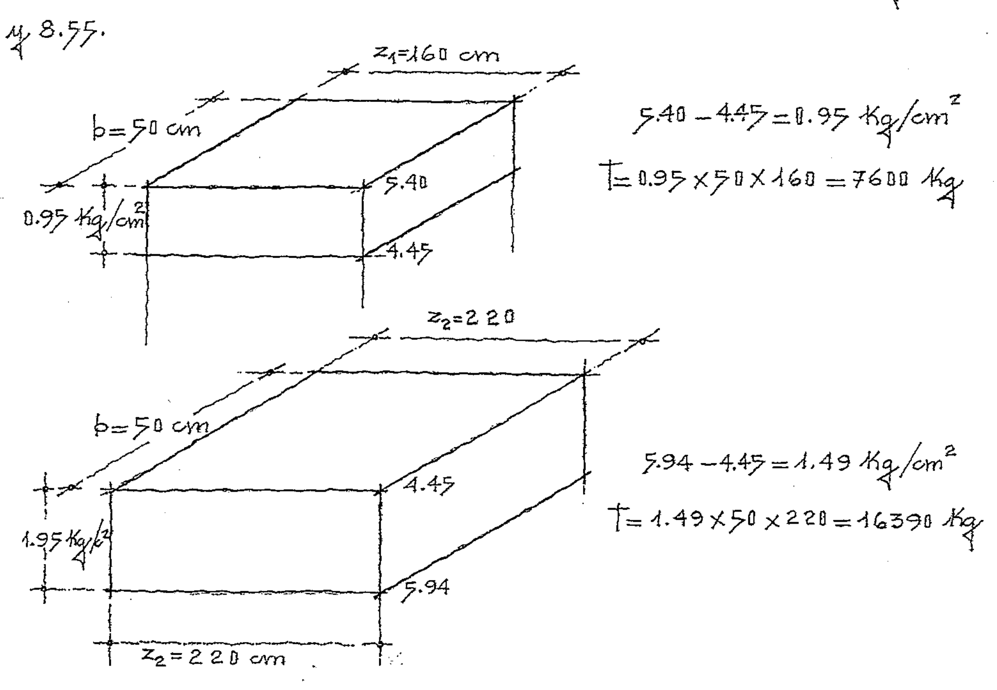


Fig. 8.54. Volumen de cortante excedente.

Fig. 8.55. Volumen de cortante excedente.

Se toma el cortante excedente con estribos del #2 a 45°

$$t_d = 2A_s\,0.40 f_y = 2\times 0.32\times 0.40\times 4200 \simeq 1075 \text{ Kg}$$

y, $$T_d = \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{7600}{1.41} = 5390 \text{ Kg}$$

$$\text{N° de estribos} = \frac{T_d}{t_d} = \frac{5390}{1075} = 5 \text{ E \#2 a } 45°$$

En las figs. 8.56 a 8.58 se muestra la colocación de estribos.

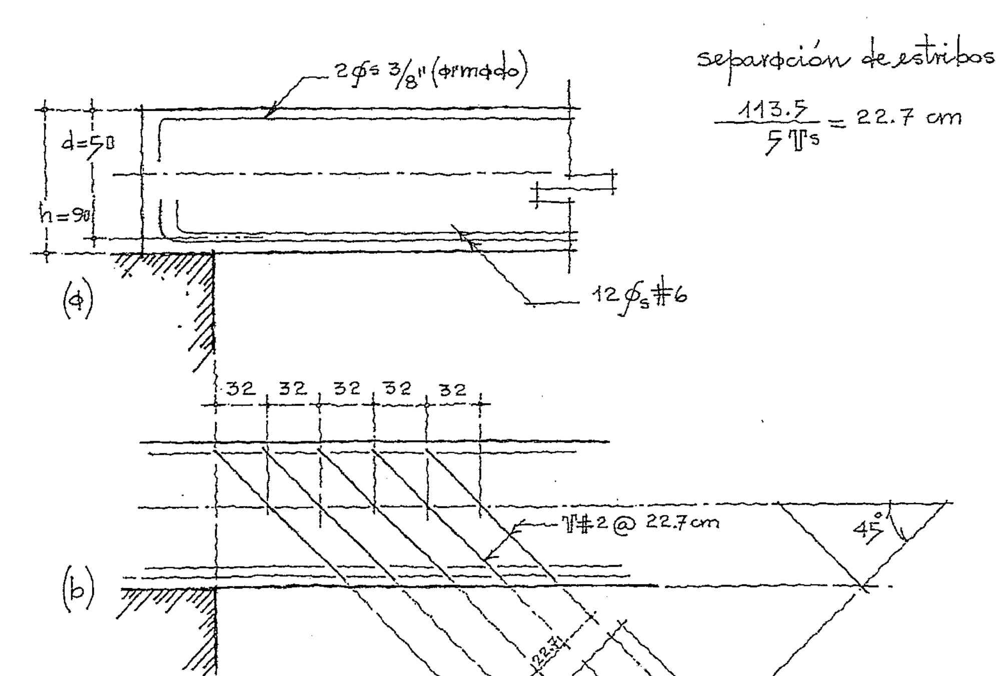


Fig. 8.56 Corte longitudinal de la viga, (a).

Fig. 8.57. Colocación de los estribos a 45°, (b).

Fig. 8.58. Diagrama para obtener la separación de estribos a 45°, (c).

Revisión de especificaciones según el Reglamento de Construcciones para el D.F.:

Cuando V_u es mayor que V_{CR} pero menor o igual que,

$$1.5 F_R bd\sqrt{f_c^*} = 1.5\times 0.8\times 50\times 90\sqrt{160} = 68310 \text{ Kg}$$

Cuando $V_u > V_{CR}$ ∴ 24290 Kg > 20000 Kg, pero es menor que 68310 Kg, la separación no será mayor que $\frac{d}{2}$.

La separación de estribos está correcta ya que 22.7 cm < 45 cm.

A continuación calculamos el cortante excedente en el tramo, z_2, con estribos del #2.5 inclinados a 45°.

$$t_d = 2A_s\ 0.40 \times 4200 = 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 = 1646\ Kg$$

$$y,\quad T_d = \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{16390}{1.41} \simeq 11624\ Kg$$

$$N^o\ \nabla_s = \frac{T_d}{t_d} = \frac{11624}{1646} \simeq 7\ \nabla_s \#\ 2.5\ a\ 45°$$

En las figuras 8.59 a 8.61 se muestra la colocación de estribos, veamos

Separación de estribos

$$\frac{156\ cm}{7\ \nabla_s} \simeq 22.3\ cm$$

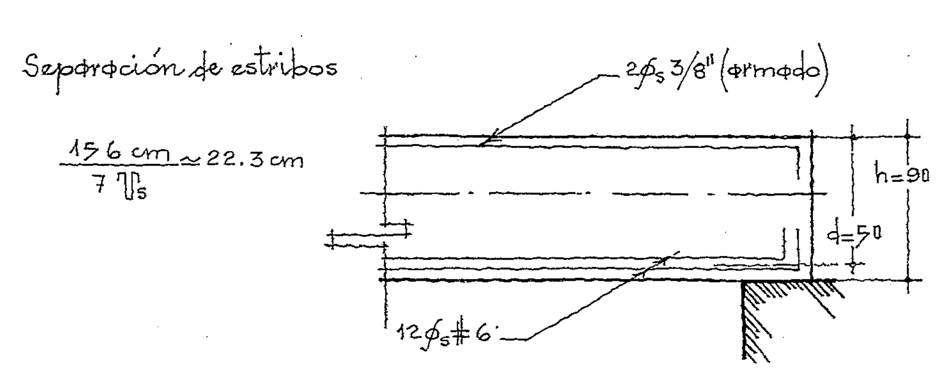


Fig. 8.59. Corte longitudinal de la viga.

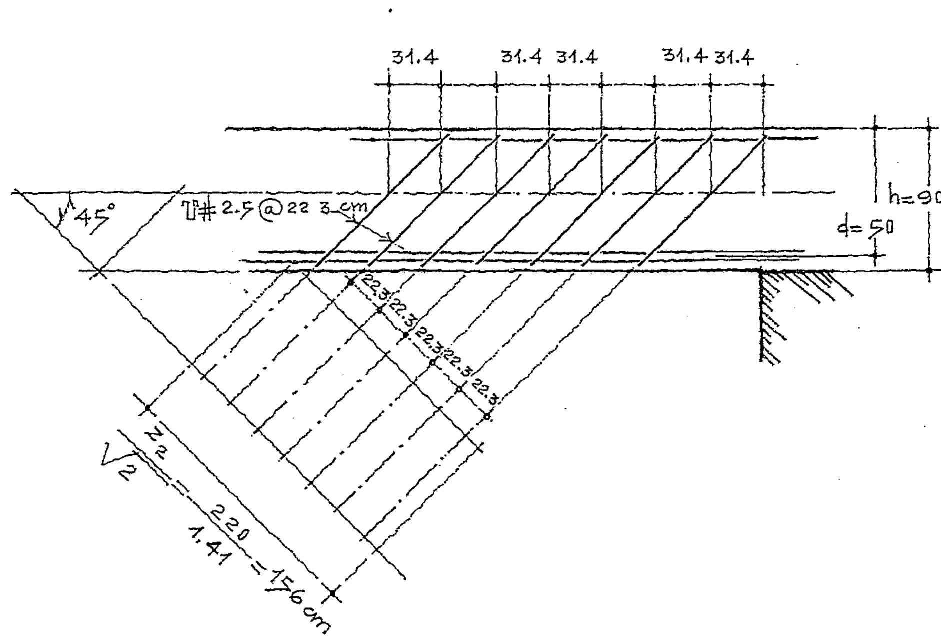


Fig. 8.60. Colocación de los estribos a 45°.

Fig. 8.61. Diagrama para obtener la separación de estribos a 45°.

Revisión de especificaciones según el Reglamento de Construcciones para el D.F.:

$V_U > V_{CR}$ ∴ 26710 Kg > 20000 Kg, pero es menor que 68310 Kg, por tanto la separación es correcta ya que $22.3 < \frac{d}{2}$.

Ejemplo ilustrativo (*Diseño Plástico*)

Se tiene una viga apoyada simplemente en ambos extremos y se encuentra cargada como se muestra en las figuras 8.62 a 8.64.

Calcular el cortante excedente utilizando estribos a 90°.

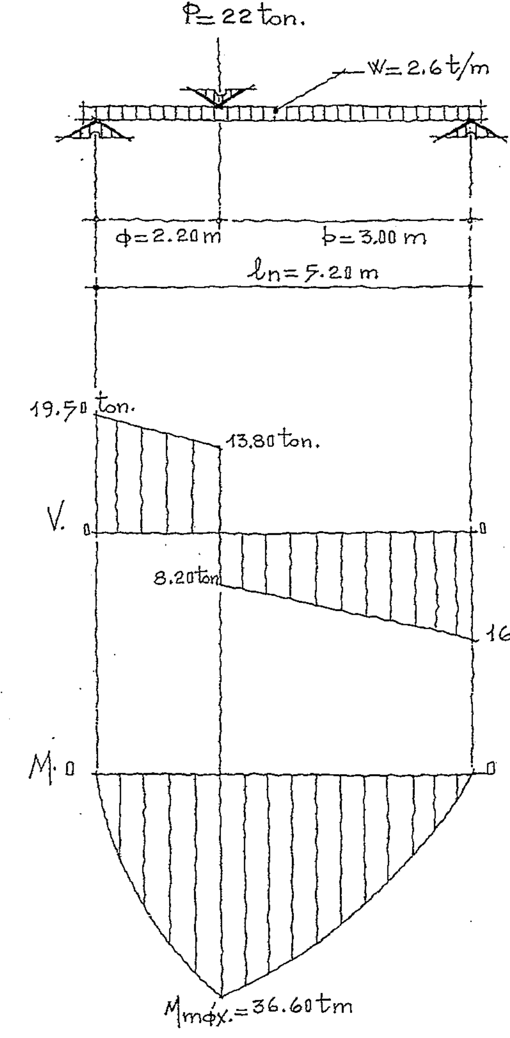


Fig. 8.62. Viga simplemente apoyada.

Fig. 8.63. Diagrama de esfuerzo cortante.

Fig. 8.64. Diagrama de Momento flexionante.

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

Solución aplicando el Reglamento de Construcciones ACI.

$R_i + R_d - 22 - (2.6 \times 5.20) = 0$

$\Sigma M_i = R_d \times 5.20 - 22 \times 2.20 -$

$-(2.6 \times 5.20 \times 2.60) = 0$

$\therefore R_d = \frac{48.40 + 35.15}{5.20} \simeq 16\ ton.$

Por tanto

$R_i + 16 - 22 - 13.50 = 19.50\ ton.$

$M_{máx.} = \frac{19.5 + 13.8}{2.00}\ 2.20 = 36.60$

$\therefore 36600\ Kgm = 3660000\ Kgcm$

Cálculo del peralte de la viga

$d = \sqrt{\frac{M_{máx.}}{Q\ b_w}} = \sqrt{\frac{3\,660\,000}{15 \times 40}} \simeq 78\ cm$

Se supuso a $b = 40$ cm

Obtención del área de acero

$A_s = \frac{3\,660\,000}{2100 \times 0.87 \times 78} = 25.68\ cm^2$

Con ϕ_s #8 $\therefore \frac{25.68}{5.07} \simeq 5\phi_s$ #8

En la fig. 8.64a se presentan los armados en corte transversal.

5 varillas x 2.54 = 12.70 cm

6 espacios x 3.00 = 18.00 cm

30.70 cm < 40 cm

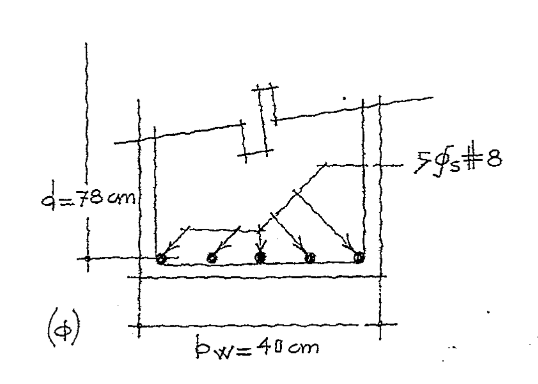


Fig. 8.64a. Corte transversal de la viga mostrando los armados, (a).

Fuerzo cortante que toma el concreto

$$V_c = 0.53\sqrt{f'_c}\, b_w d = 0.53\sqrt{200} \times 40 \times 78 \simeq 23380 \text{ Kg}$$

Cuando $V_U > 50\%\, F_R V_c$, se colocará una área mínima de refuerzo por cortante calculada con la expresión

$$A_v = 3.5 \frac{b_w s}{f_Y}$$

veamos:

$$50\%\, F_R V_c = 0.50 \times 0.85 \times 23380 \simeq 9937 \text{ Kg}$$

Como $V_U = 19500$ Kg resultó mayor, se colocará una área de refuerzo por cortante de

$$A_v = 3.5 \frac{40 \times 520}{4200} \simeq 17.34 \text{ cm}^2$$

Utilizando estribos del número 2.5, se tiene

$$\frac{17.34 \text{ cm}^2}{0.49 \text{ cm}^2} \simeq 36 \text{ E}^s \# 2.5$$

Separación de estribos

$$\frac{520 \text{ cm}}{36 \text{ E}^s} \simeq 15 \text{ cm}$$

En la fig. 8.65 se muestra la colocación de los estribos en la viga.

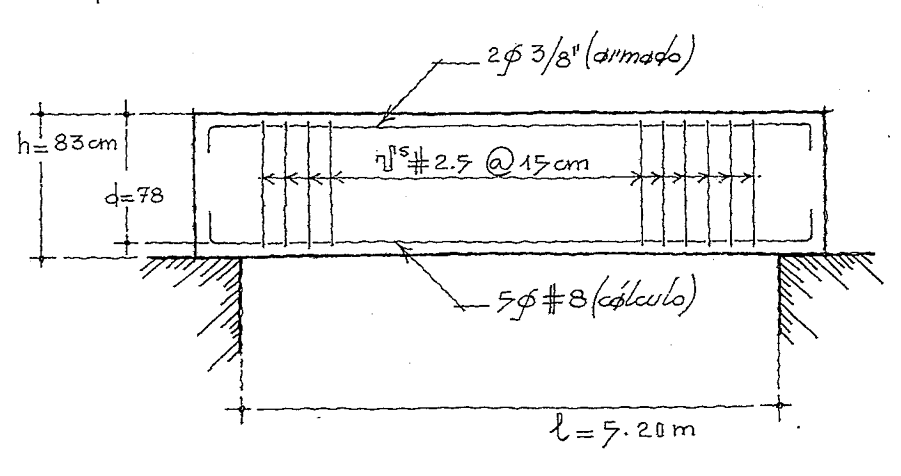


Fig. 8.65 Armado de la viga.

El reglamento ACI especifica:

Ningún estribo se colocará a una separación mayor de $\frac{d}{2}$.

Ejemplo ilustrativo (Diseño Plástico)

Calcular la resistencia a cortante de una viga simplemente apoyada, utilizando estribos a 90°.

Figuras 8.66 a 8.69.

Fig. 8.66. Viga simplemente apoyada, (a).

$P = 38$ ton. $w = 4.2$ t/m. R_i R_d $a = 2.00$ m $b = 1.80$ m $l = 3.80$ m (a)

Fig. 8.67. Diagrama de esfuerzo cortante, (b).

V. 25.96 17.56 $\frac{25.96+17.56}{2}2 = 43.52$ 0 0 (b) $\frac{28.0+20.44}{2}1.80 \simeq 43.52$ tm 20.44 28.00

Fig. 8.68. Diagrama de momento flexionante, (c).

M. 0 0 (c) $M_{máx.} = 43.52$ tm

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm²; $f_y = 4200$ Kg/cm²

Solución aplicando el Reglamento de Construcciones ACI.

$R_i + R_d - 38\text{ton.} - (4.2 \times 3.80) = 0$

$\Sigma M_i = R_d \cdot 3.80 - 38 \times 2.0 - (4.2 \times 3.8 \times 1.9)$

$\therefore R_d = \frac{76 + 30.32}{3.80} \simeq 28$ ton.

$R_i + 28 - 38 - 15.96 \therefore R_i = 25.96$t

Cálculo del peralte de la viga:

$d = \sqrt{\frac{M_{máx.}}{Q\, b_w}} = \sqrt{\frac{4352000}{15 \times 40}} \simeq 85$ cm

b, se supuso igual a 40 cm

Resistencia del concreto al esfuerzo cortante

$F_R V_c = (0.85)\, 0.53 \sqrt{f'_c}\, b_w d,$

$= 0.85 \times 0.53 \sqrt{200} \times 40 \times 85$

$\therefore F_R V_c = 21658 \text{ Kg} < V_u$

La viga necesita estribos.

Cálculo del área de acero

$A_s = \frac{4352000}{2100 \times 0.87 \times 85} = 28 \text{ cm}^2$

Con ϕ_s #8 $\therefore \frac{28}{5.07} \simeq 6\phi_s\ 1''$

Veamos la colocación de las varillas en un corte transversal de la viga.

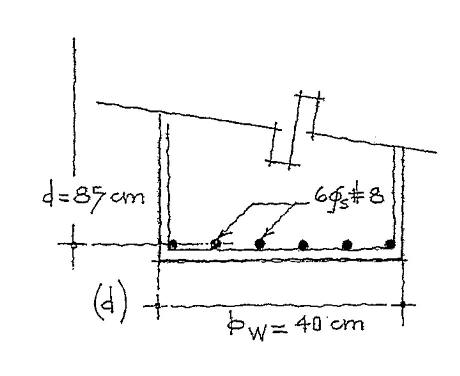


Fig. 8.69. Corte transversal mostrando los armados, (d).

En las figs. 8.70 y 8.71 se muestran los esfuerzos cortantes excedentes, veamos:

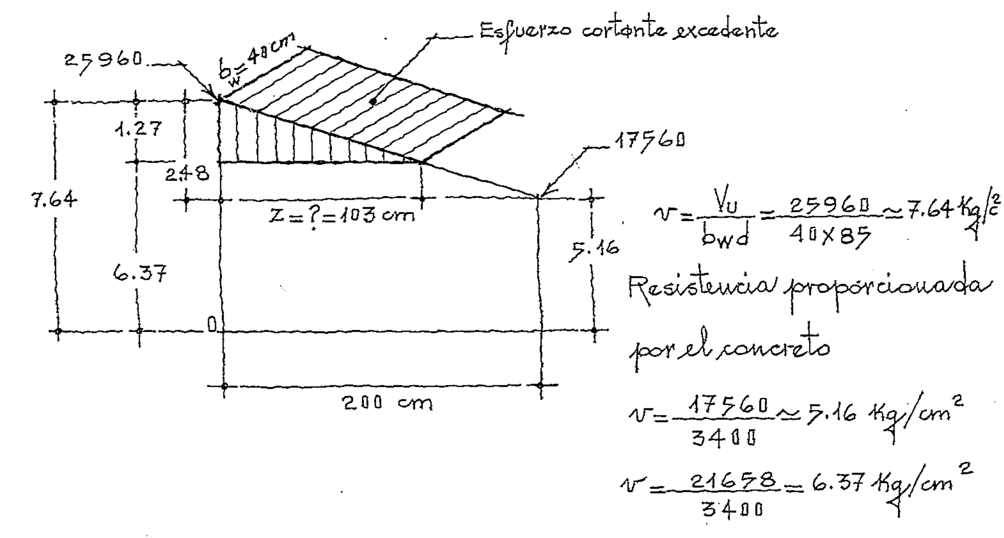


Fig. 8.70. Diagrama de esfuerzo cortante excedente.

$$v = \frac{V_U}{b_w d} = \frac{25960}{40 \times 85} \simeq 7.64 \text{ Kg/cm}^2$$

Resistencia proporcionada por el concreto

$$v = \frac{17560}{3400} \simeq 5.16 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v = \frac{21658}{3400} = 6.37 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\frac{200}{z} = \frac{2.48}{1.27} \quad \therefore \quad z = \frac{200 \times 1.27}{2.48} \simeq 103 \text{ cm}$$

Separación de estribos.

Con estribos #2.5

Cuando $V_U > F_R V_n$, se tiene

$$V_n = V_c + V_s$$

Ya se obtuvo el valor de $V_c(F_R) = 21658$ Kg, por tanto

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad \therefore \quad s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \times 85}{4302} \simeq 32.6$$

y,

$$V_s = V_U - F_R V_c = 25960 - 21658 = 4302 \text{ Kg}$$

Separación máxima

$$s \leq \frac{d}{2} = \frac{85}{2} = 42.5$$

$$\therefore \quad s < \frac{d}{2}$$

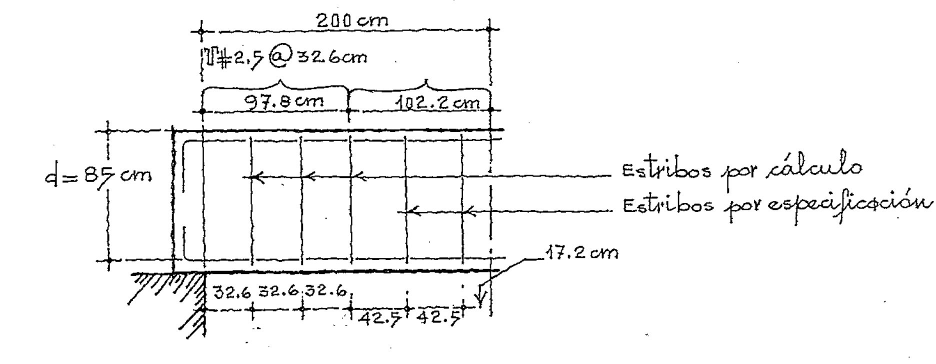


Fig. 8.71. Colocación de estribos y su separación.

En las figuras 8.72 y 8.73 se muestran los esfuerzos cortantes excedentes en el tramo, b, de la viga, veamos:

Cálculo del valor de, z, por comparación de triángulos

$$\frac{180}{z} = \frac{2.24}{2.03} \therefore z \simeq 163 \text{ cm}$$

$$\frac{V_u}{bwd} = \frac{28000}{3400} \simeq 8.24 \text{ Kg/cm}^2$$

180 cm
0
6.37
8.24
6.00
z = ? = 163 cm
2.24
2.03
20440 Kg
Esfuerzo cortante excedente
bw = 40 cm
28000 Kg

Fig. 8.72. Diagrama de esfuerzo cortante excedente.

Resistencia proporcionada por el concreto (V_c)

$$\frac{20440}{40 \times 85} \simeq 6.00 \text{ Kg/cm}^2$$

y,

$$F_R V_c = (0.85)\, 0.53 \sqrt{200} \times 40 \times 85 \simeq 21658 \text{ Kg}$$

$$\therefore \frac{21658}{3400} \simeq 6.37 \text{ Kg/cm}^2$$

Separación de estribos

Con estribos #2.5

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad y \quad V_s = V_u - F_R V_c = 28000 - 21658 = 6342 \text{ Kg}$$

$$V_s\, s = A_v f_y d \;\therefore\; s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \times 85}{6342} = 22 \text{ cm}$$

Separación máxima

$$\frac{d}{2} = \frac{85}{2} = 42.5 \text{ cm} \;\therefore\; s < \frac{d}{2}$$

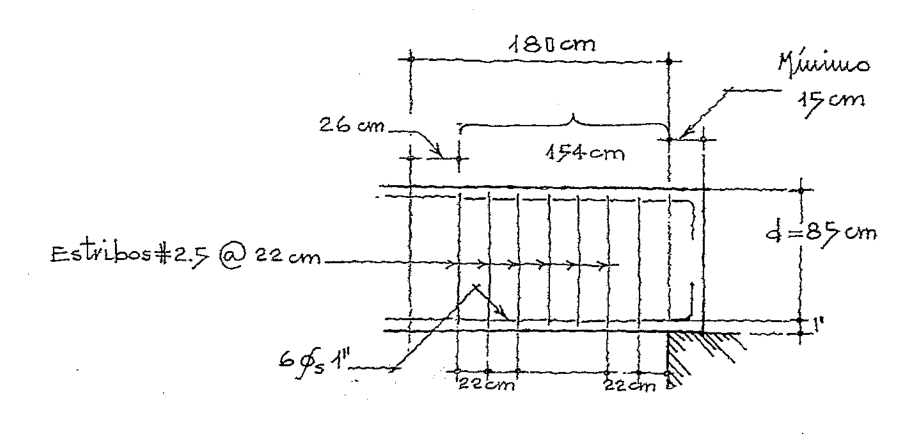


Fig. 8.73. Colocación de estribos y su separación.

Referencias bibliográficas

Capítulo 8

Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, México, 1988.

Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado, ACI 318-83, Detroit, 1983.

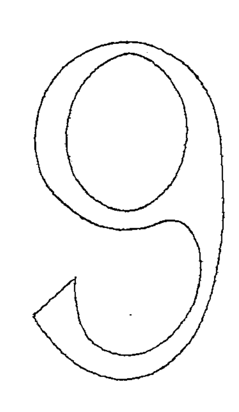
Comité ACI-ASCE 426, *The Shear Strength of Reinforced Concrete Members*, Detroit, 1974.

American Concrete Institute, *ACI Manual of Concrete Practice*, Detroit, 1973.

Comité ACI-ASCE 426, *The Shear Strength of Reinforced Concrete Members*, American Concrete Institute, Detroit, 1980.

Comité ACI-ASCE 426, *The Shear Strength of Reinforced Concrete Members*, Detroit, 1973.

Comité ACI-ASCE 426, *Shear and Diagonal Tension*, ACI Journal, *Proceedings*, 1963.



ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSIÓN

9.1. Generalidades

La torsión se presenta generalmente en aquellas estructuras donde se empotran losas en voladizo, estructuras continuas, vigas curvas, y ante la presencia de una flexión biaxial donde actúan cargas fuera del eje longitudinal de simetría, figs. 9.1 a 9.3.

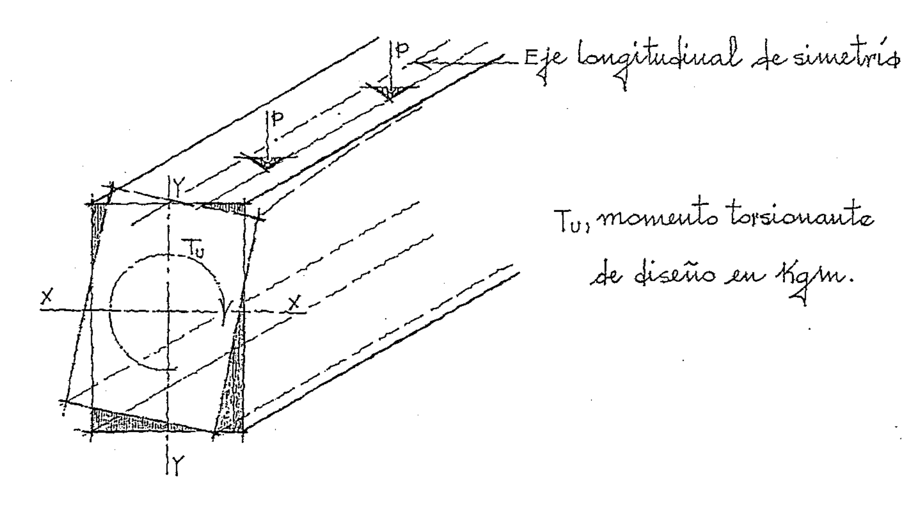


Fig. 9.1. Carga fuera del eje de simetría.

T_U, momento torsionante de diseño en Kg/m.

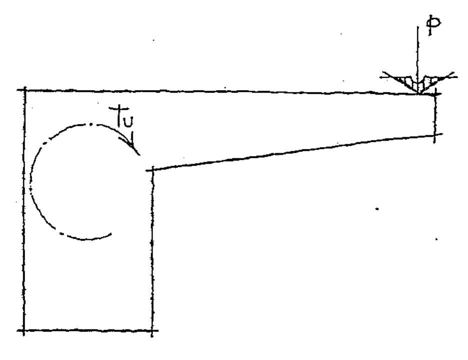


Fig. 9.2. Losa en voladizo.

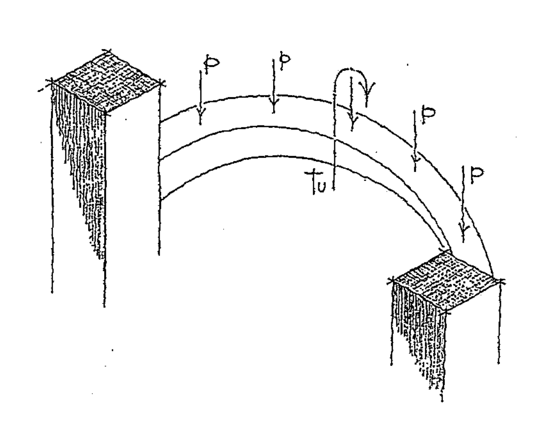


Fig. 9.3. Viga curva. Torsión.

Es común, que ante la presencia de acciones torsionantes se combinen fuerzas flexionantes, cortantes y carga axial, que producen torsiones primarias y secundarias.

Para su estudio, consideramos una viga empotrada en un extremo, figuras 9.4 y 9.5.

Fig. 9.4. Momento de torsión aplicado a una viga empotrada en voladizo.

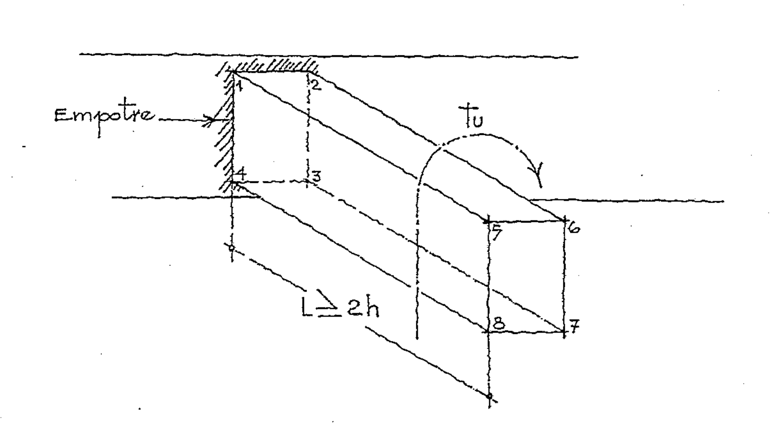
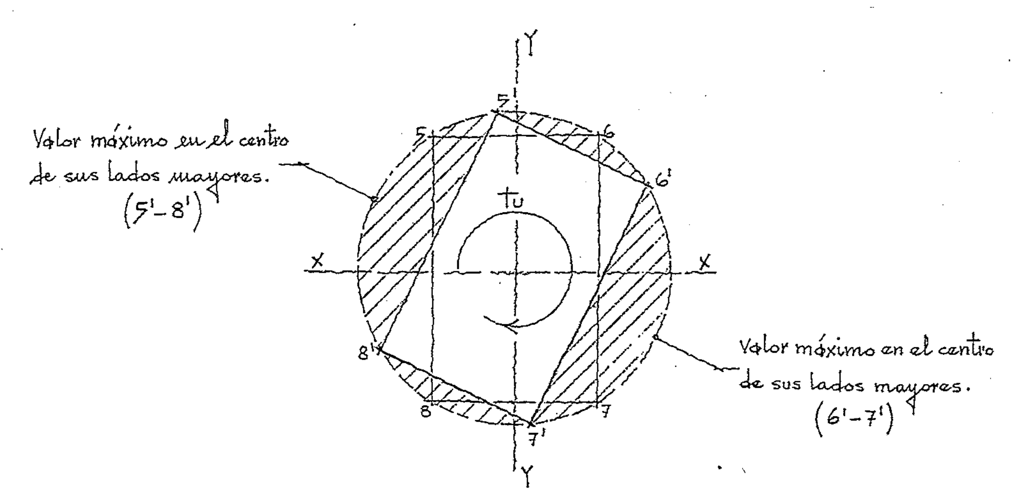


Fig. 9.5. Giro de la viga ante la aplicación del momento de torsión.



El Reglamento de Construcciones para el D.F, dispone:

"Toda especificación indicada para la torsión, será válida para aquellos tramos cuya longitud no sea menor que el doble de la altura total (h) del miembro. Cuando la sección se encuentre situada a menos de un peralte efectivo (d) de la cara del apoyo, se tomará para la torsión una distancia igual a un peralte efectivo."

Se observa en la figura 9.5 que ante la aplicación del momento torsional, la sección gira sobre su centro de gravedad, donde su valor es nulo en los vertices y máximo en el centro de sus lados mayores.

9.2. Obtención de las fórmulas de torsión

En la figura 9.6 se presenta un corte transversal de un elemento rectangular donde el momento de torsión aplicado, se descompone en dos pares de fuerzas que actúan en las caras, b, y h; para que haya equilibrio, será necesario que la suma de los pares de fuerzas sea igual al momento de torsión, además, por proporcionalidad las fuerzas de los pares F_b y F_h son directamente proporcionales al ancho de la cara a la que se aplican.

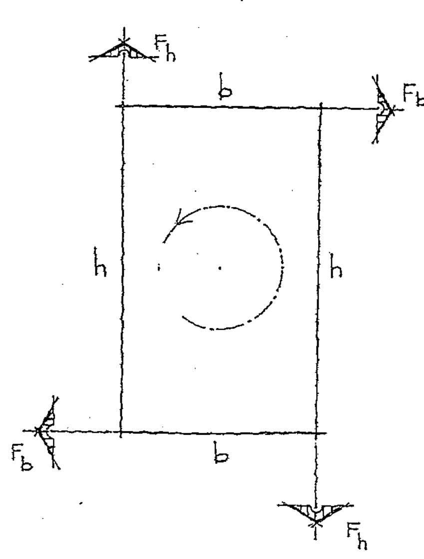


Fig. 9.6. Aplicación del momento de torsión.

En efecto,

$$T_U^* = F_b h + F_h b \qquad (9.1)$$

y por proporcionalidad

$$\frac{F_h}{F_b} = \frac{h}{b} \qquad (9.2)$$

Además, cada una de las fuerzas verticales y horizontales se pueden descomponer a su vez en dos fuerzas que forman con el eje de la pieza ángulos de 45°; cada par de estas fuerzas produce esfuerzos de compresión en una cara y de tensión en la cara perpendicular a la anterior, véase la figura 9.7.

* T_U, momento torsionante de diseño, en Kgcm

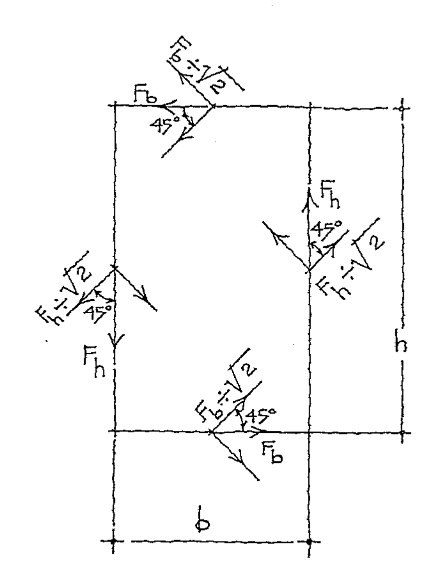


Fig. 9.7. Descomposición del par de fuerzas.

De ambas ecuaciones se obtiene:

$$F_h = F_b \frac{h}{b} \quad y \quad F_b = F_h \frac{b}{h} \qquad (9.3)$$

Dando a F_h y F_b su valor, ecuación 9.1

$$T_U = F_b \left(\frac{h}{b}\right) b + F_b h = 2 F_b h \qquad (9.4)$$

y también

$$T_U = F_h \left(\frac{b}{h}\right) h + F_h b = 2 F_h b \qquad (9.5)$$

y de las ecuaciones 9.4 y 9.5 obtenemos

$$T_U = 2 F_b h \therefore F_b = \frac{T_U}{2h} \quad y \quad T_U = 2 F_h b \therefore F_h = \frac{T_U}{2b} \qquad (9.6)$$

En consecuencia, la tensión total en las cuatro caras, tiene un valor de:

$$\text{Tensión total} = 2\left(\frac{F_h}{\sqrt{2}} + \frac{F_b}{\sqrt{2}}\right) \qquad (9.7)$$

La tensión será tomada totalmente por el acero, por tanto

$$A_s f_Y = 2\left(\frac{F_h}{\sqrt{2}} + \frac{F_b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 F_h}{\sqrt{2}} + \frac{2 F_b}{\sqrt{2}} \qquad (9.8)$$

Substituyendo en la ecuación 9.6, a F_h y F_b por sus valores, se tiene

$$A_s f_Y = \frac{T_U}{b\sqrt{2}} + \frac{T_U}{h\sqrt{2}} \qquad (9.9)$$

El acero de refuerzo corta en dos ocasiones los lados corto y largo, por tanto, el esfuerzo en el acero será la mitad de la tensión:

$$\frac{A_s f_Y}{2} = \frac{T}{2} = \frac{t_U (h+b)}{h b \sqrt{2}}, \text{ de donde} \quad . \quad . \quad (9.10)$$

$$A_s f_Y = \frac{t_U (h+b)}{2 h b \sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.11)$$

y por último, se tiene:

$$A_s = \frac{t_U (h+b)}{2 h b f_Y \sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.12)$$

Siempre que se respete la condición de que en cada cara de la sección perpendicular al eje longitudinal crucen dos varillas, el número de espirales quedará definido por la expresión

$$\text{Número de espirales} = \frac{2(h+b)}{h/2} \quad . \quad . \quad . \quad (9.13)$$

Para el refuerzo por torsión el Reglamento de Construcciones para el D.F., dice:

"El refuerzo de acero estará formado por estribos cerrados perpendiculares al eje de la sección y por barras longitudinales, o también, por refuerzo helicoidal. El refuerzo requerido por torsión se combinará con el necesario para tomar otros esfuerzos internos, de tal manera, que el área total de acero no sea menor que la suma de las áreas individuales necesarias. El refuerzo por torsión se colocará por lo menos en una distancia (h+b), más allá del punto donde teóricamente ya no se necesita tal refuerzo."

El refuerzo por torsión será necesario cuando

$$\frac{(t_U)^2}{(T_{OR})^2} + \frac{(V_U)^2}{(V_{CR})^2} \geq 1.0 \quad . \quad . \quad (9.14)$$

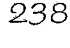
y además,

$$T_U > T_{CR} \; ; \; y \; T_{CR} = 0.25\, T_{OR} \quad . \quad . \quad (9.15)$$

donde

T_{OR}, momento torsionante de diseño de un miembro sin refuerzo para torsión

T_{CR}, momento que absorbe el concreto en un miembro reforzado por torsión, en Kgcm.



Para secciones rectangulares y secciones T, I o L, el valor de T_{OR} se calcula con la expresión

$$T_{OR} = 0.6\, F_R \Sigma\, x^2 y \sqrt{f_c^*} \qquad (9.16)$$

siendo,

x y y, las dimensiones menor y mayor de los rectángulos en que queda la sección, fig. 9.8, al considerar cada ala y el alma con el peralte completo de la sección, pero sin tomar a, y, mayor que 3x. Σ, es la suma de los rectángulos que componen la sección.

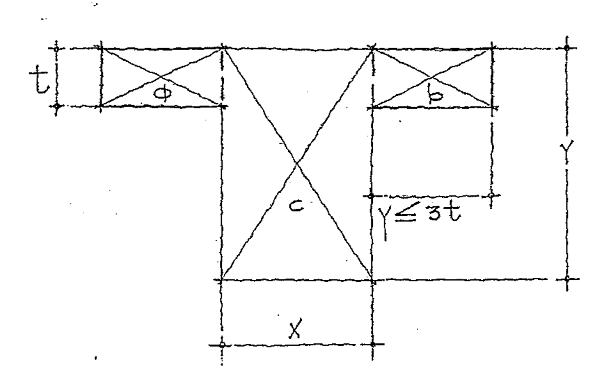


Fig. 9.8. Descomposición del elemento en secciones.

Para secciones circulares se pueden utilizar las mismas ecuaciones (T_{OR} y T_{CR}), pero

$$X = Y = 0.8 \text{ diámetros}$$

Cuando se trate de miembros donde también se encuentren sometidos a tensión axial (columnas), el valor de T_{OR} se multiplicará por $(1.0 - 0.03\, P_U \div A_g)$.

Ya se vió que el refuerzo para torsión puede ser con estribos cerrados, barras longitudinales o con refuerzo helicoidal.

A. Refuerzo transversal con estribos cerrados.

El área del estribo se calculará con la expresión

$$A_{sv} = \frac{(T_U - T_{CR})}{F_R\, \Omega\, x_1 y_1 f_{yv}}\, s \qquad (9.17)$$

y $$\frac{A_{sv}}{s} = \frac{(T_U - T_{CR})}{F_R \Omega x_1 y_1 f_{yv}} \qquad (9.18)$$

siendo,

Ω, es una constante obtenida experimentalmente y tiene un valor de

$$\Omega = 0.67 + 0.33\, y_1 \div x_1 \leq 1.5$$

El área de estribos (*por torsión y fuerza cortante*) no será menor que la obtenida con la ecuación 9.17, suponiendo $T_U = 4\,T_{CR}$.

La separación, s, no será mayor que la menor de las tres especificaciones siguientes; figs. 9.9 a 9.11.

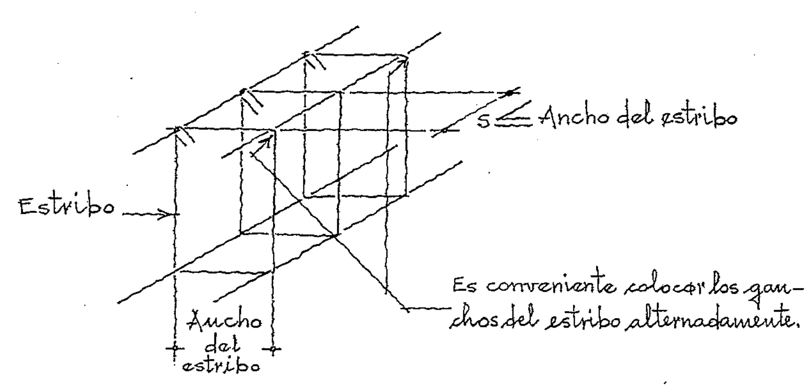


Fig. 9.9. Separación de estribos.

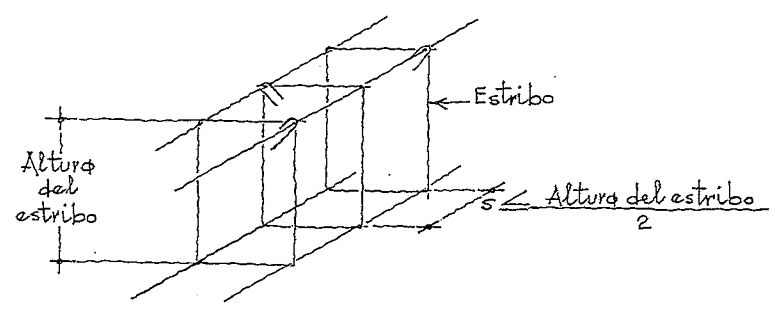


Fig. 9.10. Separación de estribos.

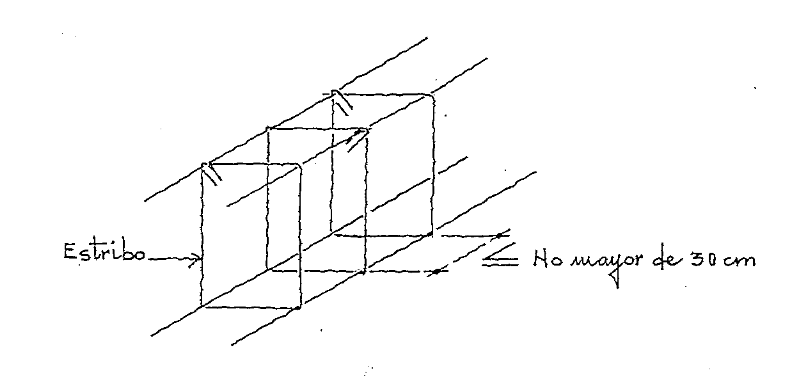


Fig. 9.11. Separación de estribos.

B. Barras longitudinales.

Para absorber la torsión con barras longitudinales su área A_{st}, se calculará con la ecuación

$$A_{st} = \frac{2A_{sv}}{s}(x_1 + y_1)\frac{f_{yv}^{*}}{f_y}$$

La separación entre las barras longitudinales no excederá de 50 cm (fig. 9.12) y su diámetro no será menor que el de los estribos.

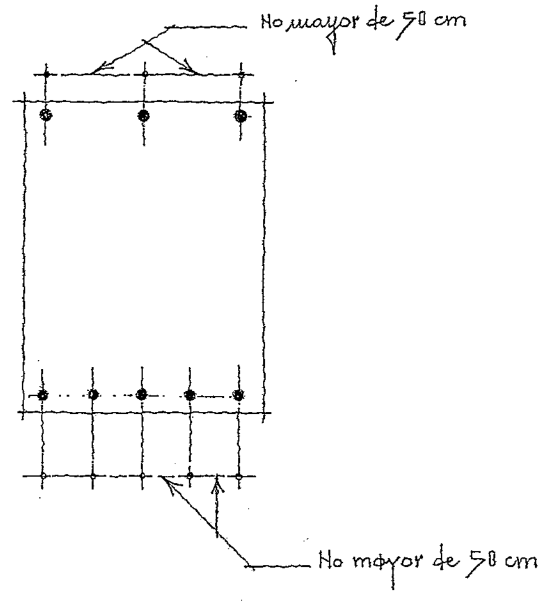


Fig. 9.12. Separación entre las varillas longitudinales.

El acero longitudinal se colocará en el perímetro de la sección transversal y llevará por lo menos una barra en cada esquina, fig. 9.13.

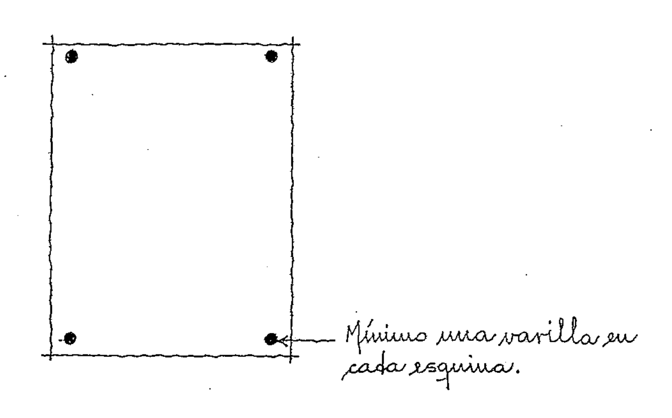


Fig. 9.13. Varillas colocadas en el perímetro de la sección transversal.

*El autor recomienda para f_{yv} tomar un valor igual a $f_{yv} = 0.40 f_y$.

C. Refuerzo helicoidal.

El refuerzo helicoidal continuo colocado a 45° respecto a las aristas del elemento, substituye al refuerzo transversal en combinación con las varillas longitudinales, figs. 9.14 y 9.15.

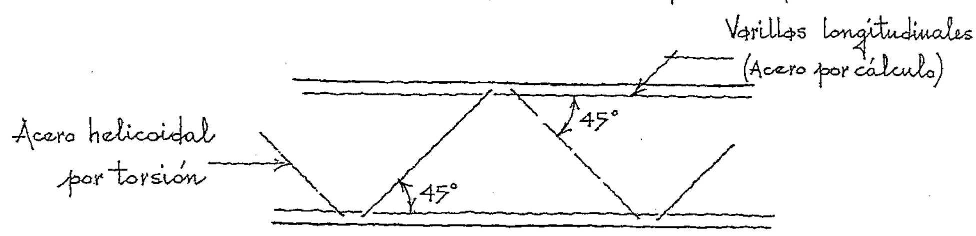


Fig. 9.14. Refuerzo helicoidal. Corte longitudinal.

Su separación se obtiene aplicando la ecuación que dice:

$$A_{sv} = \frac{(T_U - T_{CR})}{F_R\ \Omega\ x_1\ y_1\ f_{yv}}\ s \div \sqrt{2}$$

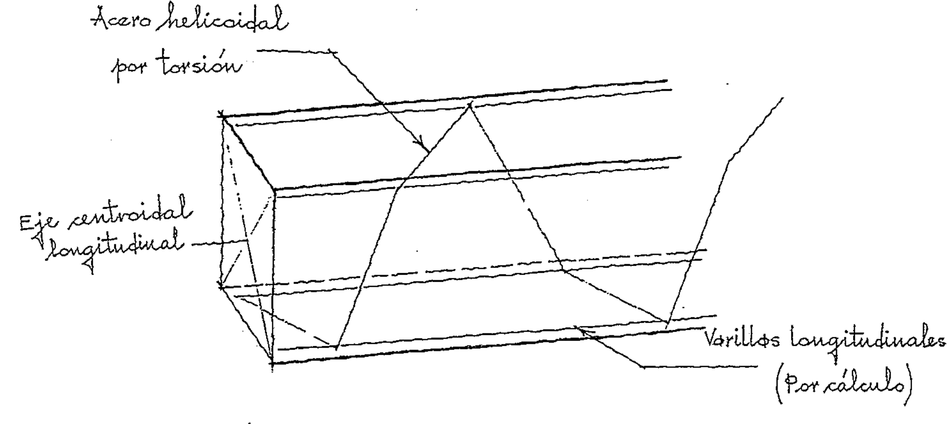


Fig. 9.15. Colocación del acero por torsión.

Además, la separación no excederá del lado mayor del elemento, y_1, fig. 9.16

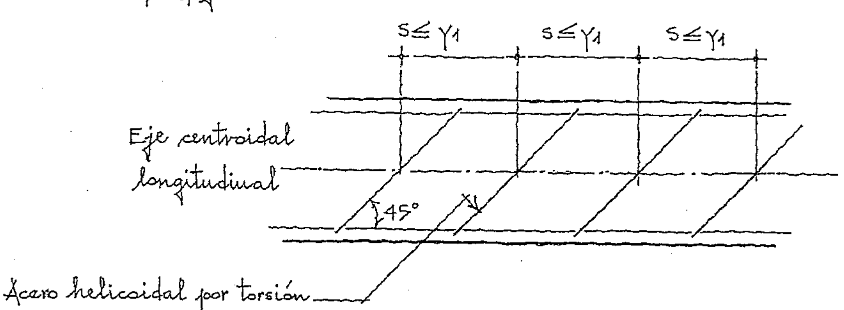
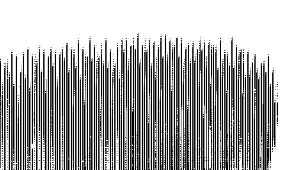


Fig. 9.16. Separación del acero helicoidal.

En ninguna sección se admitirá que, T_U, sea mayor que

$$1.25\ T_{CR}\sqrt{16 - \left(\frac{V_U}{0.5\ F_R\ b d \sqrt{f_c^*}}\right)^2}$$



9.3. Obtención de las fórmulas de torsión.

El Reglamento ACI determina para la torsión otras especificaciones, veamos:

Cuando el momento torsionante T_U es mayor que $F_R(0.13\sqrt{f'_c}\,\Sigma x^2 y)$, los efectos de la torsión deberán incluirse con el cortante y la flexión.

Cuando

$T_U < F_R(0.13\sqrt{f'_c}\,\Sigma x^2 y)$, los efectos de la torsión pueden despreciarse.

Las secciones que se encuentran localizadas a una distancia menor que un peralte efectivo, d, del paño del apoyo, se pueden diseñar para el mismo momento torsionante T_U, que el calculado a una distancia, d.

Para resistir el momento torsionante, se tiene:

$$T_U \leq F_R T_n$$

y, $$T_n = T_c + T_s$$

donde,

T_n, es el momento torsionante resistente.

T_c, momento torsionante resistente que proporciona el concreto.

T_s, momento torsionante resistente que proporciona el acero.

Para obtener el valor de T_c, se aplicará la expresión

$$T_c = \frac{0.2\sqrt{f'_c}\,\Sigma x^2 y}{\sqrt{1+\left(\frac{0.4\,V_U}{C_t\,T_U}\right)^2}}$$

donde,

$$C_t = \frac{b_w\,d}{\Sigma x^2 y}$$

Cuando se requiera refuerzo por torsión, además de éste, se proporcionará refuerzo para resistir fuerzas por cortante, por flexión y

axiales.

Tal refuerzo se colocará por lo menos a una distancia $(b_t + d)$, más allá del punto requerido.

La separación de los estribos cerrados no excederá de

$$s_{\emptyset} \leq \frac{X_1 + Y_1}{4}$$

ni mayor de 30 cm. Se tomará la que resulte menor.

Cuando se trate de varillas longitudinales, su separación no será mayor de 30 cm.

El momento torsionante resistente, T_s, se calculará con la ecuación

$$T_s = \frac{A_t \alpha_t X_1 Y_1 f_Y}{s}$$

$$\therefore \; s T_s = A_t \alpha_t X_1 Y_1 f_Y$$

$$y, \quad A_t = \frac{s T_s}{\alpha_t X_1 Y_1 f_Y}$$

donde

$$\alpha_t = \left[0.66 + 0.33 \left(Y_1 \div X_1\right)\right], \text{ pero no mayor de } 1.50.$$

Cuando se trate de varillas longitudinales para tomar la torsión, su área de acero se calculará con la expresión

$$A_\ell = 2 A_t \left(\frac{X_1 + Y_1}{s}\right)$$

o también

$$A_\ell = \left[\frac{28 \times s}{f_Y}\left(\frac{T_U}{T_U + \frac{V_U}{3 C_t}}\right) - 2A_t\right]\left(\frac{X_1 + Y_1}{s}\right)$$

De las dos expresiones se tomará siempre la que resulte mayor.

En ningún caso T_s excederá de $4\,T_c$.

X_1, menor dimensión centro a centro de un estribo rectangular cerrado.

Y_1, mayor dimensión centro a centro de un estribo rectangular cerrado.

Ejemplo ilustrativo (Reglamento para el D.F.)

Calcular la resistencia a flexión, cortante y torsión de la viga-losa mostrada en las figuras 9.17 a 9.21.

La estructura se encuentra sometida a la acción de cargas permanentes y variables.

El diseño se hará utilizando:

a) Estribos verticales

b) Varillas longitudinales

Datos:

$f'_c = 250\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

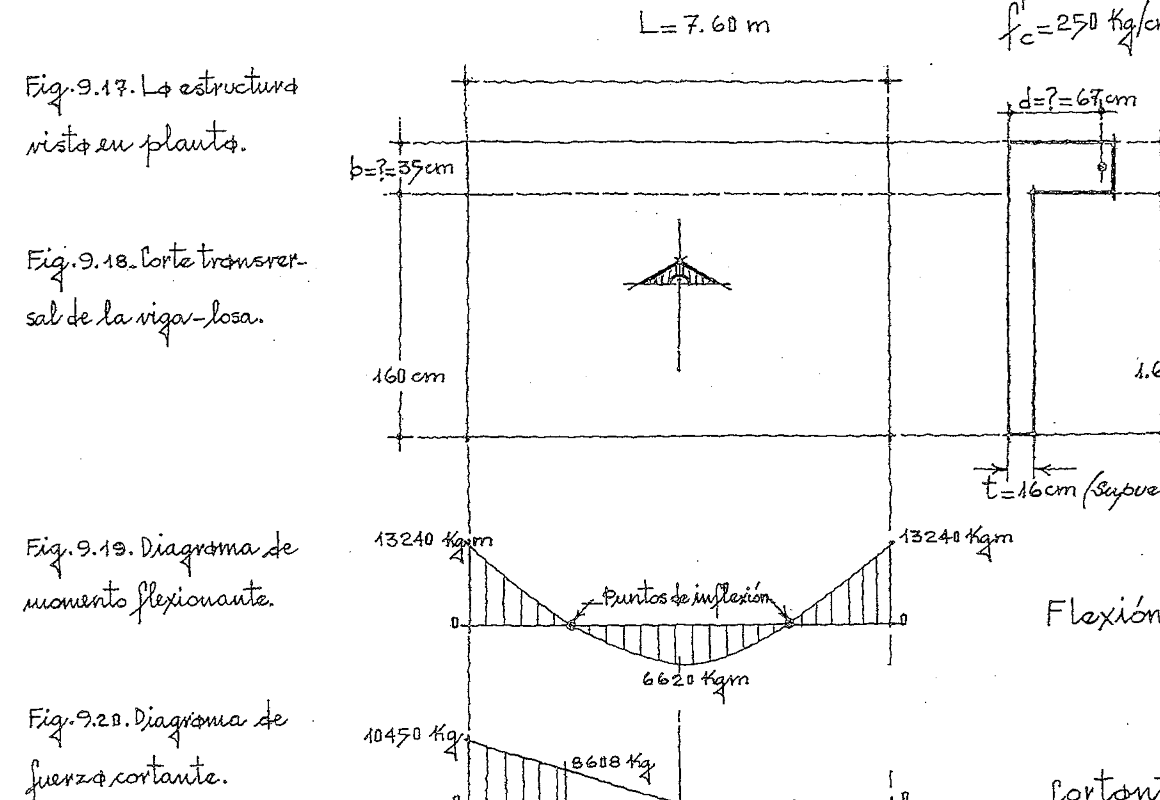


Fig. 9.17. La estructura vista en planta.

Fig. 9.18. Corte transversal de la viga-losa.

Fig. 9.19. Diagrama de momento flexionante.

Fig. 9.20. Diagrama de fuerza cortante.

Fig. 9.21. Diagrama de momento torsionante.

Obtención de las cargas

Cargas permanentes

Peso propio de la losa $= 0.16 \times 2400 = 384$ Kg/m²

Sobrecarga (Supuesto) . . . . $= 316$ Kg/m²

700 Kg/m²

Carga variable (Supuesto) . . . 260 Kg/m²

Obtención de la sección de la viga

$$d \simeq \frac{1}{12} \text{ claro} = \frac{760}{12} \simeq 67 \text{ cm}$$

y, $b = 35$ cm

Peso propio de la viga

$$0.35 \times 0.70 \times 7.60 \times 2400 \simeq 4470 \text{ Kg}$$

Carga final en la losa

$$(700 + 260)\, 1.4^{*} \simeq 1350 \text{ Kg/m}^2$$

Carga total en la viga:

$$1350 \times 1.60 \times 7.60 + 4470 \simeq 20900 \text{ Kg}$$

$$\text{Carga en Kg/m} = \frac{20900}{7.60} = 2750 \text{ Kg/m}$$

Momento flexionante, fig. 9.22.

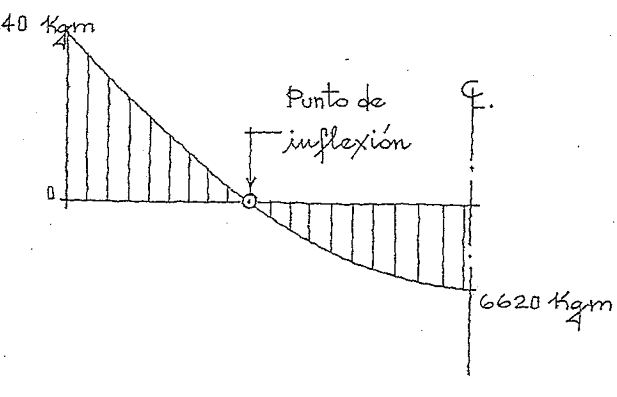


Fig. 9.22. Diagrama de momento flexionante.

$$\text{En los apoyos} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2750 \times 7.60^2}{12} \simeq 13240 \text{ Kgm}$$

$$\text{En el centro} = \frac{wL^2}{24} = 6620 \text{ Kgm}$$

---

* $F_c = 1.4$, factor de carga correspondiente.

Fuerza cortante, fig. 9.23.

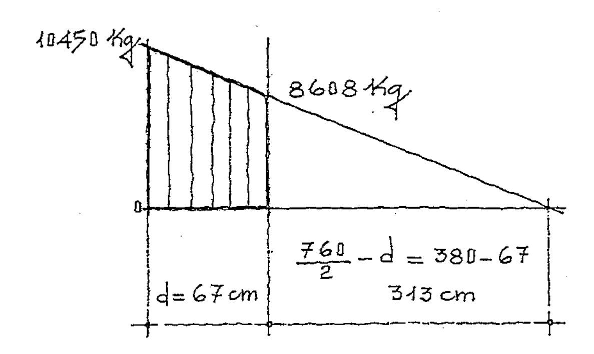


Fig. 9.23. Diagrama de fuerza cortante.

En los apoyos $= \frac{wL}{2} = \frac{2750 \times 7.60}{2} = 10450$ Kg

En la sección crítica $= 10450 - (2750 \times 0.67) \simeq 8608$ Kg

Momento torsionante, figuras 9.24 y 9.25.

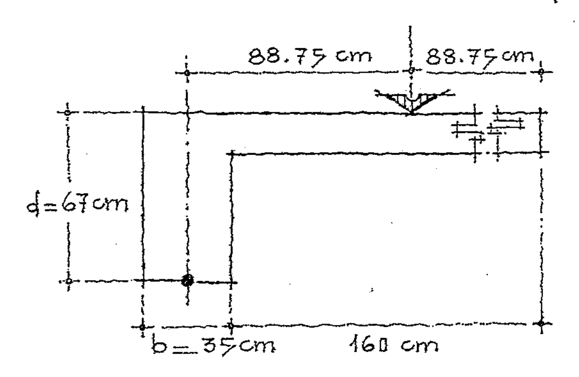


Fig. 9.24. Corte transversal de la viga-losa.

$\frac{160 + 17.5}{2} = 88.75$ cm

En los apoyos $= 1350 \times 1.95 \times 3.80 \simeq 10\,000$ Kgm

$\therefore\ 10\,000 \times 0.8875 \simeq 8880$ Kgm

En sección crítica $= 1350 \times 1.95\,(3.80 - 0.67) \simeq 8240$ Kgm

$\therefore\ 8240 \times 0.8875 \simeq 7300$ Kgm

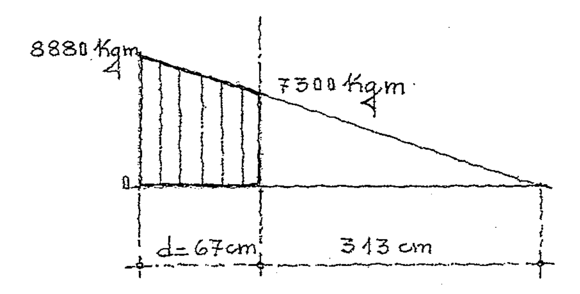


Fig. 9.25. Diagrama de momento torsionante.

Obtención de la resultante de cargas, fig. 9.26.

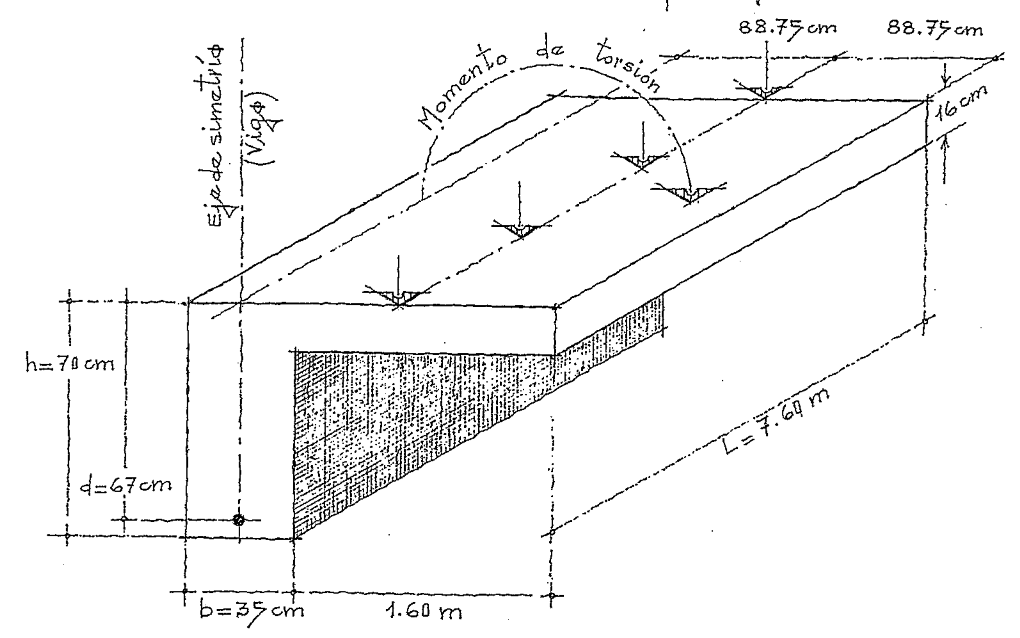


Fig. 9.26. Perspectiva representando el momento de torsión.

En la figura 9.27 aparece la viga-losa con la sección descompuesta en rectángulos mostrando las dimensiones de x y y; también se muestran las dimensiones de x_1 y y_1, veamos

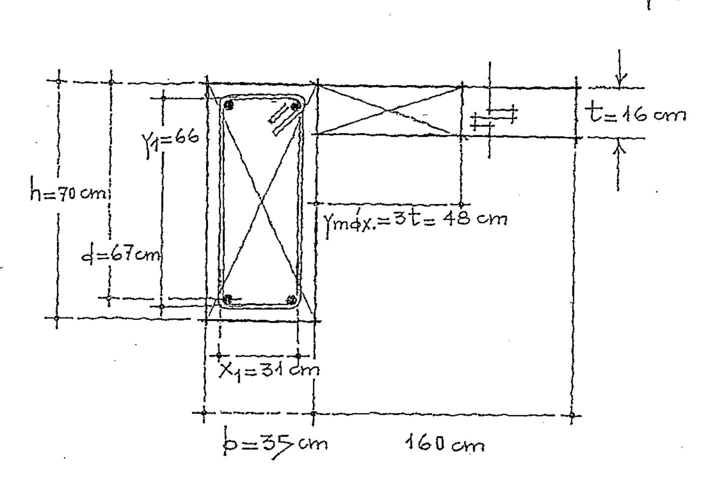


Fig. 9.27. Descomposición de la sección en rectángulos.

Cálculo del refuerzo de acero requerido

1. *Por cortante.*

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

a) La dimensión, h, no será mayor de 70 cm.

$$h = 70 \text{ cm } \textit{(Correcto)}$$

---

x y y, son b y h, respectivamente.

b) La relación h/b no excederá de 6.

$$\frac{h}{b} = \frac{70}{35} = 2 < 6 \text{ (Correcto)}$$

c) Como la carga y reacciones no comprimen directamente la cara superior e inferior de la viga, el reglamento especifica para estos casos aplicar la ecuación:

$$V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 0.5 \times 0.8 \times 35 \times 67 \sqrt{0.8 \times 250} \simeq 13265 \text{ Kg}$$

2. Por torsión.

El momento resistente de diseño, T_{0R}, se obtiene aplicando la expresión

$$T_{0R} = F_R \, 0.6 \sum x^2 y \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 0.6 \left(35^2 \times 70 + 16^2 \times 48\right) \sqrt{0.8 \times 250}$$

$$\therefore F_R \simeq 665400 \text{ Kg cm}$$

Se requiere refuerzo por torsión cuando:

$$\frac{T_U^2}{T_{0R}^2} + \frac{V_U^2}{V_{CR}^2} \geq 1.0$$

veamos

$$\frac{(7300)^2}{(6654)^2} + \frac{(8608)^2}{(13265)^2} = 1.20 + 0.42 = 1.62 > 1.0$$

y, además $T_U > T_{CR}$ y $T_{CR} = 0.25 \, T_{0R}$

$$T_U > 0.25 \, T_{0R} \quad \therefore \quad 7300 > 0.25 \times 6654$$

Como se cumplen las dos condiciones indicadas por el reglamento, la sección necesita refuerzo por torsión.

Cálculo del área de acero transversal (Estribos)

$$\frac{A_{sv}}{S} = \frac{(T_U - T_{CR})}{F_R \, \Omega \, x_1 y_1 f_{yv}} = \frac{730\,000 - 166\,400}{0.8\left(0.67 + 0.33 \times 66/31\right) 31 \times 66 \times 4200} \simeq 0.059$$

Es el valor de una rama, por tanto el estribo cerrado valdrá:

$$0.059 \times 2 = 0.118 \text{ cm}^2$$

Utilizando estribos del # 3, se tiene

$$\text{separación, } s = \frac{0.71}{0.118} \simeq 6 \text{ cm}$$

$\Omega = 0.67 + 0.33 \times 66/31$.

Cálculo del área de acero longitudinal (Varillas)

a) Por flexión.

En los extremos: $A_s = \frac{M_U}{f_Y\, j\, d} = \frac{1324000}{4200 \times 0.80 \times 67} \simeq 5.88\ cm^2$

En el centro : $A_s = \frac{5.88\ cm^2}{2} = 2.94\ cm^2$

b) Por torsión.

De acuerdo con el reglamento se aplica la ecuación

$A_{sv} = 2\,\frac{A_{sv}}{s}(x_1 + y_1)\,\frac{f_{Yv}}{f_Y}$ (En nuestro ejemplo, A_{sv}, no será menor de $0.059 \times 2 = 0.118\ cm^2$)

Por tanto

$A_{sv} = 2\,\frac{0.059}{6}(31 + 66)\,\frac{4200}{4200} = 1.90\ cm^2$

Además,

T_U, no excederá de:

$$T_U \leq 1.25\ T_{CR}\sqrt{16 - \left(\frac{V_U}{0.5\, F_R\, b\, d\sqrt{f_c^*}}\right)^2}$$

$$= 1.25 \times 166400\sqrt{16 - \left(\frac{8608}{0.5 \times 0.8 \times 35 \times 67\sqrt{0.8 \times 250}}\right)^2}$$

$$\therefore T_U < 821600$$

Ya que

$730000\ Kgcm < 821600\ Kgcm$

Area de acero total:

Arriba extremos $\quad 5.88 + 0.95 = 6.83\ cm^2$

$2\phi_s \# 5 = 2 \times 1.99 = 3.98\ cm^2$
$1\phi \# 6 = 1 \times 2.87 = 2.87\ cm^2$ $\Big\} = 6.85\ cm^2$

Abajo centro $\quad 2.94 + 0.95 = 3.89\ cm^2$

$3\phi \# 4 = 3 \times 1.27 = 3.81\ cm^2 \quad = 3.81\ cm^2$

A continuación se muestran los armados en la sección.

En las figs. 9.28 a 9.31 se muestran los armados en la viga.

Fig. 9.28. La viga-losa vista en planta.

Fig. 9.29. Corte longitudinal. Armados.

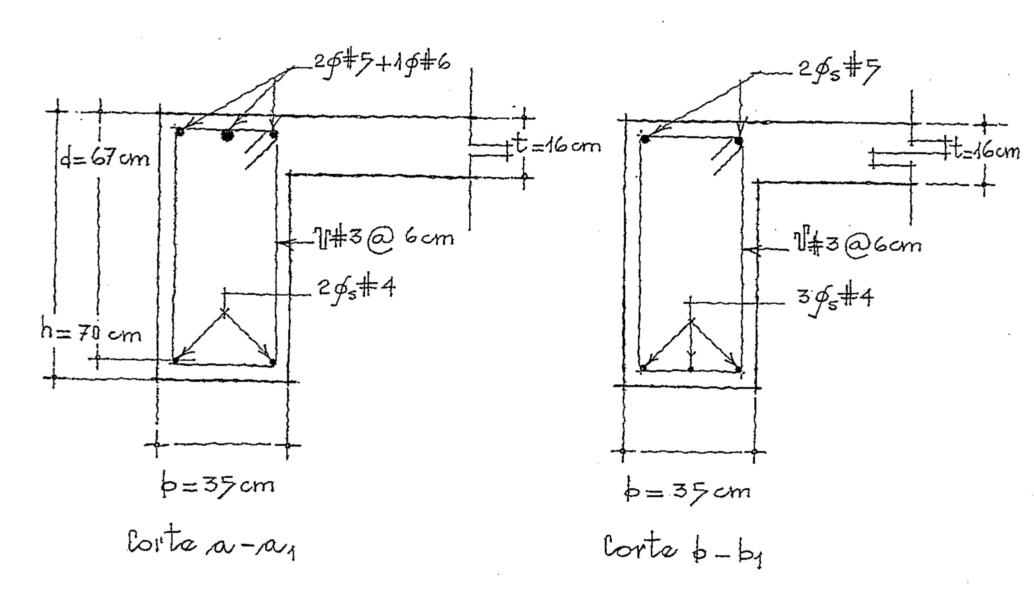


Fig. 9.30. Corte transversal. Armados.

Fig. 9.31. Corte transversal. Armados.

Ejemplo ilustrativo (Reglamento ACI)

Calcular la resistencia a flexión, cortante y torsión de la viga doblemente empotrada y sometida a una carga concentrada en el extremo del cantilever. El peso propio del cantilever no se consideró.

La estructura es para un centro de reunión ($F_C = 1.5$) y se encuentra sometida a la acción de cargas permanentes y variables; figs. 9.32 a 9.34.

Datos:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

$F_C = 1.5$

Diseñar la viga:

Con estribos a 90°

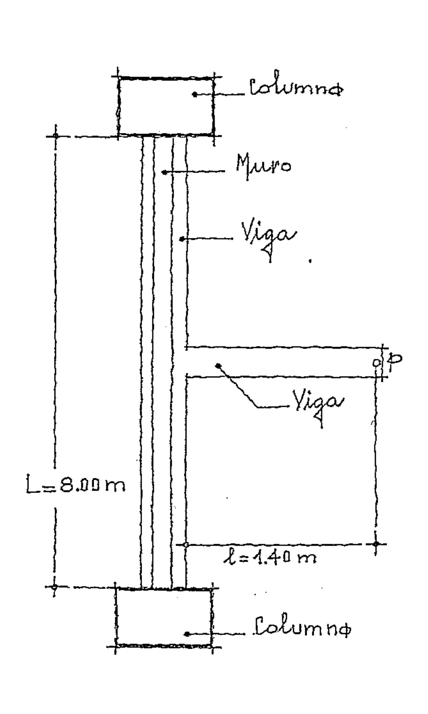


Fig. 9.32. La estructura vista en planta.

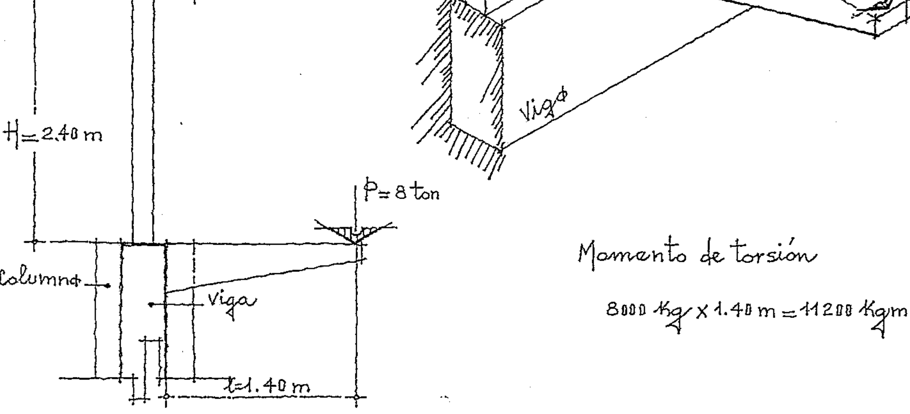


Fig. 9.33. La estructura vista en corte transversal.

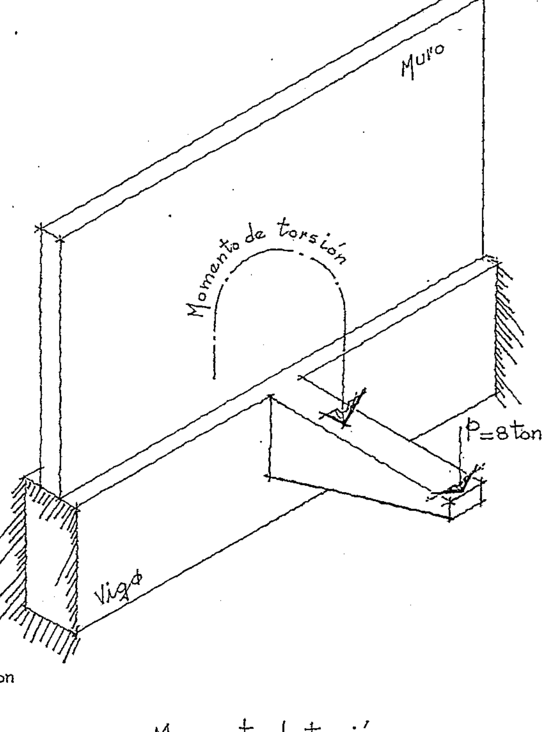


Fig. 9.34. Perspectiva de la estructura.

Momento de torsión

$8000\ Kg \times 1.40\ m = 11200\ Kg\,m$

Obtención de las cargas

Cargas permanentes

Sección de la viga

$d = \frac{1}{10}$ claro $= \frac{800 \text{ cm}}{10} = 80 \text{ cm} \therefore b = \frac{d}{2} = 40 \text{ cm}$

Peso propio de la viga $= 0.40 \times 0.80 \times 8.00 \times 2400 \simeq 6150$ Kg

Peso propio del muro $= 0.14 \times 2.40 \times 8.00 \times 1500 \simeq 4000$ Kg

Mortero de cemento-arena $= 0.04 \times 2.40 \times 8.00 \times 2000 \simeq 1550$ Kg

Sobrecarga (Supuesta) . . . . $\simeq 4200$ Kg

Carga variable (Supuesta). . . $\simeq 1500$ Kg

Carga total sobre la viga:

17400 Kg (1.5) = 26100 Kg

Carga en Kg/ml $= \frac{26100}{8.00 \text{ m}} \simeq 3300$ Kg/ml

Obtención de los diagramas, figuras 9.35 a 9.38.

a) Momentos flexionantes

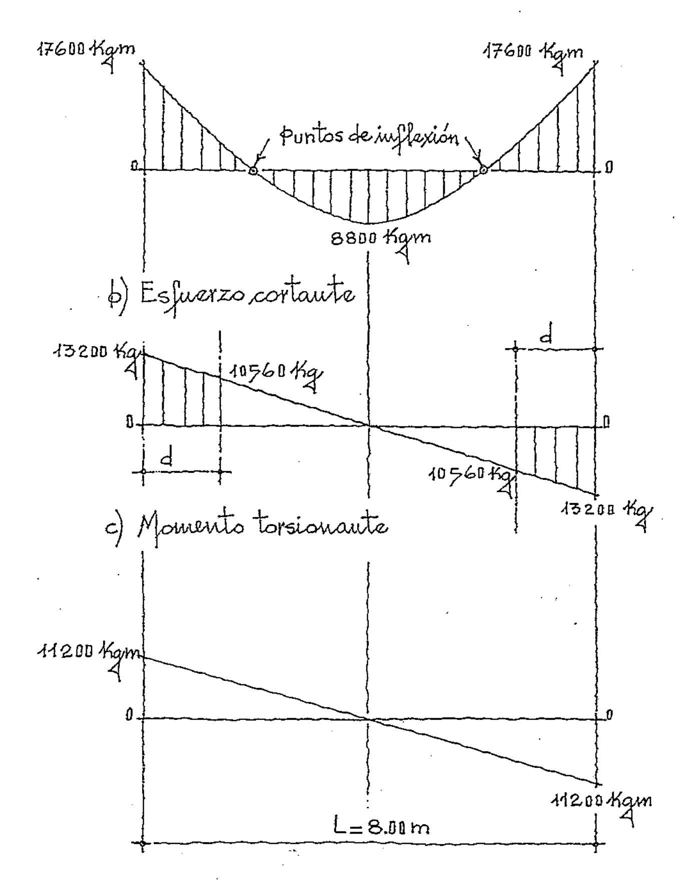


Fig. 9.35. Diagrama de momentos flexionantes.

Fig. 9.36. Diagrama de fuerza cortante.

Fig. 9.37. Diagrama de momento torsionante.

Fig. 9.38. Detalle de la viga y el cantilever.

En los extremos

$M = \frac{wl^2}{12} = \frac{3300 \times 8^2}{12} = 17600$ Kgm

En el centro

$M = \frac{wl^2}{24} = 8800$ Kgm

En los extremos

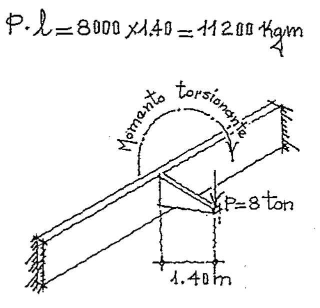
$V = \frac{wL}{2} = \frac{3300 \times 8}{2} = 13200$ Kg

En la sección crítica

$13200 - (3300 \times 0.80) = 10560$ Kg

En los extremos

$P \cdot l = 8000 \times 1.40 = 11200$ Kgm



En la figura 9.39 se muestra la viga con las dimensiones de x y Y, y también, de x_1 y Y_1, veamos:

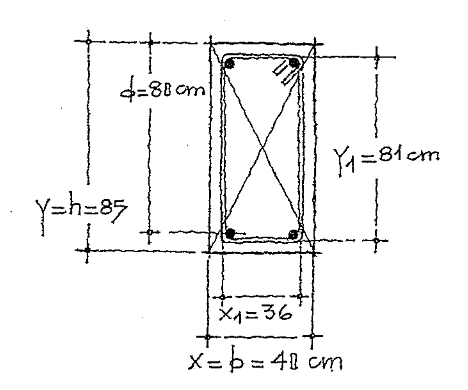


Fig. 9.39. La viga a mayor escala.

El Reglamento de Construcciones ACI, dice:

"Cuando el momento torsionante, T_U, es mayor que $T_U > F_R\left(0.13\sqrt{f'_c}\,\Sigma x^2 Y\right)$, los efectos de la torsión deberán incluirse con el cortante y la flexión."

$$T_U = 11200\ Kg\,m \quad \therefore \quad 0.8\left(0.13\sqrt{200}\times 40^2\times 85 \simeq 200\,000\ Kg\,cm\right.$$

$$1120\,000\ Kg\,cm > 200\,000\ Kg\,cm$$

Contribución del concreto a la torsión

$$T_U \leq F_R\,T_n \quad \therefore \quad T_n = T_c + T_s$$

$$T_c = \frac{0.2\sqrt{f'_c}\,\Sigma x^2 Y}{\sqrt{1+\left(\frac{0.4\,V_U}{C_t\,T_U}\right)^2}} = \frac{0.2\sqrt{200}\times 40^2\times 85}{\sqrt{1+\left(\frac{0.4\times 10560}{0.024\times 11200}\right)^2}} \simeq 24500\ Kg$$

$$C_t = \frac{bd}{\Sigma x^2 Y} = \frac{40\times 80}{40^2\times 85} \simeq 0.024$$

Contribución del acero a la torsión

$$T_s = \frac{A_t\,\alpha_t\,x_1\,Y_1\,f_Y}{S}$$

y,

$$\alpha_t = \left[0.66 + 0.33\left(Y_1/x_1\right)\right] = 1.40$$

$$\therefore \alpha_t \leq 1.50 \qquad \therefore \quad 1.40 < 1.50$$

Suponemos estribos del #2.5

$$T_s = \frac{2 \times 0.49 \times 1.40 \times 36 \times 81 \times 4200}{30} \simeq 560000 \text{ Kgcm}$$

(El acero no soporta la torsión)

Calculamos ahora con estribos del #2.5 @ 15 cm

$$T_s = \frac{2 \times 0.49 \times 1.40 \times 36 \times 81 \times 4200}{15} \simeq 1120000 \text{ Kgcm}$$

$T_U = T_s$ (además, contribuye el concreto).

$\therefore T_c + T_s > T_U$ (Correcto)

Cálculo de la resistencia de la viga a fuerza cortante

a) Contribución del concreto

El reglamento especifica:

cuando, $T_U > F_R (0.13 \sqrt{f'_c} \Sigma x^2 Y$

la resistencia proporcionada por el concreto, se obtiene aplicando la expresión

$$V_c = \frac{0.53 \sqrt{f'_c}\, bd}{\sqrt{1 + \left(2.5\, C_t \frac{T_U}{V_U}\right)^2}} = \frac{0.53 \sqrt{200} \times 40 \times 80}{\sqrt{1 + \left(2.5 \times 0.024 \frac{11200}{10560}\right)^2}} \simeq 23980 \text{ Kg}$$

Como $V_c > V_U$, la pieza no necesita acero de refuerzo para absorber el cortante; el concreto sólo es capaz de resistirlo.

Cálculo del área de acero por flexión

En los extremos: $A_s = \frac{1760000}{F_R f_Y j d} = \frac{1760000}{0.9 \times 4200 \times 0.8 \times 80} \simeq 7.28 \text{ cm}^2$

En el centro: $A_s = \frac{7.28}{2} = 3.64 \text{ cm}^2$

Con varillas del #5

$$\frac{7.28 \text{ cm}^2}{1.99 \text{ cm}^2} \simeq 4 \phi_s \#5 \text{ (En los extremos)}$$

$2 \phi_s \#5$ (En el centro)

A continuación calculamos el cantilever, fig. 9.40.

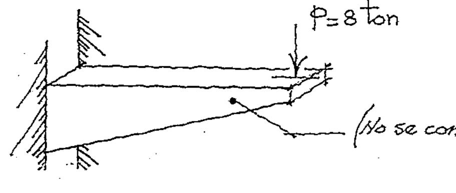


Fig. 9.40. Viga en cantilever.

Obtención de los diagramas, figuras 9.41 a 9.43.

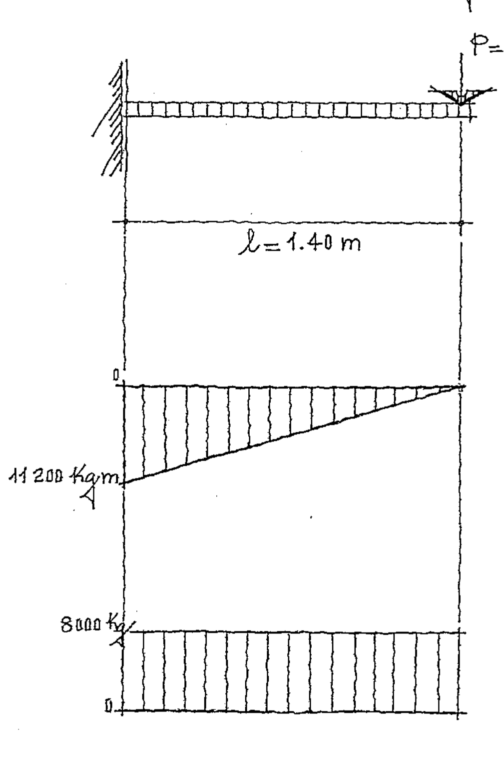


Fig. 9.41. Viga en cantilever.

Fig. 9.42. Diagrama de momento flexionante.

Fig. 9.43. Diagrama de fuerza cortante.

Flexión:

M máx. en el empotre

P · l = 8000 × 1.40 = 11200 Kgm

Fuerza cortante:

V = P = 8000 Kg

Cálculo del área de acero

$$A_s = \frac{1120000}{F_R f_y j d} = \frac{1120000}{0.9 \times 4200 \times 0.8 \times 50} \simeq 7.40 \text{ cm}^2$$

Con varillas #5

$$\text{N° de varillas} = \frac{7.40}{1.99} \simeq 4\phi_s \#5$$

La sección de la viga se supuso de

b = 25 cm y d = 50 cm

Los estribos se colocarán por especificación.

En la figura 9.44 se muestra un corte transversal de la viga en cantilever

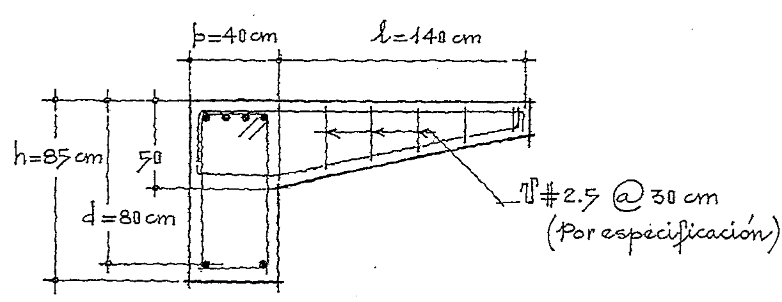


Fig. 9.44. Corte transversal de la viga principal y la viga en cantilever.

En las figs. 9.45 a 9.48 se muestran los armados en la viga.

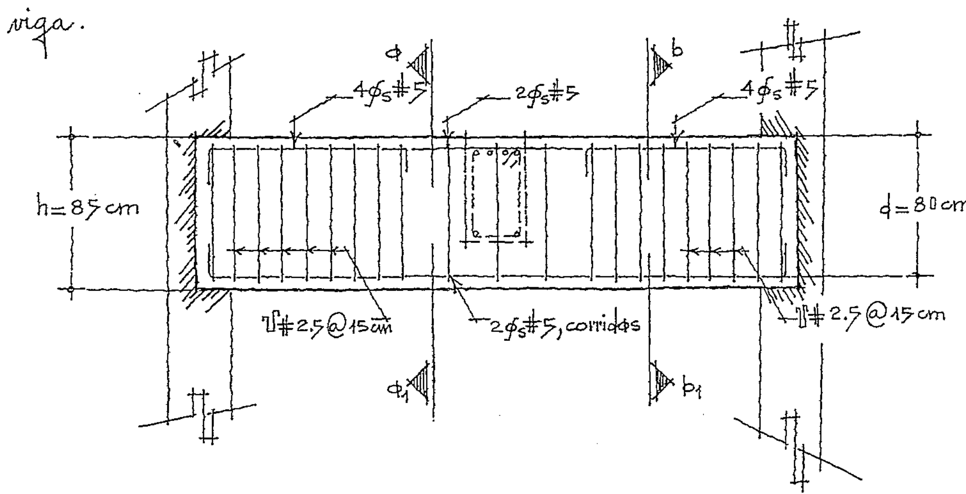


Fig. 9.45. Corte longitudinal de la viga.

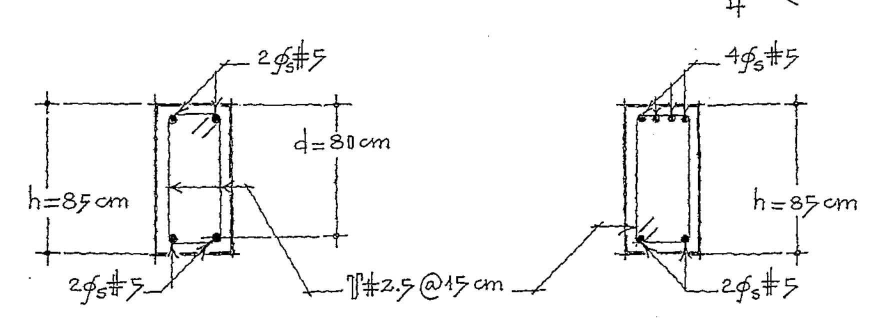


Fig. 9.46. Corte transversal por φ-φ1.

Fig. 9.47. Corte transversal por b-b1.

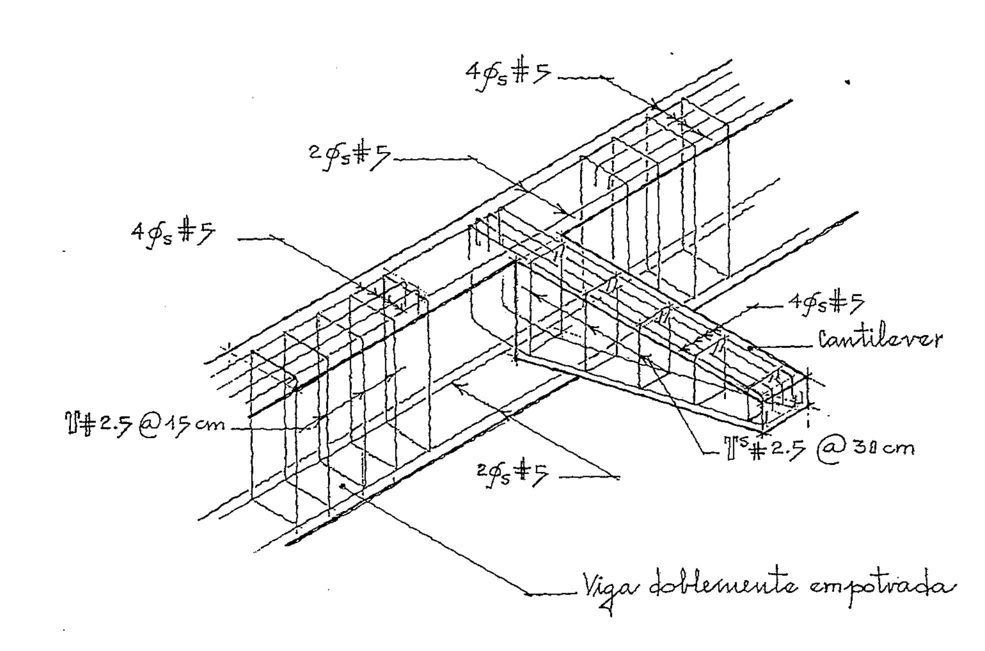


Fig. 9.48. Perspectiva mostrando la intersección de ambas vigas.

Referencias bibliográficas

Capítulo 9

Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, México, 1988.

Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado, ACI 318-83, Detroit, 1983.

Comité ACI 438, "*Tentative Recommendations for the Design of Reinforced Concrete Members to Resist torsion*," ACI Journal, Proceedings, 1969.

Mattock, A.H., "*How to Design for Torsion*," Torsion of Structural Concrete, SP-18 ACI, Detroit, 1968.

Park, R., y Paulay, T., "*Estructuras de Concreto Reforzado*", Editorial Limusa, México, 1979.

Heins, C.P., y Seaburg, P.A., "*Torsion Analysis of Rolled Steel Sections*," Bethlehem Steel Corporation, Pennsylvania.

Hsu, T.T.C., y Kemp, E.L., "*Tentative Design Criteria for Torsion*," ACI Journal, Proceedings, 1969.

10

ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO

10

ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO

10.1. Generalidades

La adherencia es una de las hipótesis que se toma en cuenta en el diseño y resistencia de piezas de concreto reforzado.

La adherencia es una de las hipótesis tomada en cuenta en el diseño y resistencia de elementos de concreto reforzado.

En efecto, el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, especifica:

"La adherencia entre el acero y el concreto se considera adecuada dentro de los límites elásticos de los materiales."

La fuerza de tensión o compresión que se ejerce en el acero de refuerzo deberá cumplirse mediante una longitud adecuada de empotramiento o de algún dispositivo mecánico para que se desarrolle la adhencia necesaria, figura 10.1.

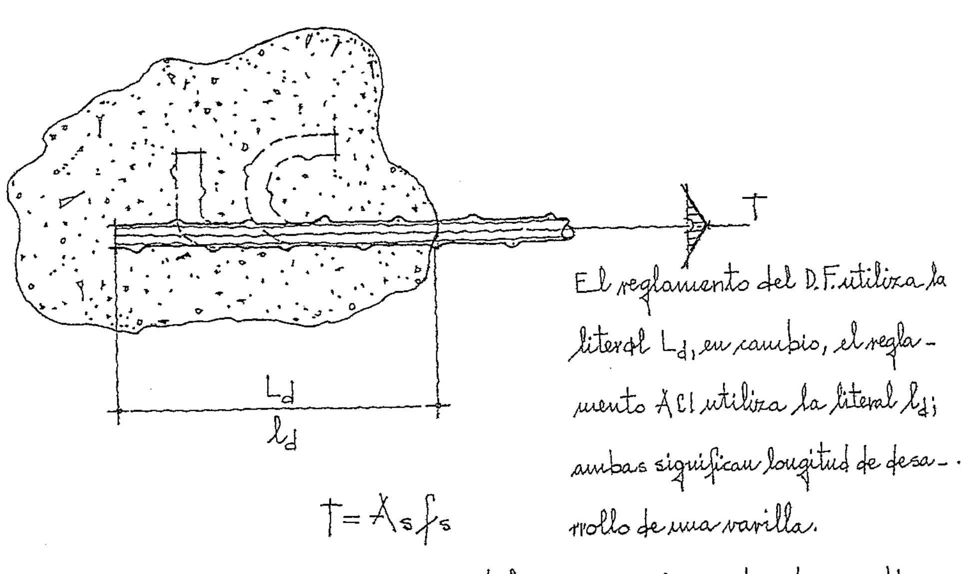


Fig. 10.1. Longitud de desarrollo de una varilla. Anclaje.

El reglamento del D.F. utiliza la literal L_d, en cambio, el reglamento ACI utiliza la literal l_d; ambas significan longitud de desarrollo de una varilla.

$$T = A_s f_s$$

Y como generalmente se utiliza varilla redonda, se tiene:

$$T = A_s f_s = \frac{\pi d_b^2}{4} f_s$$ y, d_b, es el diámetro de la varilla

---

La longitud de desarrollo o de anclaje se puede dar colocando la varilla recta, en ángulo de 90° o también, formando ángulo de 180°.

10.2 Obtención de las fórmulas de adherencia.- Para estudiar la adherencia, suponemos una viga de sección rectangular sometida a una fuerza de flexión, figs. 10.2 a 10.6.

Fig. 10.2. Viga sometida a carga de flexión, (a).

Si cortamos la viga y aislamos la sección abcd, para que haya equilibrio será necesario aplicar un par de fuerzas que forman el momento resistente de la pieza, veamos:

Fig. 10.3. Esfuerzos cortantes y de adherencia en una viga de concreto, (b), (c) y (d).

(b) Fig. 10.3 Fig. 10.4 (c) (d) Fig. 10.5

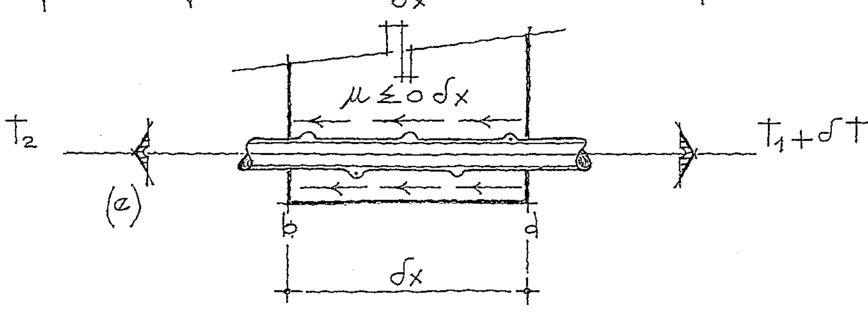


Fig. 10.6. Adherencia por flexión, (e).

Designando a μ como el esfuerzo unitario de adherencia y a, Σo, la suma de perímetros de las varillas o varilla, se tiene

$\mu \Sigma o \delta x = \delta T \;\therefore\; \delta T = \dfrac{V \delta x}{j d}$, y haciendo momento en el punto, 0, obtenemos:

$$\Sigma M_0 = \delta T (jd) - V\delta x = 0, \text{ y por equilibrio, } \delta T = \mu \Sigma o \delta x$$

$$\therefore \ \delta T = \frac{V \delta x}{jd}$$

y como

$$\delta T = \mu \Sigma o \delta x$$

$$\mu \Sigma o \delta x (jd) = V \delta x \text{ , y finalmente}$$

$$\mu = \frac{V \delta x}{\Sigma o \delta x \, jd} = \frac{V}{\Sigma o \, jd}$$

10.3 Longitud de desarrollo o anclaje de varillas y alambres corrugados sujetos a tensión.

La longitud de desarrollo donde se considera que una barra de tensión se ancla para que desarrolle su esfuerzo de fluencia, se calculará como el producto de la longitud de desarrollo básica, l_{db}, por el factor o factores de modificación indicados en la Tabla 10.1

En ningún caso l_d será menor de 30 cm en varillas corrugadas sujetas a tensión.

Longitudes de desarrollo básico (l_{db})

Varillas del No. 11 o menores	. $0.06 A_{sb} f_y / \sqrt{f'_c}$
pero no menor que . .	. $0.006 d_b f_y$
Varillas del No. 14	. $0.8 f_y / \sqrt{f'_c}$
Varillas del No. 18	. $1.1 f_y / \sqrt{f'_c}$
Alambres corrugados	. $0.11 d_b / \sqrt{f'_c}$

Tabla 10.1

Condiciones del refuerzo	Factor
Varillas del lecho superior . . .	1.4
Acero con f_y mayor que 4200 Kg/cm² .	$2 - \frac{4200}{f_y}$
Concretos con agregados ligeros . .	$1.8 \sqrt{f'_c} / f_{ct} \geq 1.0$

Las varillas del lecho superior son aquellas donde el concreto colado abajo de ellas tenga un espesor de 30 cm o más; f_{ct}, resistencia del concreto ligero a la tensión.

10.4 Longitud de desarrollo de varillas corrugadas sujetas a compresión.

La longitud de desarrollo para varillas en compresión se calculará como el producto de la longitud de desarrollo básica, l_{db}, por el factor de modificación indicados en la Tabla 10.2.

En ningún caso l_d será menor de 20 cm.

Longitudes de desarrollo básico (l_{db})

Longitud de desarrollo básico l_{db}	$0.08\, d_b f_Y / \sqrt{f'_c}$
pero no menor que	$0.004\, d_b f_Y$

Tabla 10.2

Condiciones del refuerzo	Factor
Refuerzo en exceso del requerido por el análisis	$\dfrac{A_s \text{ necesario}}{A_s \text{ proporcionado}}$
Refuerzo en espiral confinado con diámetro no menor del No. 2 ni mayor de 10 cm de paso	0.75

El Reglamento de Construcciones para el D. F., especifica:

"Cuando las varillas ya no se necesiten por flexión, se doblarán o cortarán a una distancia no menor que un peralte efectivo o 12 d_b más allá del punto de inflexión donde de acuerdo con el diagrama de momentos ya no se requieren. Para varillas lisas la longitud de desarrollo será el doble de la requerida para las varillas corrugadas. Cuando una varilla forme parte de un paquete de 3 varillas su longitud de desarrollo se aumentará un 20 % y un 30 % cuando se trate de un paquete con 4 varillas.

Para paquetes con 2 varillas la longitud de desarrollo, l_d, no sufrirá modificación.

Cuando se trate de elementos libremente apoyados, por lo menos la tercera parte del refuerzo de tensión para momento positivo máximo, se prolongará, sin doblar, hasta dentro del apoyo, por lo menos 15 cm o $h/2$. Cuando se trate de miembros continuos, se prolongará la cuarta parte del refuerzo a lo largo de la misma cara del miembro en el apoyo."

10.5 Especificaciones para ganchos estándar

La longitud de desarrollo l_{dh}, para varillas corrugadas en tensión, terminadas en gancho estándar se calculará como el producto de la longitud de desarrollo básica, por el factor de modificación. En ningún caso l_{dh} será menor que $8 d_b$ o 15 cm, lo que resulte mayor.

Longitud de desarrollo básica (l_{bh})

La longitud de desarrollo básica, l_{hb} para una varilla con gancho será . $.318\, d_b/\sqrt{f'_c}$

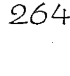
Tabla 10.3

Condiciones del refuerzo	Factor
Cuando el acero tenga f_y distinto a 4200 Kg/cm²	$f_y/4200$
Refuerzo en exceso del requerido por el análisis.	$\frac{A_s\ \text{necesaria}}{A_s\ \text{proporcionada}}$
Concreto de agregado ligero	13

Los ganchos no deberán considerarse efectivos en la longitud de desarrollo de varillas en compresión.

Cuando el elemento estructural no cuenta con el espacio suficiente para que la varilla o varillas puedan desarrollar su longitud requerida, el reglamento permite el uso de ganchos en los extremos de las barras.

En las figuras 10.7 a 10.12, se muestran en detalle



estos ganchos.

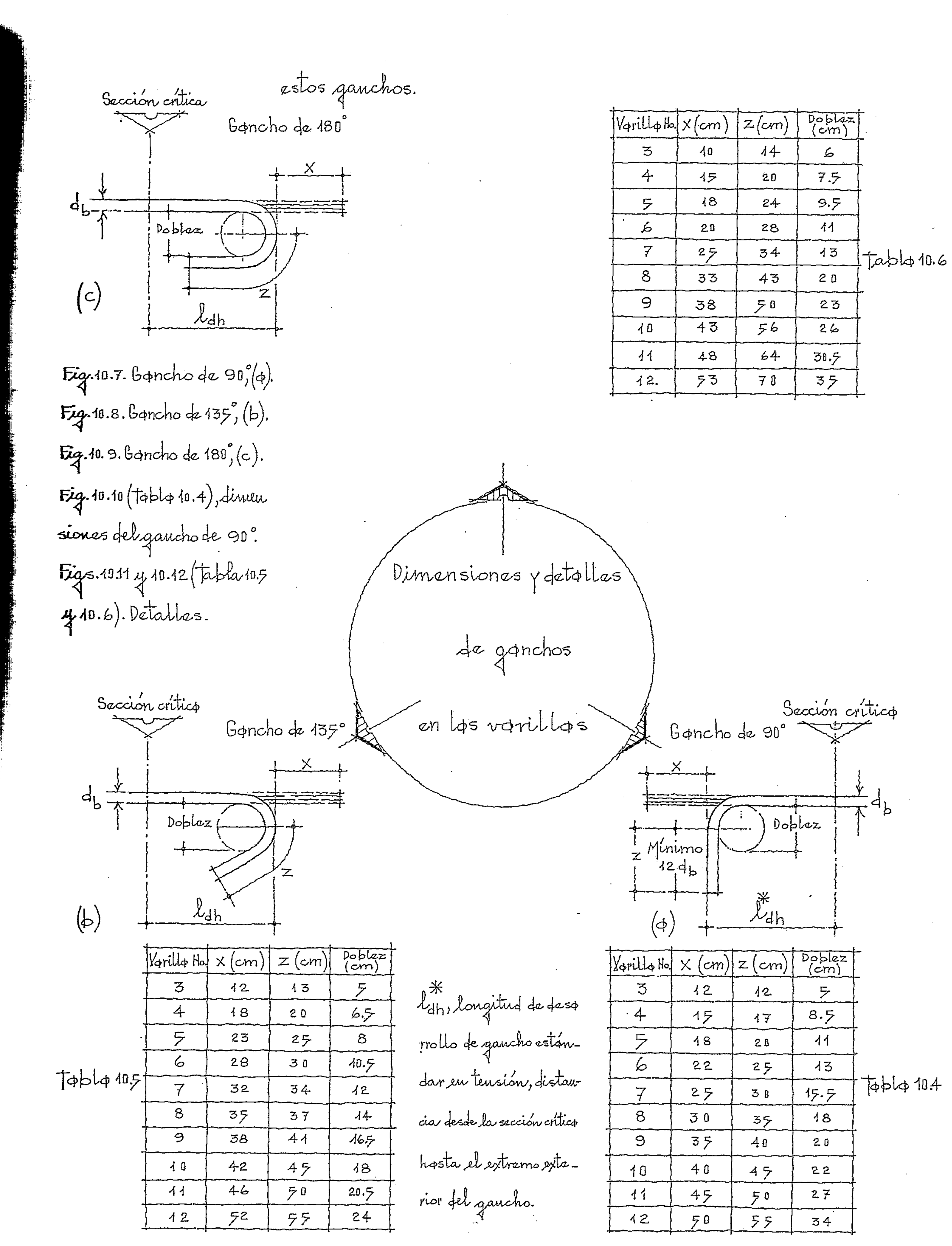


Tabla 10.6

Varilla No.	X (cm)	Z (cm)	Doblez (cm)
3	10	14	6
4	15	20	7.5
5	18	24	9.5
6	20	28	11
7	25	34	13
8	33	43	20
9	38	50	23
10	43	56	26
11	48	64	30.5
12.	53	70	35

Fig. 10.7. Gancho de 90°, (a).

Fig. 10.8. Gancho de 135°, (b).

Fig. 10.9. Gancho de 180°, (c).

Fig. 10.10 (tabla 10.4), dimensiones del gancho de 90°.

Figs. 10.11 y 10.12 (tabla 10.5 y 10.6). Detalles.

Tabla 10.5

Varilla No.	X (cm)	Z (cm)	Doblez (cm)
3	12	13	5
4	18	20	6.5
5	23	25	8
6	28	30	10.5
7	32	34	12
8	35	37	14
9	38	41	16.5
10	42	45	18
11	46	50	20.5
12	52	55	24

ℓ_{dh}^{*}, longitud de desarrollo de gancho estándar en tensión, distancia desde la sección crítica hasta el extremo exterior del gancho.

Tabla 10.4

Varilla No.	X (cm)	Z (cm)	Doblez (cm)
3	12	12	5
4	15	17	8.5
5	18	20	11
6	22	25	13
7	25	30	15.5
8	30	35	18
9	35	40	20
10	40	45	22
11	45	50	27
12	50	55	34

El Reglamento de las Construcciones de Concreto (ACI) da otras especificaciones para ganchos estándar en tensión, más sencillos y prácticos. Véanse las figuras 10.13 y 10.14.

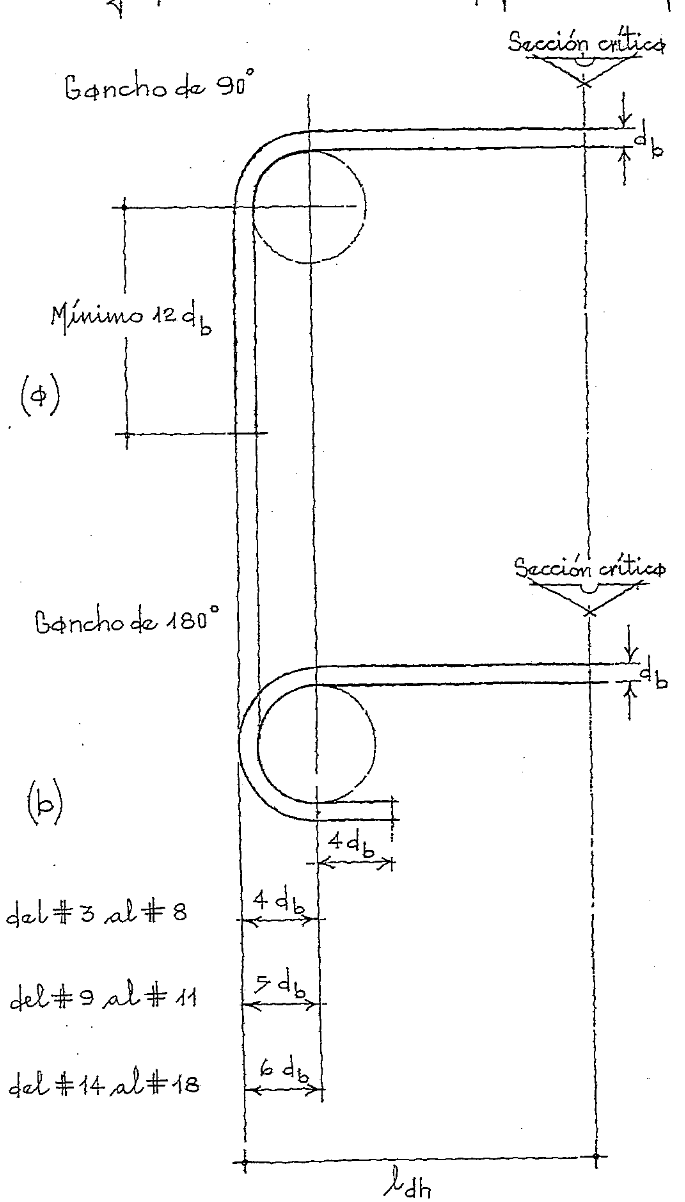


Fig. 10.13. Gancho de 90°, (a). Detalle.

Fig. 10.14. Gancho de 180°, (b). Detalle.

En compresión, los ganchos son poco efectivos y no se deben utilizar como anclaje.

10.6 Anclaje mecánico.

Se permite utilizar cualquier dispositivo mecánico capaz de desarrollar la resistencia del refuerzo sin dañar el concreto.

10.7. Refuerzo por momento positivo

Cuando se trate de elementos libremente apoyados, se requiere que por lo menos el 33% del refuerzo por momento positivo se prolongue hasta el apoyo para prevenir desplazamientos en los momentos por cambios en la carga o a otras causas imprevistas.

Tratándose de elementos continuos el refuerzo por momento positivo será del 25% como mínimo y se prolongará hasta el apoyo.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., dice:

"Para las barras de momento positivo que llegan a un extremo libremente apoyado, incluyendo partes dobladas, se prolongarán más allá del centro del apoyo una longitud no menor que

$$L_d - 0.25\,L \geq 0.5\,h"$$

donde

L_d, longitud de desarrollo

L, claro del elemento

h, peralte total

En apoyos libres y puntos de inflexión, el acero de tensión por momento positivo deberá limitarse a un diámetro tal que, l_d, sea igual o menor que:

$$L_d \leq \frac{M_U}{V_U} + l_a \quad (l_a = \text{longitud de anclaje adicional}).$$

siendo,

M_U, momento resistente donde todo el refuerzo sufre esfuerzos hasta el punto de la resistencia a la fluencia f_y. V_U, es la fuerza por cortante.

l_a, en el apoyo será la longitud más allá del centro del apoyo.

l_a, en el punto de inflexión será igual al peralte efectivo o $12\,d_b$, la mayor.



En las vigas dicho refuerzo se prolongará en el apoyo, por lo menos, 15 cm.

10.8. Refuerzo por momento negativo.

El refuerzo total por tensión en el apoyo proporcionado para momento negativo no será menor del 33 % y tendrá una longitud de anclaje más allá del punto de inflexión, no menor que un peralte efectivo, 12 d_b o 1/16 del claro, el que resulte mayor.

10.9. Empalmes de barras sujetas a tensión

La longitud de un traslape, l_{tr}, no será menor de $(0.01 f_Y - 6)$ veces el diámetro de la barra. En ningún caso será menor de 30 cm.

Los empalmes deberán hacerse escalonados cada 60 cm, de manera que desarrollen, por lo menos, 2 veces la fuerza de tensión calculada en esa sección; en ningún caso será menor de 1400 Kg/cm^2 para el área total del refuerzo proporcionado.

10.10. Empalmes de barras sujetas a compresión.

La longitud de un traslape no será menor de $(0.007 f_Y d_b)$, ni tampoco de $(0.01 f_Y - 10)$ veces el diámetro de la barra.

Cuando la resistencia del concreto sea menor de 200 Kg/cm^2, los valores mencionados se incrementarán 20 %. En ningún caso el traslape será menor de 30 cm.

10.11. Empalmes de malla de alambre corrugado soldado sujetos a tensión

La longitud mínima de traslape medida entre los extremos de cada hoja de malla no será menor de 1.7 l_d, ni de 20 cm.

La longitud mínima de traslape para malla de alambre liso soldado no será menor de 1.5 l_d, ni de 15 cm.

A continuación se presentan varios ejemplos para ilustrar el corte y la longitud de anclaje del refuerzo de acero.

Ejemplo ilustrativo

Se tiene una viga con una carga concentrada (no se consideró el peso propio de la viga), sometida a la combinación de acciones permanentes y variables.

Diseñar la viga aplicando los requisitos de corte y longitud de anclaje del refuerzo de acero.

La viga se considera libremente apoyada, figs. 10.15 a 10.17.

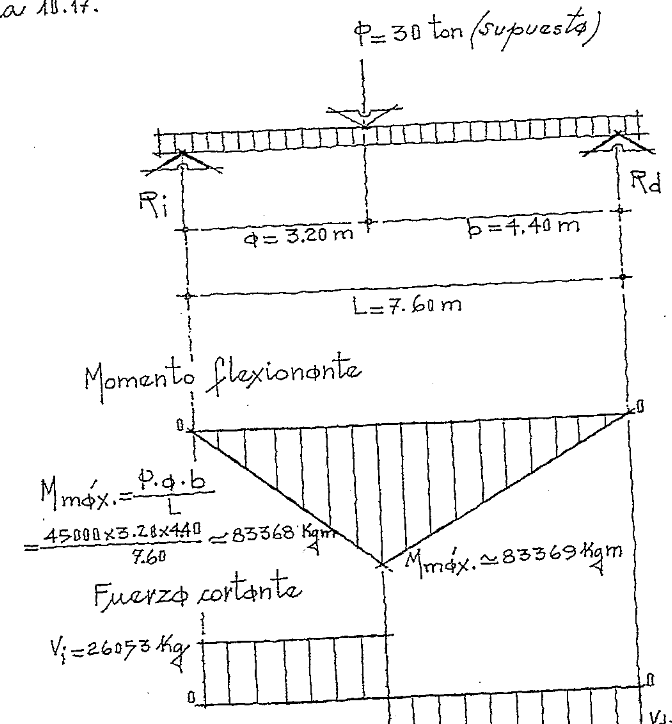


Fig. 10.15. Viga mostrando la carga y el claro.

Fig. 10.16. Gráfica de momento flexionante.

Fig. 10.17. Gráfica de fuerza cortante.

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm^2; $f_y = 4200$ Kg/cm^2

$F_c = 1.5$

$b = 40$ cm (Supuesto)

Obtención de la carga

$P_U = 30000 \times 1.5 = 45000$ Kg

$R_i = V_i = \frac{P \cdot b}{L} = \frac{45000 \times 4.40}{7.60}$

$\therefore R_i = V_i = 26053$ Kg

$R_d = V_d = \frac{P \cdot a}{L} = \frac{45000 \times 3.20}{7.60}$

$\therefore R_d = V_d \simeq 18947$ Kg

Para garantizar un comportamiento dúctil, la pieza se diseña aplicando el 50% del porcentaje de refuerzo correspondiente a falla balanceada, veamos

$$\rho_b = 0.50 \frac{0.85 f'_c \beta^*}{f_y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_y} \therefore 0.50 \frac{0.85 \times 200 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{10200}$$

$$= 0.0162 \times 0.588 \simeq 0.0095$$

$^*\beta = 0.80$.

y como

$$\gamma = \rho_b \frac{f_Y}{f'_c} = 0.0095 \frac{4200}{200} \simeq 0.20$$

Cálculo del peralte de la viga suponiendo un ancho, b, de 40 cm.

$$M_u = F_R b d^2 f'_c \gamma (1 - 0.59 \gamma)$$

$$= 0.90 \times 40 d^2\ 200 \times 0.20 (1 - 0.59 \times 0.20)$$

$$\therefore d^2 = \frac{8336900}{0.90 \times 40 \times 200 \times 0.20 (1 - 0.59 \times 0.20)} \simeq 6565\ cm^2$$

$$d = \sqrt{6565} \simeq 81\ cm$$

obtención del área de acero

$$A_s = \rho_b b d = 0.0095 \times 40 \times 81 = 30.78\ cm^2$$

Area mínima de acero

$$A_{s\,mín} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y} b d = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200}\ 40 \times 81 \simeq 7.64\ cm^2$$

$A_s > A_{s\,mín}$. (Se cumple ampliamente con el mínimo acero)

Con varillas #7, se tiene:

$$\frac{30.78\ cm^2}{3.87\ cm^2} \simeq 8 \phi_s \#7 \ \therefore\ 8 \times 3.87 = 30.96\ cm^2$$

A_s (Requerida) $= 30.78\ cm^2$ y A_s (Proporcionada) $= 30.96\ cm^2$

Longitud de desarrollo, l_{db}

Barras #7

$$l_{db} = 0.06 \frac{A_b f_Y}{\sqrt{f'_c}} = 0.06 \frac{3.87 \times 4200}{\sqrt{200}} = \frac{975}{14.14}$$

$$l_{db} \simeq 69\ cm$$

y también

$$l_{db} \geq 0.006 d_b f_Y = 0.006 \times 2.22 \times 4200 \simeq 56\ cm$$

La longitud de desarrollo cumple ampliamente con la especificación, ya que el reglamento dice que la longitud de desarrollo, l_d, de varillas sujetas a tensión no será menor de 30 cm.

El mismo reglamento expresa:

"El refuerzo de acero se puede suprimir, cortando o doblando las varillas en aquellos puntos donde ya no se necesita según la gráfica de momento flexionante."

En las figuras 10.18 a 10.19.

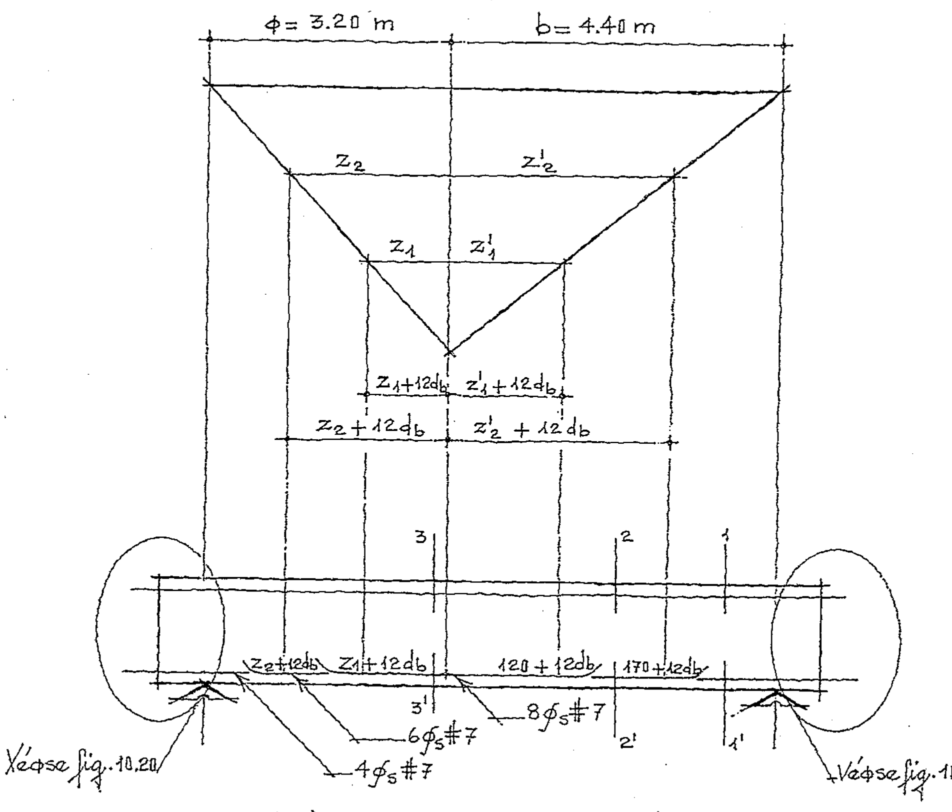


Fig. 10.18. Obtención de los puntos de doblez o de corte en una viga sometida a una carga concentrada.

Fig. 10.19. Corte longitudinal de la viga mostrando los puntos de doblez o de corte.

$$\frac{(z_1^2)}{(3.2)^2}=\frac{1}{8} \quad \therefore \quad z_1^2=\frac{10.24}{8}=1.28\text{ m}$$

$$z_1=\sqrt{1.28}=1.13^{*}\text{ m} + 12d_b$$

*El reglamento dice al respecto:

"El refuerzo se extenderá más allá del punto donde ya no es necesario para resistir la flexión, una distancia igual al peralte efectivo o $12d_b$, la que resulte mayor."

El autor considera, tratándose de apoyos simples, prolongar las barras únicamente $12d_b$.

$$\frac{z_2^2}{(3.20)^2}=\frac{2}{8} \quad \therefore \quad z_2^2=2.56\text{ m} \;\; y \;\; z_2=\sqrt{2.56}=1.60\text{ m}$$

$$\therefore z_2=1.60\text{m}+12d_b$$

Colocación de las barras de acero en la zona de apoyos.

En elementos libremente apoyados el 33% del refuerzo, como mínimo por momento positivo, se prolongará dentro del apoyo 15 cm, figs. 10.20 y 10.21.

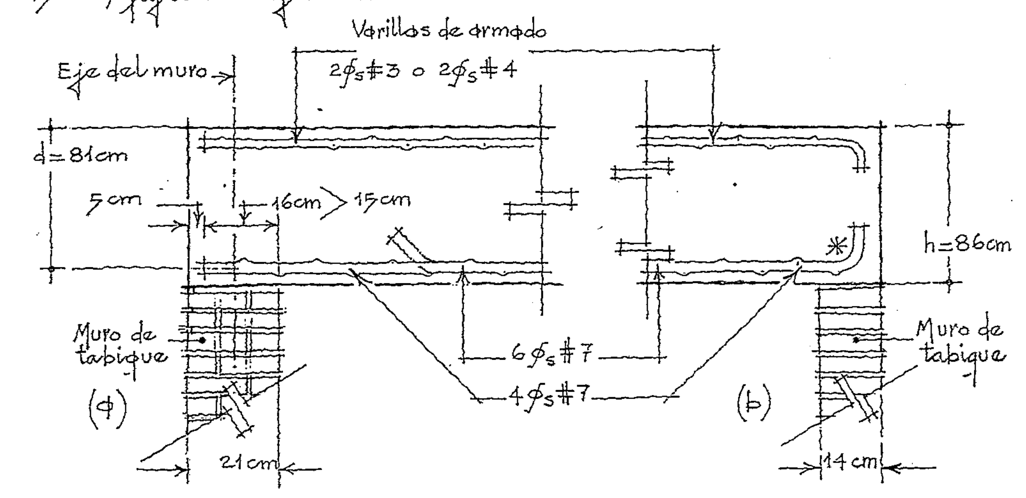


Fig. 10.20. Armados en el apoyo. Detalle, (a).

Fig. 10.21. Armados en el apoyo. Detalle, (b).

* Cuando se tienen apoyos con poco espesor, el anclaje requerido se logra haciendo ganchos en los extremos de las varillas.

En las figuras 10.22 a 10.24 se muestran los armados de la viga en corte transversal.

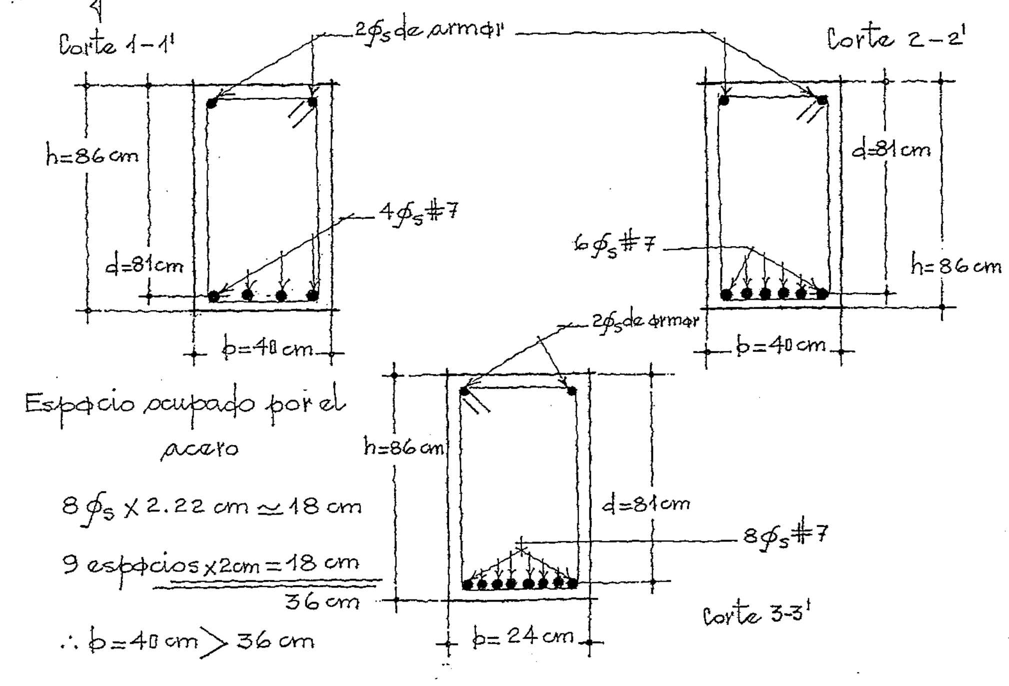


Fig. 10.22. Corte transversal 1-1'.

Fig. 10.23. Corte transversal 2-2'.

Fig. 10.24. Corte transversal 3-3'.

Ejemplo ilustrativo

Diseñar la viga simétrica sometida a una carga repartida con un cantilever en cada extremo de la viga.

Véanse las figuras 10.25 a 10.27.

Datos: $f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

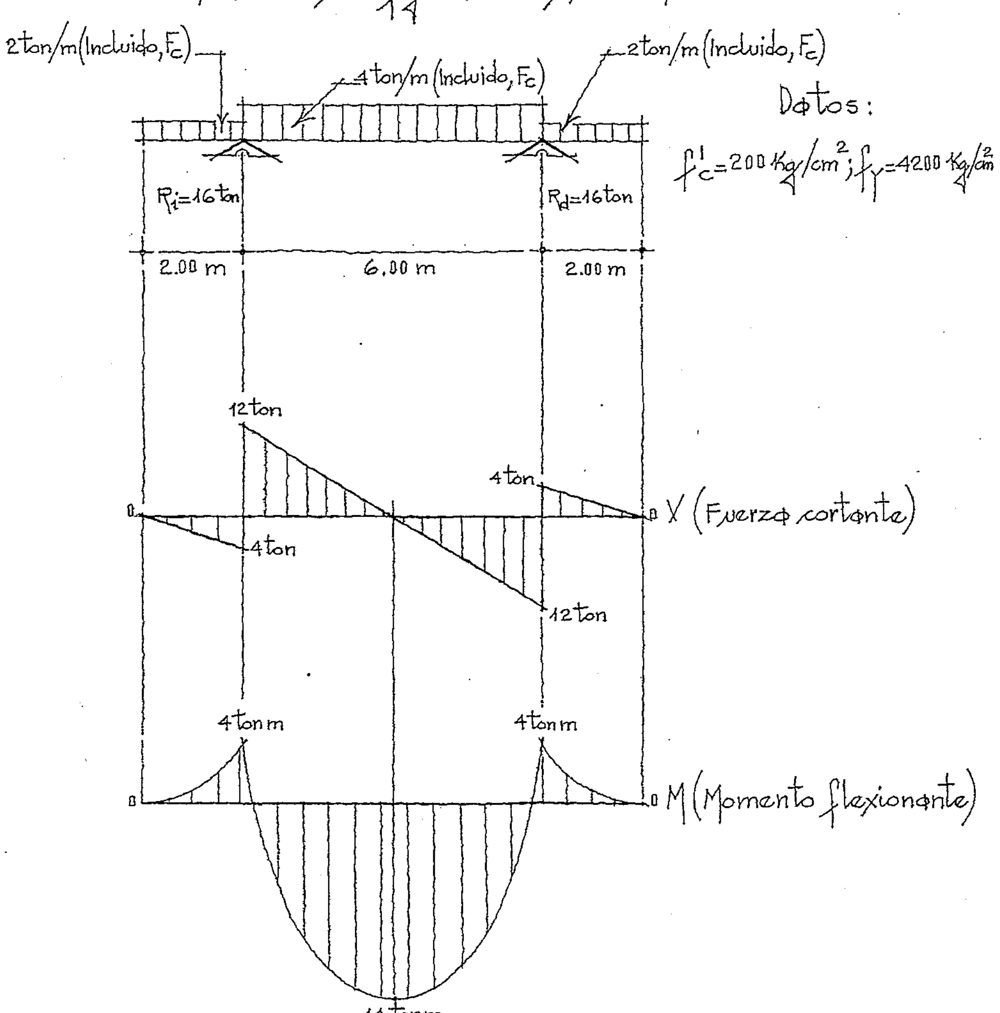


Fig. 10.25. Viga mostrando dimensiones y cargas.

Fig. 10.26. Gráfica de fuerza cortante.

Fig. 10.27. Gráfica de momento flexionante.

$$\Sigma F_Y = R_i + R_d - (2 \times 2) - (4 \times 6) - (2 \times 2) = 0$$

$$\Sigma M_{R_i} = R_d \times 6 - (2 \times 2 \times 7) - (4 \times 6 \times 3) + (2 \times 2 \times 1) = 0$$

$$\therefore \quad R_d = \frac{28 + 72 - 4}{6} = 16 \text{ ton}$$

Por tanto

$$R_i + 16 - 4 - 24 - 4 = 0$$

$$\therefore \; R_i = 32 - 16 = 16 \text{ ton}$$

Para tener la seguridad de un comportamiento dúctil, la viga se diseña aplicando el 50% del porcentaje de refuerzo correspondiente a falla balanceada.

$$\rho_b = 0.50\,\frac{0.85 f'_c \beta}{f_Y}\cdot\frac{6000}{6000+f_Y} = 0.50\,\frac{0.85\times 200\times 0.80}{4200}\cdot\frac{6000}{10200} \simeq 0.0095$$

$$q = \rho_b\,\frac{f_Y}{f'_c} = 0.0095\,\frac{4200}{200} \simeq 0.20$$

Cálculo del peralte de la viga suponiendo un ancho, b, de 30 cm.

$$M_U = F_R\, b d^2 f'_c\, q\,(1-0.59\,q)$$

$$= 0.90\times 30\cdot d^2\cdot 200\times 0.20\,(1-0.59\times 0.20)$$

$$\therefore\ d^2 = \frac{1400\,000}{0.90\times 30\times 200\times 0.20\,(1-0.118)} \simeq 1470\ \text{cm}^2$$

$$\text{y}\ \ d = \sqrt{1470} \simeq 40\ \text{cm}$$

Obtención del área de acero

$$A_s = \rho\, b d = 0.0095\times 30\times 40 = 11.40\ \text{cm}^2$$

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y}\, b d = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200}\,30\times 40 \simeq 2.83\ \text{cm}^2$$

$A_s > A_{s\,mín}$ (El área de acero cumple con lo especificado)

El área de acero en la zona de momento negativo lo obtenemos por comparación, veamos:

$$\frac{1400\,000}{400\,000} : \frac{11.40}{X} \qquad \therefore\ X = \frac{4560\,000}{1400\,000} \simeq 3.26\ \text{cm}^2$$

$$3.26\ \text{cm}^2 > A_{s\,mín.}$$

Con varillas #5 (Momento positivo)

$$\frac{11.40\ \text{cm}^2}{1.99\ \text{cm}^2} \simeq 6\,\phi_s\,\#5$$

Con varillas #5 (Momento negativo)

$$\frac{3.26\ \text{cm}^2}{1.99\ \text{cm}^2} \simeq 2\,\phi_s\,\#5$$

$M(+)$	11.40 cm^2; A_s requerida	$M(-)$	3.26 cm^2; A_s requerida
	11.94 cm^2; A_s proporcionada		3.98 cm^2; A_s proporcionada

Longitud de desarrollo, l_{db}

Barras #5

$$l_{db} = 0.06\,\frac{A_b f_y}{\sqrt{f'_c}} = 0.06\,\frac{1.99 \times 4200}{\sqrt{200}} \simeq 36\ \text{cm}$$

y,

$$l_{db} \geq 0.006\, d_b\, f_y = 0.006 \times 1.59 \times 4200 \simeq 40\ \text{cm}$$

Se cumple con la especificación ya que:

$$l_{db} = 40\ \text{cm} > 30\ \text{cm}\ (\textit{Mínimo por especificación})$$

El reglamento dice también:

"El acero se puede suprimir, cortando o doblando las varillas en aquellos puntos donde ya no se necesita según la gráfica de momento flexionante".

Veamos las figuras 10.28 y 10.29.

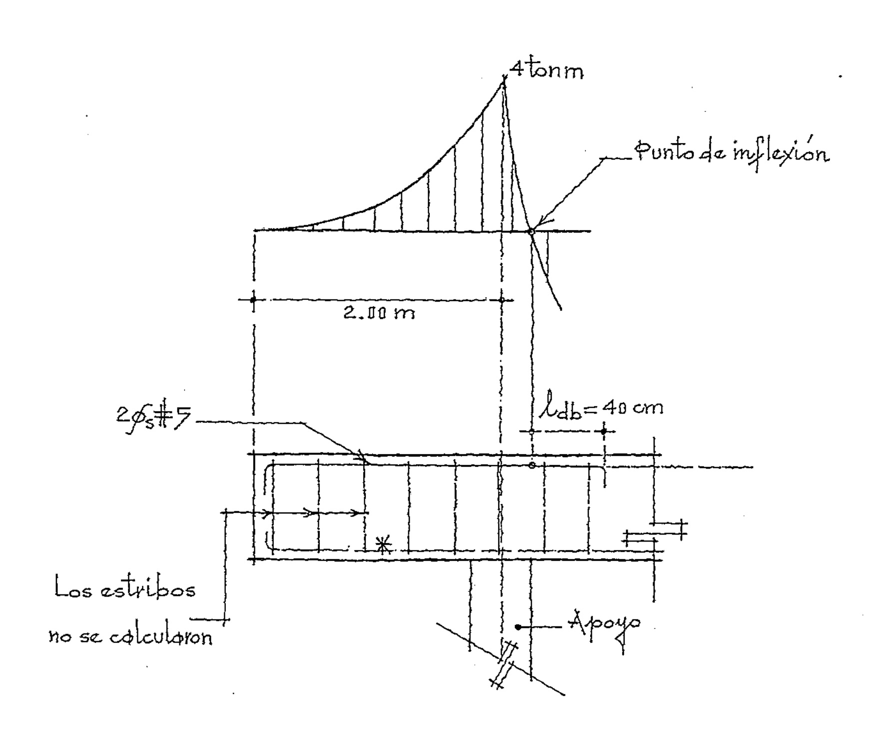


Fig.10.28. Gráfica de momento flexionante en el cantilever.

Fig.10.29. Armados en el cantilever.

*
El acero en la parte inferior del cantilever, se prolongará hasta el extremo para que los estribos se puedan armar.

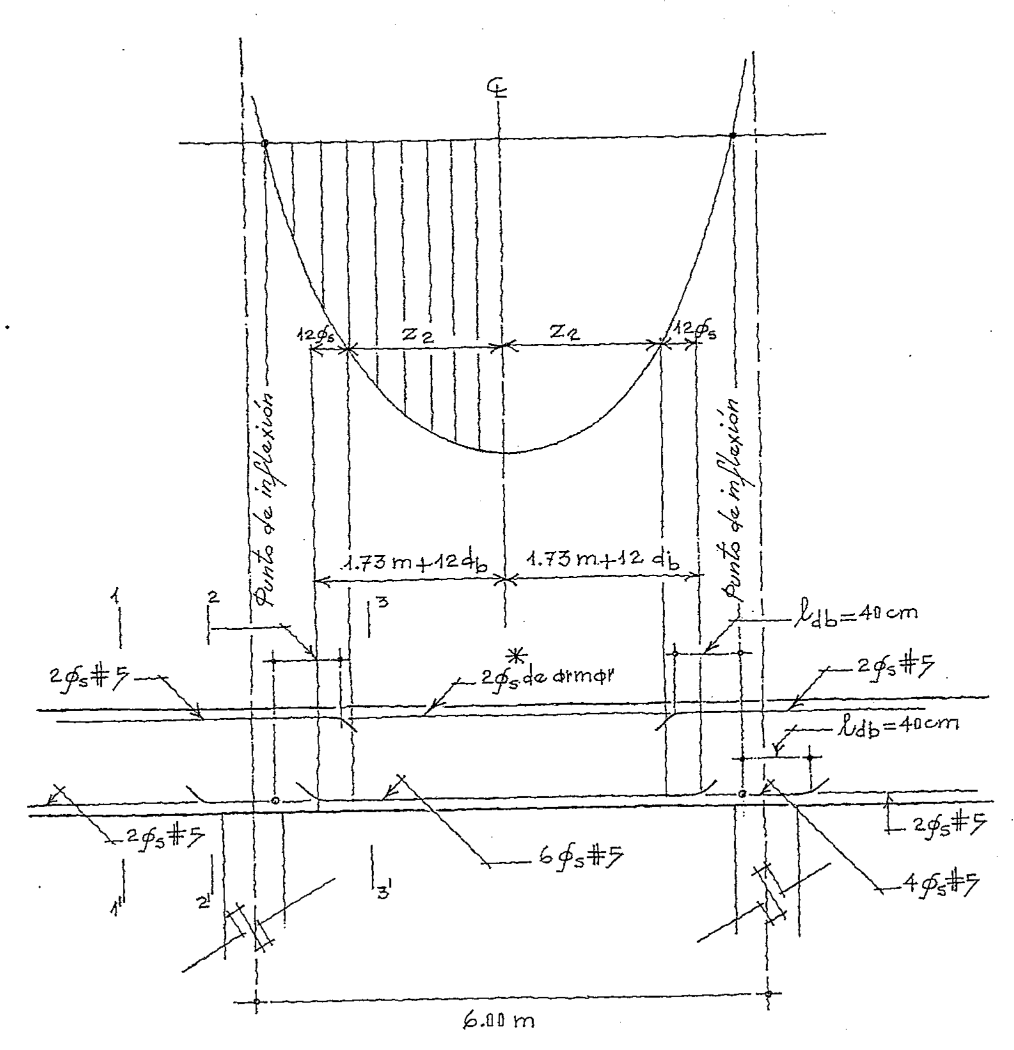


Fig. 10.30. Obtención de los puntos de doblez o de corte en una viga con carga repartida.

Fig. 10.31. Corte longitudinal de la viga mostrando los puntos de doblez o de corte.

Obtención de los puntos de corte o doblez:

$$\frac{z_2^2}{3.00^2} = \frac{2}{6} \quad \therefore \; z_2^2 = \frac{18}{6} = 3 \;\; y \;\; z_2 = \sqrt{3} \simeq 1.73\,\text{m}$$

---

* Los varillas de armar (Mínimo del #3) se colocan en aquellas zonas de la viga donde teóricamente y de acuerdo con la gráfica de momento flexionante no se necesita acero, sin embargo, en la práctica necesitamos colocarlo para que los estribos queden amarrados en sus cuatro esquinas.

Generalmente, el diseñador de estructuras prefiere prolongar dos varillas

a todo lo largo de la viga por resultar más práctico, aunque se requiere más acero.

En las figuras 10.32 a 10.34.

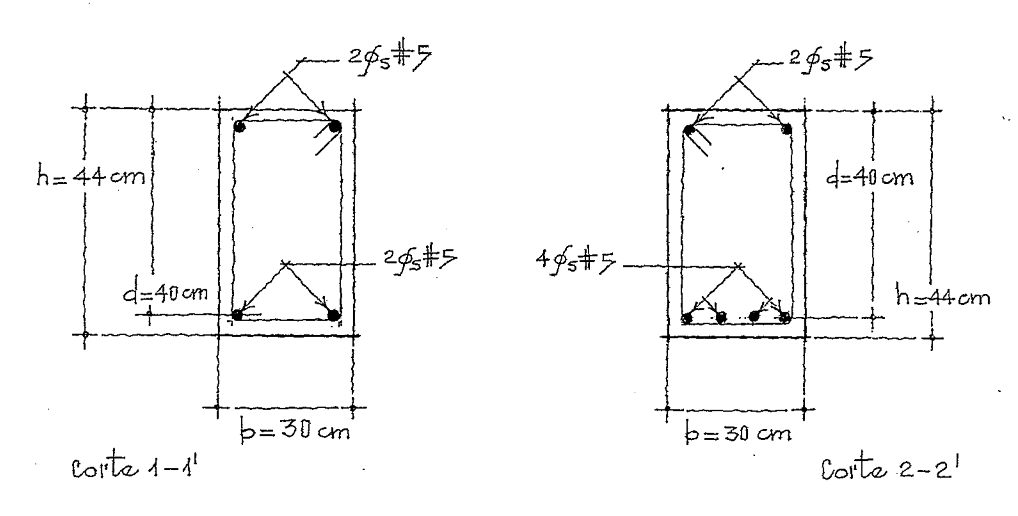


Fig. 10.32. Corte transversal, 1-1'.

Fig. 10.33. Corte transversal, 2-2'.

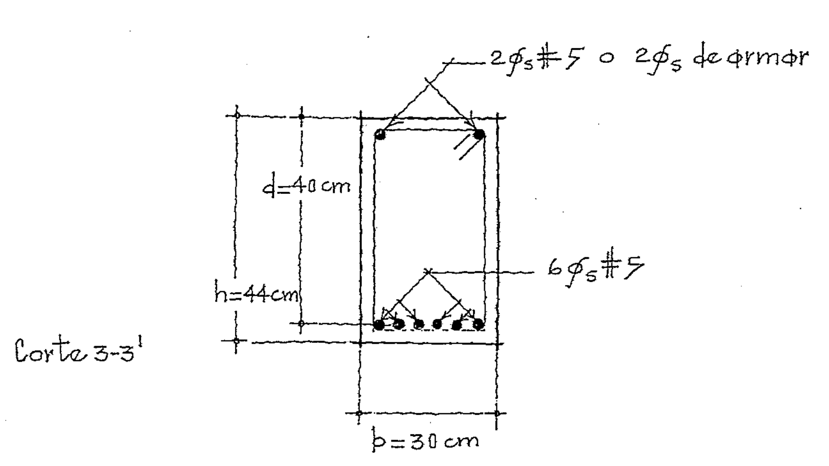


Fig. 10.34. Corte transversal, 3-3'.

Espacio ocupado por las varillas

$6\phi_s \times 1.59 \text{ cm} = 9.54 \text{ cm}$

$7 \text{ espacios} \times 2.00 = 14.00 \text{ cm}$

$23.54 \simeq 24 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$

Ya se mencionó que en las zonas de compresión se podrá armar con varillas más delgadas (*Mínimo de 3/8"*), pero por sencillez y resultar más práctico, se prolongaron de extremo a extremo de la viga las dos varillas del #5.

Referencias bibliográficas

Capítulo 10

Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, México, 1988.

ASTM: A 615-72, "*Standard Specification for Deformed and Plain Billet-Steel Bars for Concrete Reinforcement*," American Society for Testing and Materials, 1972.

Comité ACI 408, "*Suggested Development, Splice, and Standard Hook Provisions for Deformed Bars in Tension*" (ACI 408. 1R-79), American Concrete Institute, Detroit, 1979. También "*ACI Manual of Concrete Practice*."

Pérez Alamá, Vicente, "*El Concreto Armado en las Estructuras. Teoría Elástica*," Trillas, México, 2000.

Pérez Alamá, Vicente, "*Diseño y Cálculo de Estructuras de Concreto Reforzado. Por Resistencia Máxima y Servicio*," Trillas, México, 1999.

Comité ACI 408, "*Bond Stres - The State of the Art*," ACI Journal, Proceedings, 1966.

Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado, ACI 318-83, Detroit, 1983.

Untrauer, Raymond E., y Warren, George E., "*Stress Development of Tension Steel in Beams*," ACI Journal, Proceedings, 1977.

11

ESTRUCTURAS CONTÍNUAS

11.1. Generalidades

Se han visto en capítulos anteriores ejemplos de vigas estáticamente determinadas (contilever, vigas simplemente apoyadas y apoyadas con uno o con los dos extremos en contilever).

Ahora, se analizarán casos estáticamente indeterminados (vigas con un extremo apoyado y el otro empotrado o con los dos extremos empotrados); estos problemas requieren para su solución establecer una o más ecuaciones de deformación.

En el caso de vigas sometidas únicamente a cargas verticales (caso estáticamente determinado), las ecuaciones de la estática se reducen a:

$\Sigma F_Y = 0$, suma de fuerzas verticales

$\Sigma M = 0$, suma de momentos

Cuando la viga se encuentra con un extremo apoyado y el otro empotrado, fig. 11.1, se presentan como incognitas:

Dos reacciones verticales y,

el momento de empotramiento

La indeterminación es de 1er. grado.

M_A A B

Fig. 11.1. Viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro extremo.

Si la viga tiene sus dos extremos empotrados, fig. 11.2, las incognitas son:

Dos reacciones verticales y,

Dos momentos de empotramiento

La indeterminación es de 2o. grado.

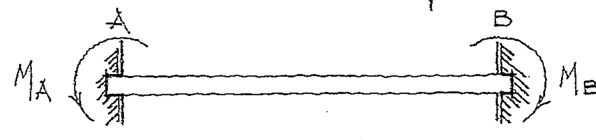


Fig. 11.2. Viga empotrada en ambos extremos.

Para calcular las deformaciones en un punto determinado de la viga, se puede aplicar el procedimiento de la doble integración partiendo de la ecuación diferencial de la elástica, de la teoría de las áreas de momentos y también de la viga conjugada.

A continuación se presentan ejemplos ilustrativos de casos estáticamente indeterminados.

Ejemplo ilustrativo

Fig. 11.3. Viga con carga uniformemente repartida, (a).

Fig. 11.4. Diagrama de momento flexionante, (b).

Una viga con ambos extremos empotrados se somete a una carga uniformemente repartida y a dos cargas concentradas.

Utilizando el "Método de la viga conjugada", calcular los valores de las reacciones y momentos de empotramiento, figuras 11.3 a 11.5.

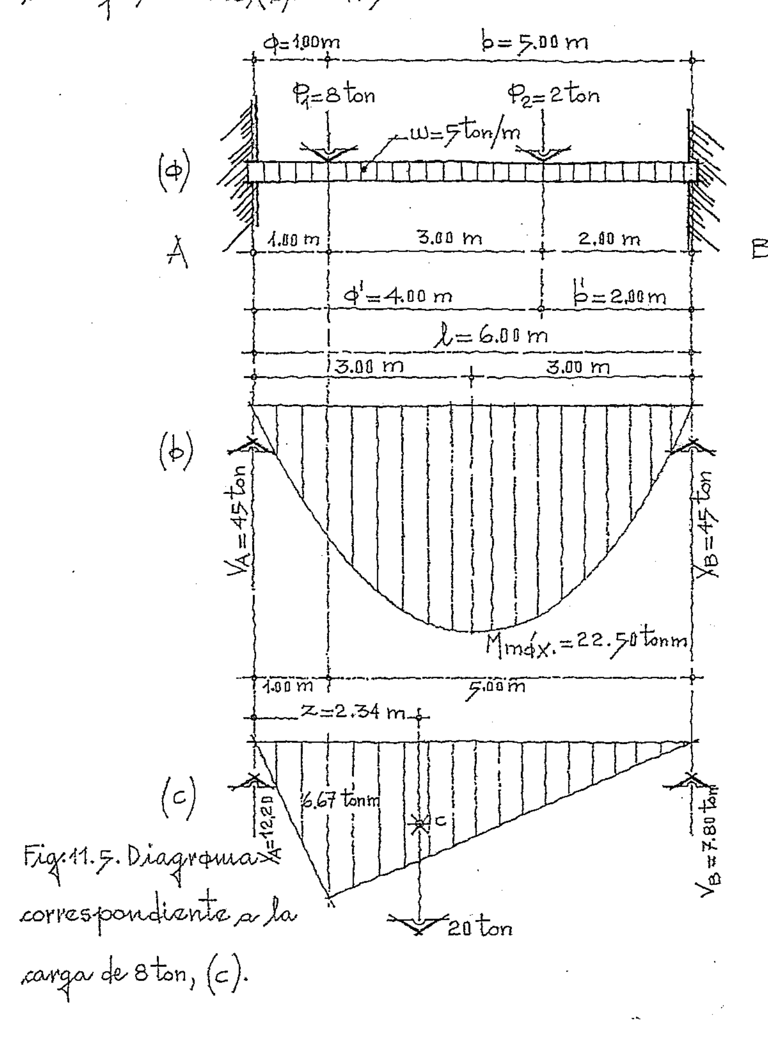


Fig. 11.5. Diagrama correspondiente a la carga de 8 ton, (c).

Pasos a seguir:

1o. Diagrama correspondiente a la carga uniformemente repartida

$$M_{máx.} = \frac{wl^2}{8} = \frac{5 \times 6^2}{8} = 22.50 \text{ ton m}$$

$$Area = \frac{2}{3} Ml = 0.667 \times 22.50 \times 6.00 = 90 \text{ ton}$$

$$\therefore V_A = V_B = \frac{90}{2} = 45 \text{ ton}$$

2o. Diagrama correspondiente a la carga de 8 ton

$$M_{máx.} = \frac{P_1 \cdot a \cdot b}{l} = \frac{8 \times 1.00 \times 5.00}{6.00} \simeq 6.67 \text{ tonm}$$

$$Area = \frac{Ml}{2} = \frac{6.67 \times 6.00}{2} \simeq 20 \text{ ton}$$

El centroide del diagrama (fig. 11.5 c), lo obtenemos con el promedio de las abcisas de los tres vértices. En A vale cero, en a_1 vale uno y en B vale seis, por tanto

$$z = \frac{0 + 1.00 + 6.00}{3.00} = \frac{7.00}{3.00} \simeq 2.34 m$$

Haciendo suma de momentos obtenemos:

$$\Sigma M_A = V_B \times 6 - 20 \times 2.34 = 0$$

$$\therefore V_B = \frac{20 \times 2.34}{6} = \frac{46.80}{6} = 7.80 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_B = -V_A \times 6 + 20 \times 3.66 = 0$$

$$\therefore V_A = \frac{20 \times 3.66}{6} = \frac{73.20}{6} = 12.20 \text{ ton}$$

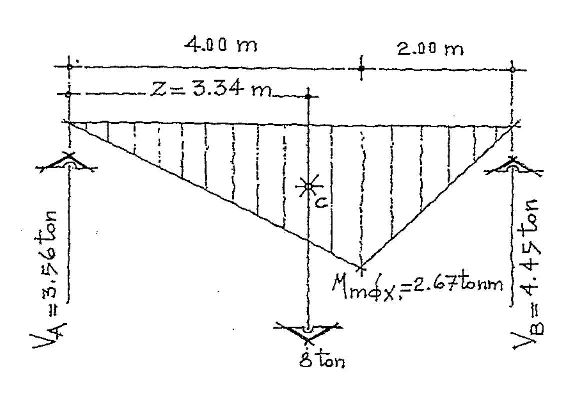


Fig. 11.6. Diagrama correspondiente a la carga de 2 ton.

3o. Diagrama correspondiente a la carga de 2 ton (fig. 11.6)

$$M_{máx.} = \frac{P_2 \cdot b \cdot a}{l} = \frac{2 \times 4 \times 2}{6.00} \simeq 2.67 \text{ tonm}$$

$$Area = \frac{M l}{2} = \frac{2.67 \times 6.00}{2} = 8.00 \text{ ton}$$

El centroide del diagrama lo obtenemos:

$$z = \frac{0 + 4.00 + 6.00}{3.00} = \frac{10.00}{3.00} \simeq 3.34 m$$

Haciendo suma de momentos, se tiene:

$$\Sigma M_A = V_B \times 6 - 8 \times 3.34 = 0$$

$$\therefore V_B = \frac{8 \times 3.34}{6.00} = \frac{26.72}{6.00} \simeq 4.45 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_B = -V_A \times 6 + 8 \times 2.67 = 0$$

$$\therefore V_A = \frac{8 \times 2.67}{6.00} = 3.56 \text{ ton}$$

En una sección cualquiera de la viga, la pendiente de la elástica es igual a la fuerza cortante entre el módulo de elasticidad por su momento de inercia (EI).

La flecha de la elástica, es igual al momento de flexión entre el módulo de elasticidad por su momento de inercia (EI).

Fig. 11.7. Diagrama de momentos (a).

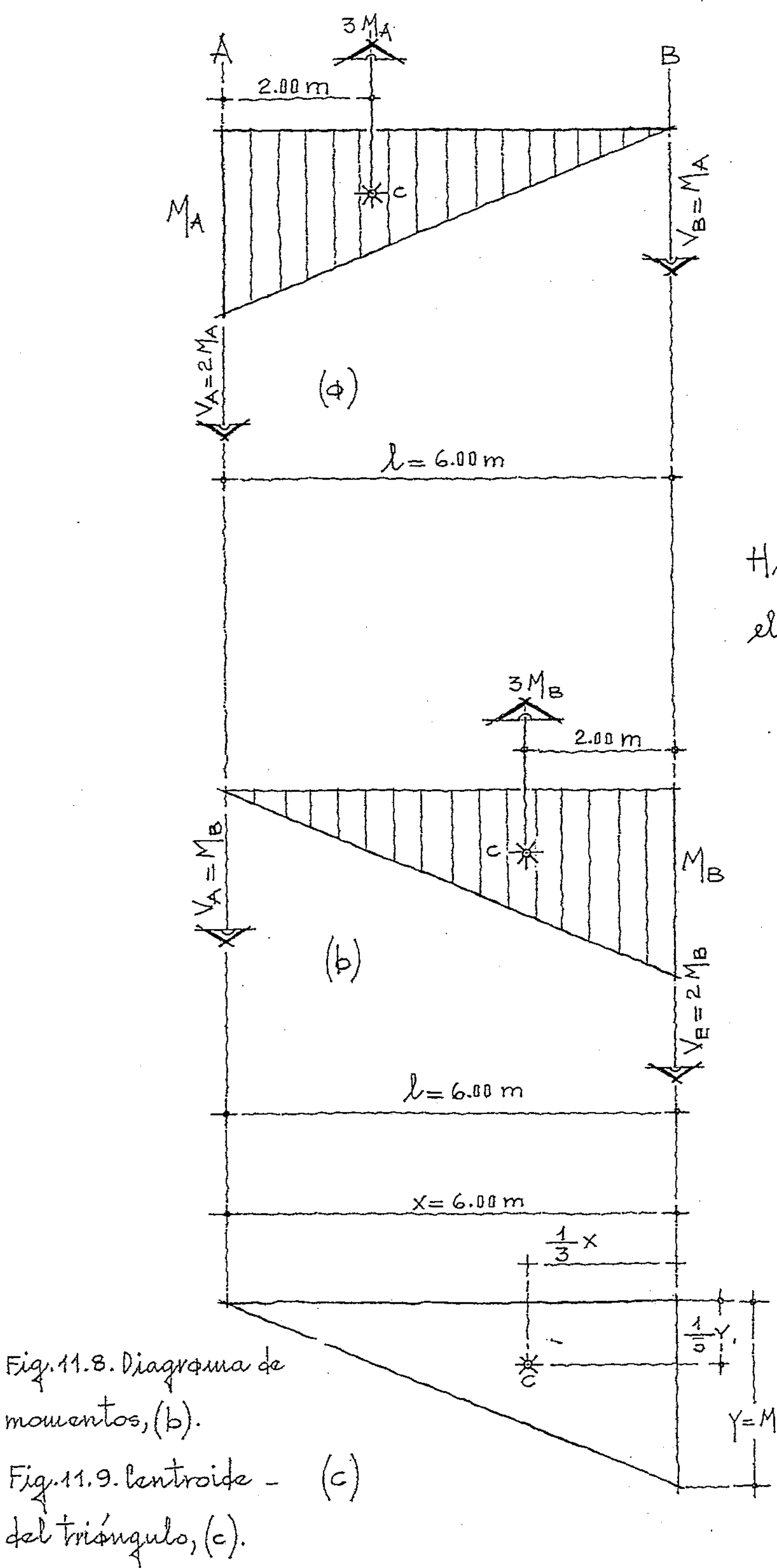


Fig. 11.8. Diagrama de momentos, (b).

Fig. 11.9. Centroide del triángulo, (c).

4o. Diagramas correspondientes a los momentos de empotramiento

$$\text{Área del diagrama} = \frac{-M_A \cdot 6}{2} = 3M_A$$

Por suma de momentos, obtenemos:

$$\Sigma M_A = -V_B \times 6 + 3M_A \times 2 = 0$$

$$\therefore V_B = \frac{6M_A}{6} = M_A$$

$$\Sigma M_B = V_A \times 6 - 3M_A \times 4 = 0$$

$$\therefore V_A = \frac{12M_A}{6} = 2M_A$$

Hacemos la misma operación para el otro diagrama

$$\text{Área del diagrama} = \frac{M_B \times 6}{2} = 3M_B$$

Por suma de momentos, se tiene:

$$\Sigma M_A = -V_B \times 6 + 3M_B \times 4 = 0$$

$$\therefore V_B = \frac{12M_B}{6} = 2M_B$$

$$\Sigma M_B = V_A \times 6 - 3M_B \times 2 = 0$$

$$\therefore V_A = \frac{6M_B}{6} = M_B$$

El área del diagrama corresponde al área del triángulo.

El centroide del triángulo corresponde a $\frac{1}{3}$ de la altura (x), y a $\frac{1}{3}$ de la base (Y).

A continuación sumamos todas las fuerzas que concurren primero en el punto (A) y después en el (B) y se dividen ambas sumas entre (EI), veamos:

Punto A

$$\frac{45+12.20+3.56-2M_A-M_B}{EI}=\frac{60.76-2M_A-M_B}{EI}=0$$

Punto B

$$\frac{45+7.80+4.45-M_A-2M_B}{EI}=\frac{57.25-M_A-2M_B}{EI}=0$$

Suprimiendo factores comunes y despejando:

$$M_A=\frac{60.76-M_B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$M_A=57.25-2M_B \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$\frac{60.76-M_B}{2}=57.25-2M_B$$

$$60.76-M_B=(57.25-2M_B)2$$

$$60.76-M_B=114.50-4M_B \quad y$$

$$114.50=60.76+4M_B-M_B$$

$$114.50=60.76+3M_B$$

y finalmente

$$M_B=\frac{114.50-60.76}{3}\simeq 17.90 \text{ tonm}$$

De la ecuación (1) obtenemos el valor de M_A

$$M_A=\frac{60.76-17.90}{2}=\frac{42.86}{2}$$

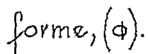
Por tanto

$$M_A=21.43 \text{ tonm}$$

Al ser diferentes los momentos, será necesario equilibrar la pieza con un par de fuerzas que produzcan un momento de igual magnitud y de sentido contrario, que el momento en desequilibrio, veamos la fig. 11.10. $\therefore R_A=R_B=\frac{M_A-M_B}{l}=\frac{21.43-17.90}{6.00}\simeq 0.59t$

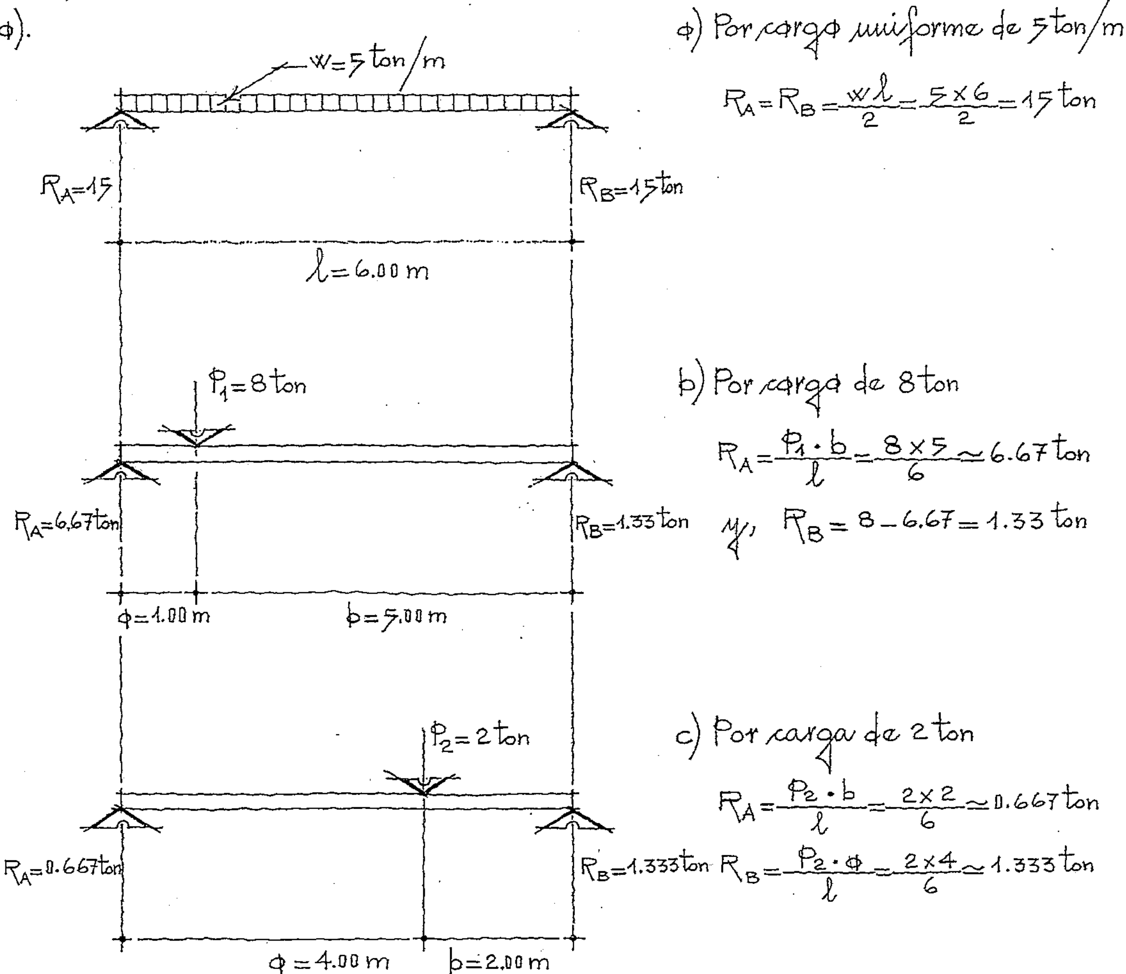
Fig. 11.10. Par de fuerzas para equilibrar la pieza.

Cálculo del valor de las reacciones, figuras 11.11 a 11.13.


Fig. 11.11. Carga uniforme, (a).

a) Por carga uniforme de 5 ton/m

$R_A = R_B = \frac{wl}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$ ton



b) Por carga de 8 ton

$R_A = \frac{P_1 \cdot b}{l} = \frac{8 \times 5}{6} \simeq 6.67$ ton

y, $R_B = 8 - 6.67 = 1.33$ ton

c) Por carga de 2 ton

$R_A = \frac{P_2 \cdot b}{l} = \frac{2 \times 2}{6} \simeq 0.667$ ton

$R_B = \frac{P_2 \cdot a}{l} = \frac{2 \times 4}{6} \simeq 1.333$ ton

Fig. 11.12. Carga concentrada, (b).

Fig. 11.13. Carga concentrada, (c).

Finalmente, el valor de las reacciones se obtienen sumando todos los valores ya calculados:

$R_A = 15 + 6.67 + 0.667 + 0.59 \simeq 22.93$ ton

$R_B = 15 + 1.33 + 1.333 - 0.59 \simeq 17.07$ ton

Carga total que recibe la viga:

$W_T = (5 \times 6 = 30) + 8 + 2 = 40$ ton

Sumando las reacciones, se tiene:

$R_A + R_B = 22.93 + 17.07 = 40$ ton

Las reacciones, R_A y R_B, soportan adecuadamente la carga que reciben

Fig. 11.14. Viga con doble empotramiento, (a).

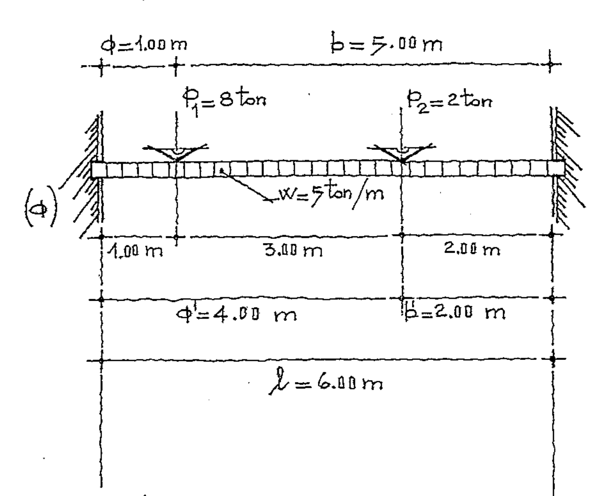


Fig. 11.15. Diagrama de esfuerzo cortante, (b).

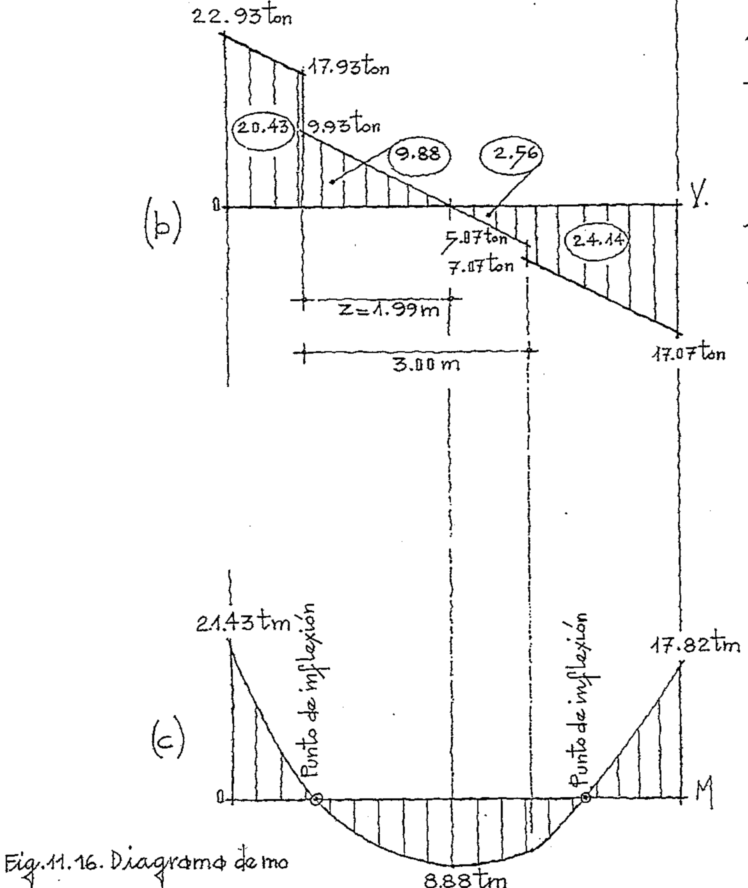


Fig. 11.16. Diagrama de momento flexionante, (c).

Utilizando tablas y manuales se pueden calcular los momentos de empotramiento con rapidez y con resultados prácticamente idénticos, veamos la fig. 11.14.

$$M_A = \frac{w l^2}{12} + \frac{P_1 \cdot a \cdot b^2}{l^2} + \frac{P_2 \cdot a' \cdot b'^2}{l^2}$$

$$\therefore M_A = \frac{5 \times 6^2}{12} + \frac{8 \times 1 \times 5^2}{6^2} + \frac{2 \times 4 \times 2^2}{6^2}$$

$$M_A = 21.44 \text{ tm}$$

$$M_B = \frac{w l^2}{12} + \frac{P_1 \cdot a^2 \cdot b}{l^2} + \frac{P_2 \cdot a'^2 \cdot b'}{l^2}$$

$$\therefore M_B = \frac{5 \times 6^2}{12} + \frac{8 \times 1^2 \times 5}{36} + \frac{2 \times 4^2 \times 2}{36}$$

$$M_B = 17.89 \text{ tm}$$

Queda demostrado que los resultados, en ambos procedimientos son prácticamente iguales.

En las figs. 11.15 y 11.16 se presentan los diagramas de esfuerzo cortante y momento flexionante.

$$22.93 - (5 \times 1) = 17.93 \quad y \quad 17.93 - 8 = 9.93$$

$$9.93 - (5 \times 3) = -5.07 - 2 = -7.07$$

finalmente, $-7.07 - (5 \times 2) = -17.07$

$$\frac{22.93 + 17.93}{2} \, 1.00 = 20.43 \; \therefore \; \frac{9.93 \times 1.99}{2} = 9.88$$

$$20.43 + 9.88 - 21.43 = 8.88$$

$$\frac{5.07 \times 1.01}{2} = 2.56$$

$$\frac{17.07 + 7.07}{2} \, 2.00 = 24.14$$

finalmente

$$2.56 + 24.14 - 8.88 = 17.82$$

La diferencia es insignificante.

~~Por comparación de triángulos obtenemos la distancia, ve-~~ veamos la figura 11.17.

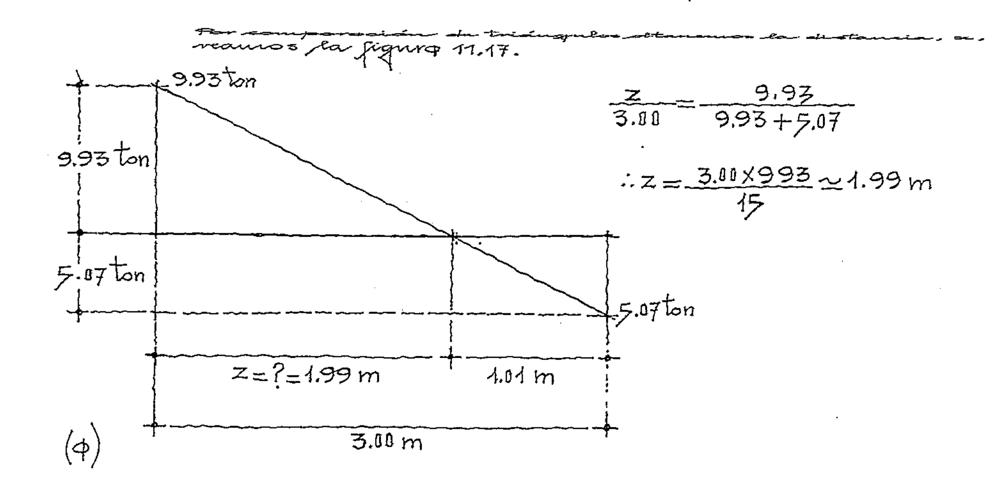


Fig. 11.17. Obtención de la distancia z, (φ).

$$\frac{z}{3.00} = \frac{9.93}{9.93 + 5.07}$$

$$\therefore z = \frac{3.00 \times 993}{15} \simeq 1.99\ m$$

Cálculo de los puntos de inflexión, fig. 11.18

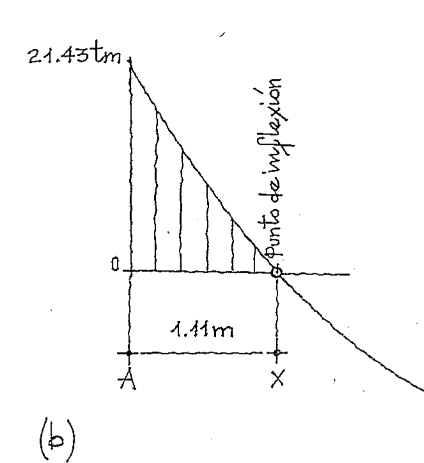


Fig. 11.18. Obtención del punto de inflexión, (b).

Suma de momentos en el punto (x):

$$\Sigma M_x = 21.43 - 22.92(AX) + 5AX\frac{AX}{2} + 8(AX-1) = 0$$

$$= 21.43 - 22.92AX + 2.5AX^2 + 8AX - 8 = 0$$

Simplicando, obtenemos:

$$(21.43 - 8) - 22.92AX + 8AX + 2.5AX^2 = 0$$

$$\therefore 13.43 - 14.92AX + 2.5AX^2 = 0$$

Dividiendo la ecuación entre 2.5, se tiene:

$$AX^2 - 5.97AX + 5.38 = 0 \text{ (Ecuación de 2° grado)}$$

$$\therefore AX = \frac{(-)-5.97 \pm \sqrt{(5.97)^2 - 4(5.38)}}{2}$$

$$= \frac{5.97 \pm \sqrt{35.64 - 21.52}}{2}$$

$$= \frac{5.97 \pm \sqrt{14.12}}{2}$$

$$= \frac{5.97 \pm 3.76}{2} = \frac{2.21}{2}$$

y finalmente

$$AX \simeq 1.11\ m$$

La distancia (BX) del otro punto de inflexión, la obtenemos de igual manera que la anterior, veamos la fig. 11.19.

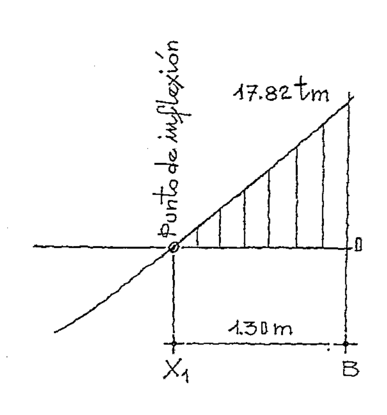


Fig. 11.19. Obtención del punto de inflexión.

Suma de momentos en el punto (X_1):

$$\Sigma M_{X_1} = -17.82 + 17.07 (BX_1) - 5\, BX_1 \frac{BX_1}{2} = 0$$

$$= -17.82 + 17.07\, BX_1 - 5\, BX_1^2/2 = 0$$

Simplificando la ecuación

$$-17.82 + 17.07\, BX_1 - 2.5\, BX_1^2 = 0$$

Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 2.5, se obtiene:

$$-BX_1^2 + 6.83\, BX_1 - 7.13 = 0$$

Cambiando signos

$$BX_1^2 - 6.83 + 7.13 = 0$$

$$BX_1 = \frac{6.83 \pm \sqrt{(6.83)^2 - 4(7.13)}}{2}$$

$$= \frac{6.83 \pm \sqrt{46.65 - 28.52}}{2}$$

$$= \frac{6.83 \pm \sqrt{18.13}}{2}$$

$$BX_1 = \frac{6.83 \pm 4.26}{2} \simeq 1.30 \text{ m}$$

Con los valores de los cortantes, momentos flexionantes y distancias de los puntos de inflexión, se puede diseñar la sección de la viga, armados, estribos y su posición para que la pieza soporte en condiciones adecuadas, la carga a que fue sometida.

La localización de los puntos de inflexión es importante, ya que en ese punto el momento es cero, cambian los armados para absorber los esfuerzos de tracción de un lado y de compresión en el otro.

A continuación se presentan varios ejemplos de vi-

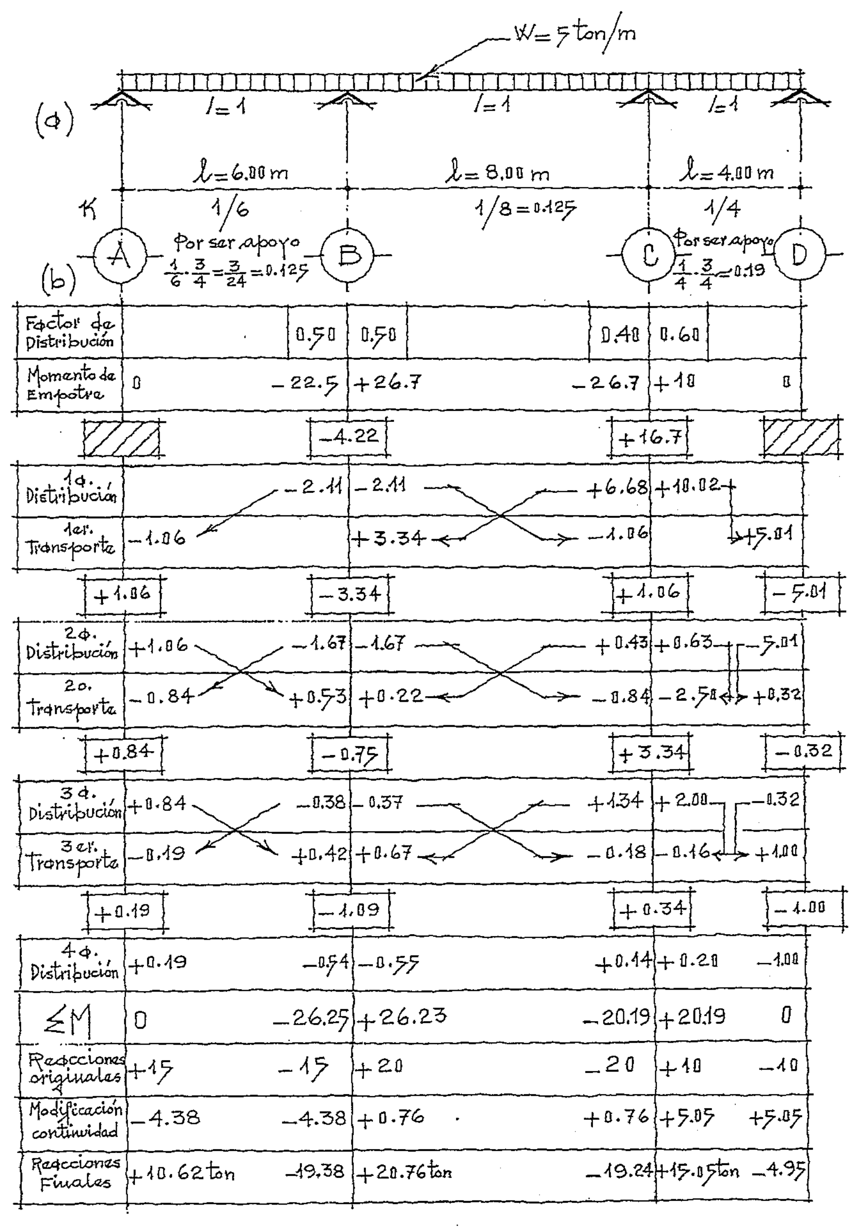
gas continuas.

Fig. 11.20. Viga continua de tres tramos, (a).

Fig. 11.21. Cuadro de distribución, (b).

Ejemplo ilustrativo (*Método de Cross*)

La viga continua de tres tramos simplemente apoyada, se encuentra sometida a una carga repartida uniforme de 5 ton/m. Calcular la viga para las solicitaciones dadas; figuras 11.20 a 11.22.



	A	B	B	C	C	D
Factor de Distribución		0.50	0.50	0.40	0.60	
Momento de Empotre	0	−22.5	+26.7	−26.7	+10	0
		−4.22		+16.7		
1a. Distribución		−2.11	−2.11	+6.68	+10.02	
1er. Transporte	−1.06		+3.34	−1.06		+5.01
	+1.06	−3.34		+1.06		−5.01
2a. Distribución	+1.06	−1.67	−1.67	+0.43	+0.63	−5.01
2o. Transporte	−0.84	+0.53	+0.22	−0.84	−2.50	+0.32
	+0.84	−0.75		+3.34		−0.32
3a. Distribución	+0.84	−0.38	−0.37	+1.34	+2.00	−0.32
3er. Transporte	−0.19	+0.42	+0.67	−0.18	−0.16	+1.00
	+0.19	−1.09		+0.34		−1.00
4a. Distribución	+0.19	−0.54	−0.55	+0.14	+0.20	−1.00
ΣM	0	−26.25	+26.23	−20.19	+20.19	0
Reacciones originales	+15	−15	+20	−20	+10	−10
Modificación continuidad	−4.38	−4.38	+0.76	+0.76	+5.05	+5.05
Reacciones Finales	+10.62 ton	−19.38	+20.76 ton	−19.24	+15.05 ton	−4.95

Fig. 11.22. Tramo de viga A-B, (c).

La solución comprende los pasos siguientes:

1. Determinar los valores de las rigideces, K:

   El momento de inercia, I, se tomó igual a uno por tratarse de una viga de sección constante.

   $$\therefore K = \frac{I}{l} = \frac{\text{Momento de inercia}}{\text{claro}}$$

2. Obtención de los factores de distribución, F.D.: $F.D. = \frac{K}{\Sigma K}$

   Nudo B.

   $$F.D._{BA} = \frac{0.125}{0.125+0.125} = 0.50$$

   $$F.D._{BC} = \frac{0.125}{0.125+0.125} = 0.50$$

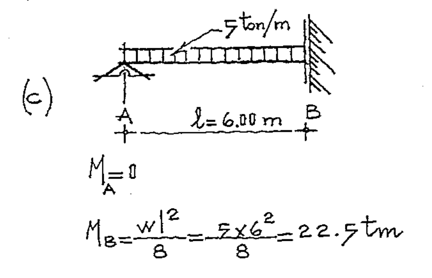
   Nudo C.

   $$F.D._{CB} = \frac{0.125}{0.125+0.19} = 0.40$$

   $$F.D._{CD} = \frac{0.19}{0.19+0.125} = 0.60$$

3. Cálculo de los momentos de empotramiento; M.E.

   Tramo AB:



$M_A = 0$

$$M_B = \frac{wl^2}{8} = \frac{5\times6^2}{8} = 22.5\,tm$$

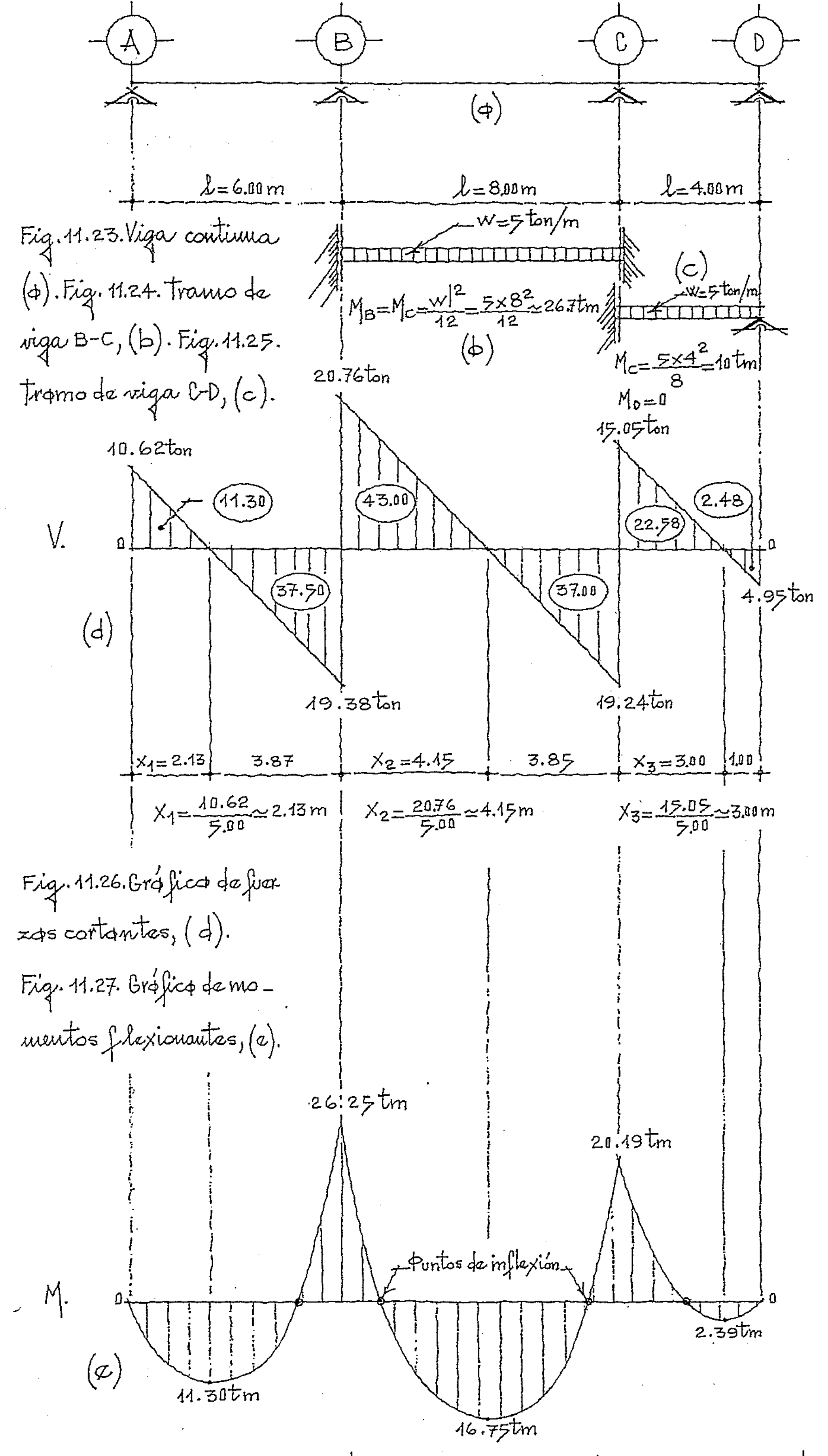


Fig. 11.23. Viga continua (a). Fig. 11.24. Tramo de viga B-C, (b). Fig. 11.25. Tramo de viga C-D, (c).

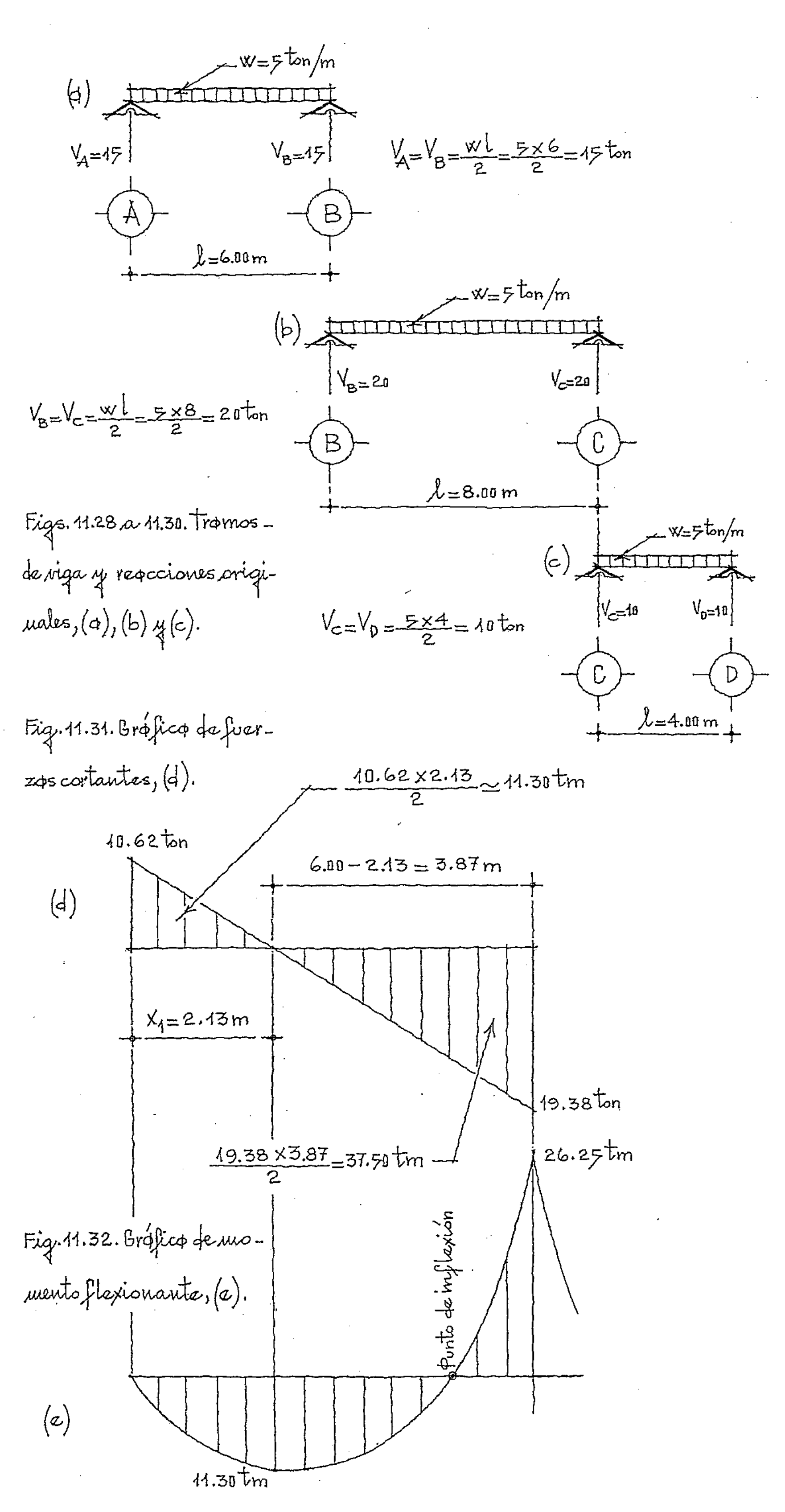
Fig. 11.26. Gráfica de fuerzas cortantes, (d).

Fig. 11.27. Gráfica de momentos flexionantes, (e).

37.50 – 11.30 = 26.20 tm ; 43.00 – 26.25 = 16.75 tm; 22.58 – 20.19 = 2.39 tm

Véanse las figs. 11.23 a 11.25.

4. Equilibrar los momentos en los nudos desequilibrados. La fuerza de equilibrio se encuentra dentro de los pequeños rectángulos.
5. Primera distribución (1a. D.): Una vez cambiado el signo, para equilibrar el nudo, se multiplica por el factor de distribución correspondiente.
6. Primer transporte (1er. T.): El valor obtenido en la columna (distribución) se divide entre dos, conserva su signo y pasa al extremo opuesto.
7. Con los pasos mencionados queda concluido un ciclo y y deberá repetirse, hasta que los momentos distribuidos sean despreciables; la operación deberá terminarse siempre después de una distribución, ya que en ese momento todos los nudos habrán recuperado su equilibrio.
8. Momentos finales: Es la suma algebraica de los momentos de empotramiento, incluyendo las distribuciones y los transportes.



Figs. 11.28 a 11.30. Tramos de viga y reacciones originales, (a), (b) y (c).

Fig. 11.31. Gráfico de fuerzas cortantes, (d).

Fig. 11.32. Gráfico de momento flexionante, (e).

9. Reacciones originales: Son las que resultan de cada tramo de la viga como simplemente apoyada, figs. 11.28 a 11.30.

10. Modificación por continuidad: Esta operación resulta de la diferencia de momentos entre el claro y respetando el signo del mayor.

11. Reacciones finales: Se obtienen sumando o restando (según el caso), las reacciones originales con los valores obtenidos en la modificación por continuidad.

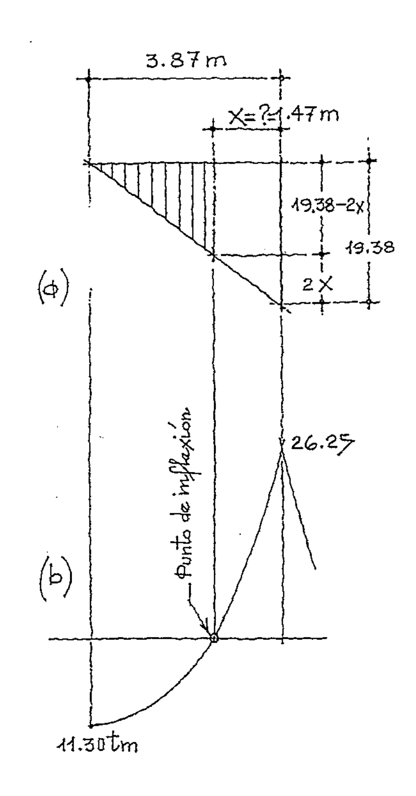
12. Momentos positivos: Los obtenemos del diagrama de cortantes, sacando las áreas correspondientes al punto de cortante cero pues en esos puntos el momento positivo será máximo, figuras 11.31 y 11.32.

$$37.50 - 11.30 = 26.20 \text{ tm}$$

En el cuadro de distribución aparece el valor de 26.23 tm y en la gráfica de momentos flexionantes 26.25 tm; la diferencia se debe a que en varias operaciones se optó por redondear las cantidades.

Fig. 11.33. Tramo de cortante, (a).

Fig. 11.34. Tramo de momento flexionante, (b).



13. Obtención de los puntos de inflexión, figuras 11.33 a 11.36.

$$26.25 = \frac{19.38 + (19.38 - 2x)x}{2}$$

$$= 19.38x - x^2 \quad y,$$

$$x^2 - 19.38x + 26.25 = 0$$

$$x = \frac{19.38 \pm \sqrt{(19.38)^2 - 4(26.25)}}{2}$$

$$= \frac{19.38 \pm \sqrt{375.6 - 105}}{2}$$

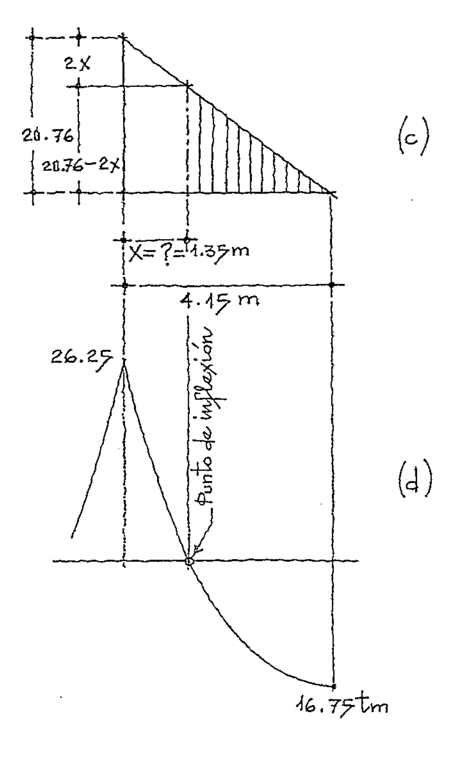
$$= \frac{19.38 \pm \sqrt{270.6}}{2}$$

finalmente

$$x = \frac{19.38 - 16.45}{2} \simeq 1.47 \text{ m}$$

Fig. 11.35. Tramo de cortante, (c).

Fig. 11.36. Tramo de momento flexionante, (d).



$$26.25 = \frac{26.76 + (20.76 - 2x)x}{2}$$

$$= 20.76x - x^2 \quad y,$$

$$x^2 - 20.76x + 26.25 = 0$$

$$x = \frac{20.76 \pm \sqrt{(20.76)^2 - 4(26.25)}}{2}$$

$$= \frac{20.76 \pm \sqrt{431 - 105}}{2}$$

$$= \frac{20.76 \pm \sqrt{326}}{2}$$

finalmente

$$x = \frac{20.76 - 18.06}{2} = 1.35 \text{ m}$$

La posición de los otros puntos de inflexión se pueden obtener de la misma forma.

Cuando se tiene una estructura simétrica en carga y simétrica en longitud de claros, se puede trabajar con la mitad de la estructura ya que los momentos en la otra mitad serán iguales y de signo contrario; el problema se simplifica mucho.

A continuación se presenta un ejercicio para su mejor comprensión.

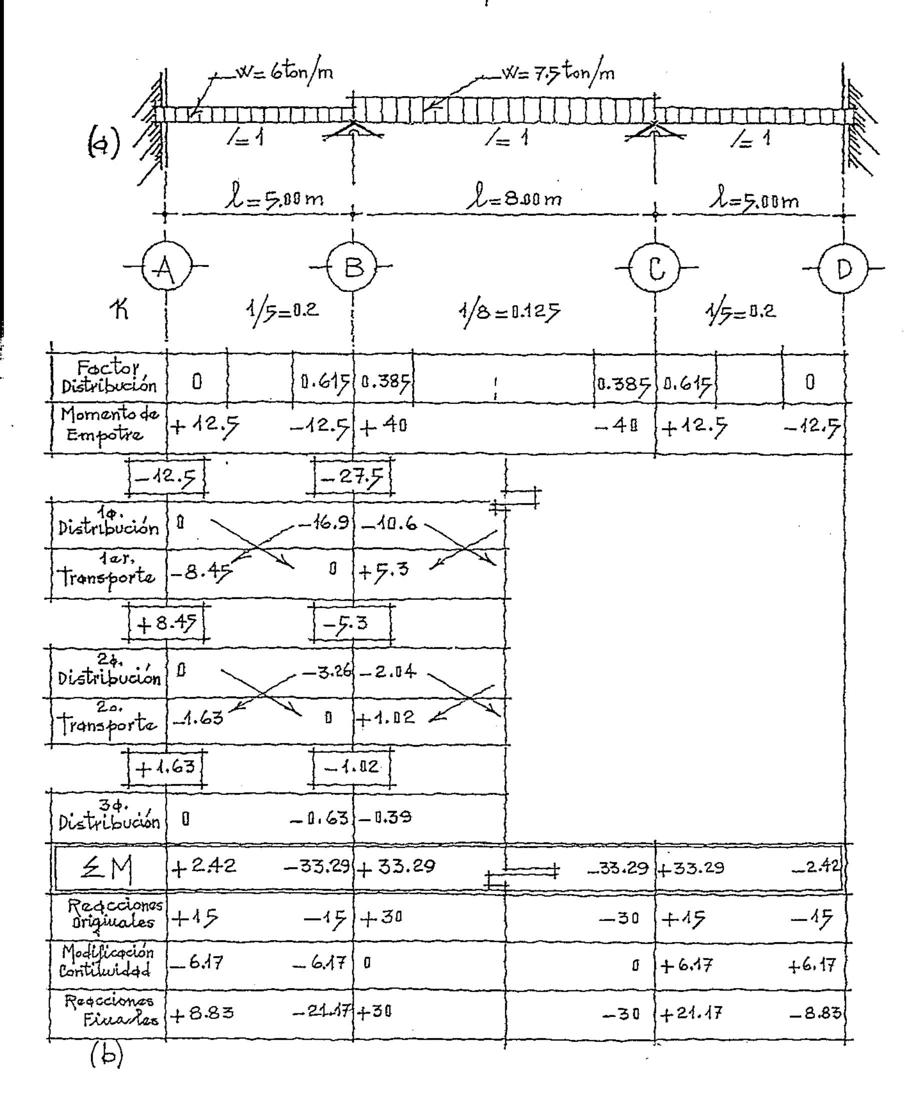
Fig. 11.37. Viga continua de tres tramos, (a).

Fig. 11.38. Cuadro de distribución, (b).

Fig. 11.39. Tramo de viga A-B, (c).

Ejemplo ilustrativo (*Estructura simétrica*)

La viga continua de tres tramos se encuentra con ambos extremos empotrados y sometida a una carga repartida uniforme a todo lo largo de la viga; en el tramo central la viga lleva una sobrecarga. Véanse las figs. 11.37 a 11.39.



	A	B	B	C	C	D
K		1/5=0.2	1/8=0.125		1/5=0.2	
Factor Distribución	0	0.615	0.385	0.385	0.615	0
Momento de Empotre	+12.5	−12.5	+40	−40	+12.5	−12.5
	−12.5	−27.5				
1a. Distribución	0	−16.9	−10.6			
1er. Transporte	−8.45	0	+5.3			
	+8.45	−5.3				
2a. Distribución	0	−3.26	−2.04			
2o. Transporte	−1.63	0	+1.02			
	+1.63	−1.02				
3a. Distribución	0	−0.63	−0.39			
ΣM	+2.42	−33.29	+33.29	−33.29	+33.29	−2.42
Reacciones Originales	+15	−15	+30	−30	+15	−15
Modificación Continuidad	−6.17	−6.17	0	0	+6.17	+6.17
Reacciones Finales	+8.83	−21.17	+30	−30	+21.17	−8.83

Obtención de las rigideces, K:

$$K=\frac{I}{l}$$

Factores de distribución, F.D.

Cuando se trata de un empotre éste toma el momento sin devolverlo, por lo tanto, su F.D.=0.

Nudo A

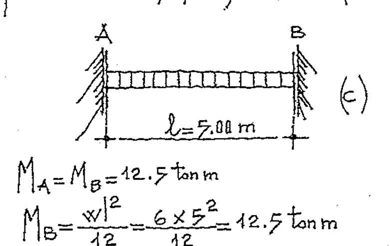
F.D.=0

Nudo B

$$F.D._{BA}=\frac{0.2}{0.2+0.125}\simeq 0.615$$

$$F.D._{BC}=\frac{0.125}{0.125+0.2}\simeq 0.385$$

Cálculo del momento de empotramiento, M.E.; tramo AB:



$$M_A=M_B=12.5 \text{ ton m}$$

$$M_B=\frac{wl^2}{12}=\frac{6\times 5^2}{12}=12.5 \text{ ton m}$$

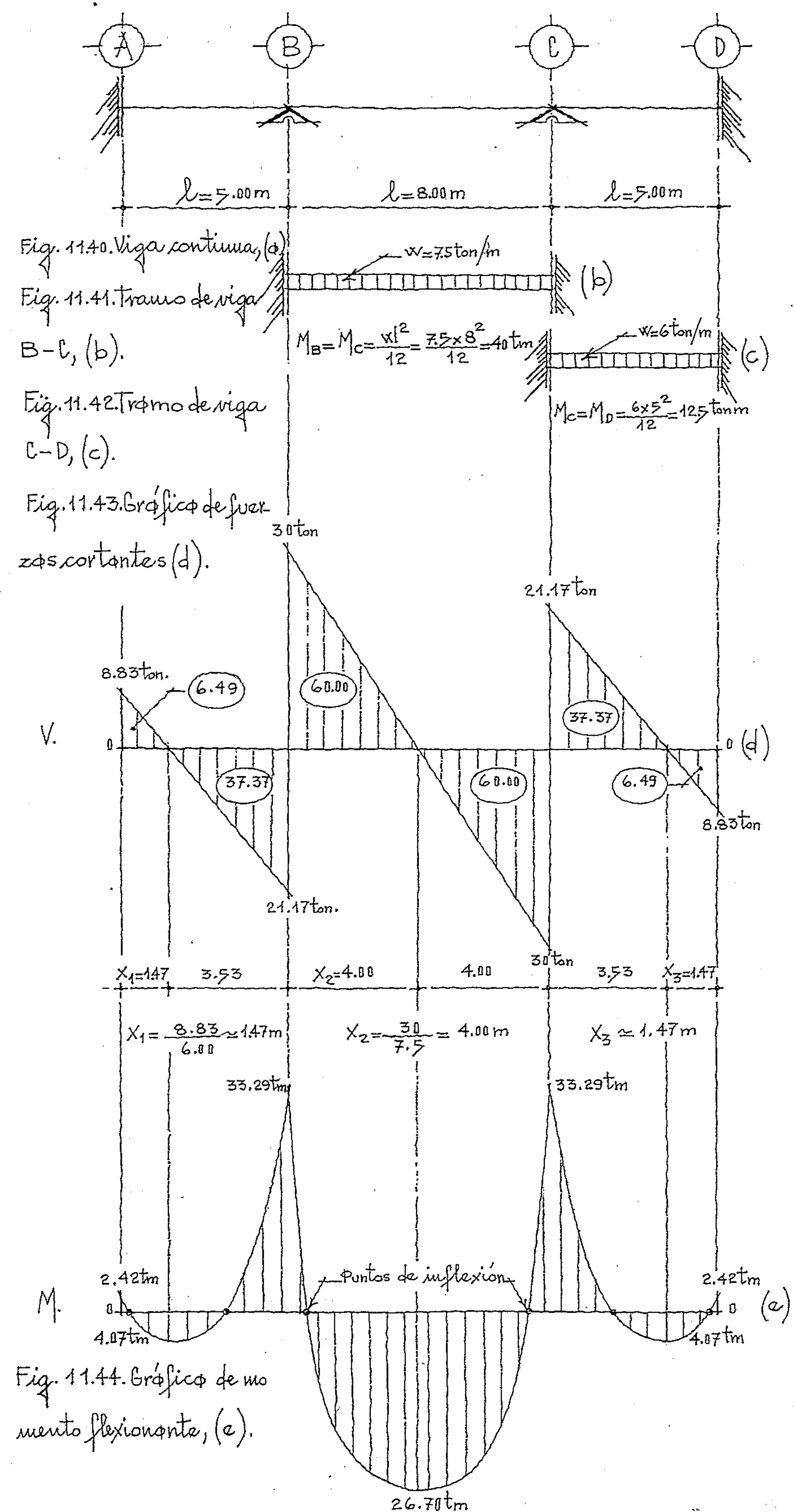


Fig. 11.40. Viga continua, (a).

Fig. 11.41. Tramo de viga B–C, (b).

Fig. 11.42. Tramo de viga C–D, (c).

Fig. 11.43. Gráfico de fuerzas cortantes (d).

Fig. 11.44. Gráfico de momento flexionante, (e).

En las figuras 11.40 a 11.44 se muestran las gráficas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

A continuación se hará el diseño de la sección de la viga continua.

Ejemplo ilustrativo (*Diseño Elástico*)

Datos:

$d=1.5b$

$f'_c=250\ Kg/cm^2$; $f_y=4200\ Kg/cm^2$

$M_{máx.}=3329000\ Kgcm$

Cálculo del momento resistente del concreto:

$M_{rc}=Rbd^2=3329000\ Kgcm$

$\therefore\ 20^{*}\times b\times1.5b\times1.5b=3329000$

y

$45\,b^3=3329000\ Kgcm$

$b=\sqrt[3]{\frac{3329000}{45}}\simeq42\ cm$

Por tanto

$d=1.5b=1.5\times42=63\ cm$

Cálculo del área de acero:

$A_s=\frac{3329000}{2100\times0.87\times63}\simeq28.93\ cm^2$

Las otras áreas de acero las obtenemos por comparación.

*El valor de 20 Kg/cm^2, lo obtenemos del cuadro de constantes que aparece al final del libro.

3329000 . . . . 28.93

2670000 X

$$X = \frac{2670000 \times 28.93}{3329000} \simeq 23.20\ cm^2$$

y

3329000 . . . . 28.93

407000 X

$$X = \frac{407000 \times 28.93}{3329000} \simeq 3.54\ cm^2$$

Cálculo del área mínima de acero:

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y}\,bd = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200}\,42 \times 63 = 6.97\ cm^2$$

En estas zonas se colocará el área de acero mínimo.

En las figuras 11.45 a 11.47, se presentan los cortes transversales de la viga en diferentes tramos:

Tramo B-A:

$A_s = 28.93\ cm^2$

Con ϕ_s #8

$$N^\circ \phi_s = \frac{28.93}{5.07} \simeq 6\phi\#8$$

Fig.11.45. Corte transversal de la viga, (a).

(a)

d=63cm

h=68cm

6ϕ_s#7

b=42 cm

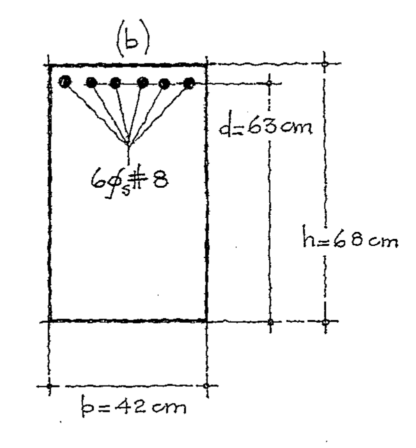
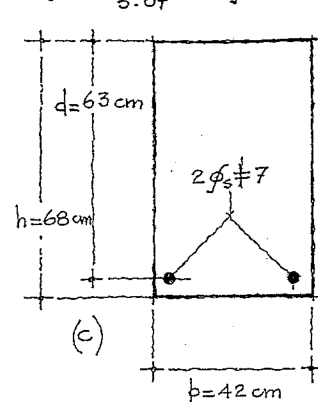


Fig.11.46. Corte transversal de la viga, (b).

Tramo B-C: Con ϕ_s #7

$$N^\circ \phi_s = \frac{23.20}{3.87} \simeq 6\phi_s\#7$$



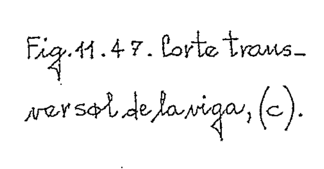


Fig.11.47. Corte transversal de la viga, (c).

Tramo A-B:

$A_{s\,mín.} = 6.97\ cm^2$

Con ϕ_s#7 $\therefore$ $N^\circ \phi_s = \frac{6.97}{3.87} \simeq 2\phi_s\#7$

En la figura 11.48 se muestra un corte longitudinal que indica la sección de la viga y armados en corte transversal, veamos:

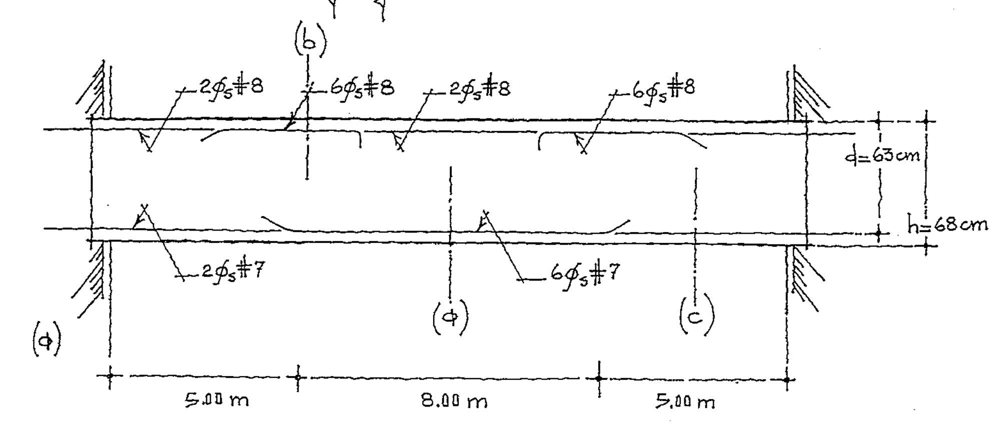


Fig.11.48. Corte longitudinal mostrando armados, (a).

Fuerza cortante, figura 11.49.

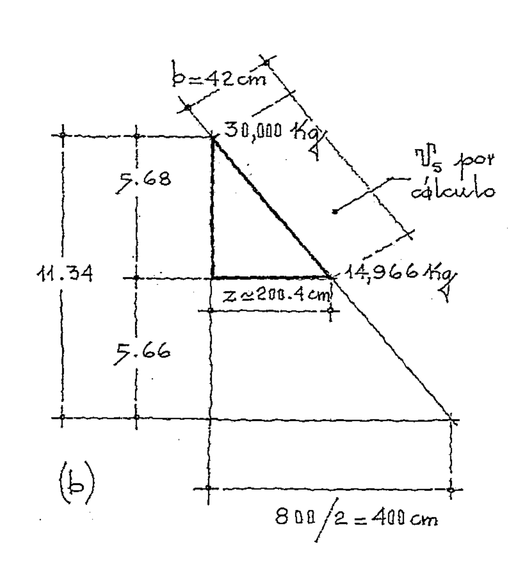


Fig.11.49. Volumen del prisma triangular excedente, (b).

$$v=\frac{V}{bd}=\frac{30\,000}{42\times 63}\simeq 11.34\ Kg/cm^2$$

Aplicando especificaciones:

Cuando $L/h>5$, se tiene

$$\frac{800\ cm}{68\ cm}\simeq 11.76>5$$

Cálculo del porcentaje del acero

$$\rho_s=\frac{A_s}{bd}=\frac{28.93}{42\times 63}=0.011>1\%$$

El concreto toma

$$V_{CR}=0.5F_R bd\sqrt{f_c^*}\quad \therefore \quad y$$

$$V_{CR}=0.5\times 0.8\times 42\times 63\sqrt{0.8\times 250}$$

$$\therefore V_{CR}\simeq 14{,}966\ Kg$$

Obtención de la distancia, z:

$$\frac{400}{z}=\frac{11.34}{5.68}\ \therefore z\simeq 200.4\ cm$$

Volumen del prisma triangular excedente

$$T=\frac{5.68\times 200.4\times 42}{2}\simeq 23{,}904\ Kg$$

El cortante excedente se tomará para el ejemplo con estribos verticales de 5/16".

$A_{s\mathrm{v}} = 0.49\ cm^2$ y como el estribo sencillo cuenta con dos barras verticales, la resistencia de cada estribo será de:

$$t_{\mathrm{v}} = 2A_{s\mathrm{v}} \times 0.40 f_y = 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \simeq 1646\ Kg$$

$$N^{\circ}\ de\ estribos = \frac{23904}{1646} \simeq 15\ \mathrm{v}^s \#2.5$$

Veamos con estribos de 3/8"

$$t_{\mathrm{v}} = 2A_{s\mathrm{v}} \times 0.40 f_y = 2 \times 0.71 \times 0.40 \times 4200 \simeq 2386\ Kg$$

$$N^{\circ}\ de\ \mathrm{v}^s = \frac{23904}{2386} \simeq 10\ \mathrm{v}^s \#3$$ (Dejamos el estribo del #3).

Separación de estribos

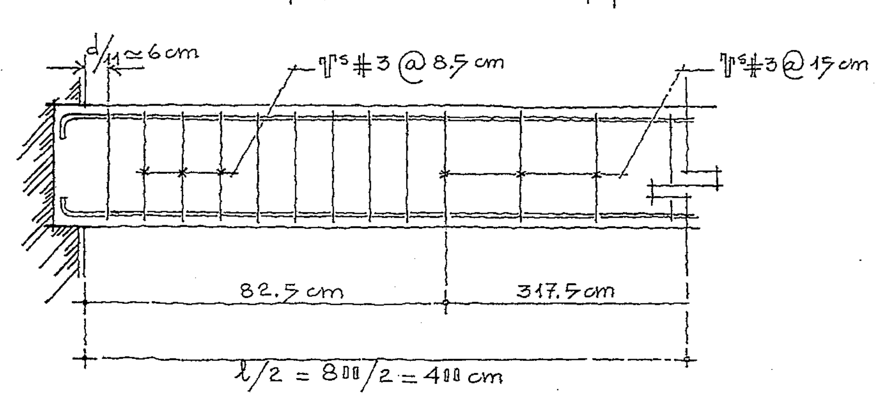
$$s_{\mathrm{v}} = \frac{0.85 \times 2 \times 0.71 \times 0.40 \times 4200 \times 63 (sen 90^{\circ} + cos 90^{\circ})}{30000 - 14966} \simeq 8.5\ cm$$

también,

$$s_{\mathrm{v}} \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.71 \times 0.40 \times 4200}{3.5 \times 42} \simeq 13.8\ cm$$

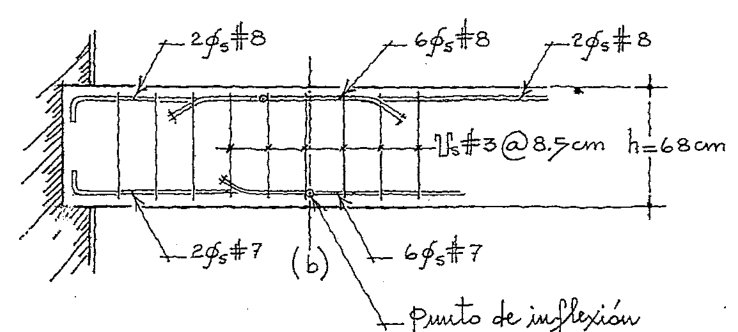
Tomamos la separación de 8.5 cm, figura 11.50.

Fig. 11.50. Corte longitudinal mostrando la separación de estribos.



En la fig. 11.51 se presenta la viga en un corte longitudinal mostrando los armados y la colocación de estribos.

Fig. 11.51. Corte longitudinal. Corte b.



Las distancias de los puntos de inflexión no fueron calculadas.

A continuación se plantea el ejemplo anterior para resolverse aplicando el diseño plástico.

Ejemplo ilustrativo (*Diseño Plástico*).

Diseñar la sección y armados de la viga presentada en el ejemplo anterior bajo los siguientes condiciones, figuras 11.52 a 11.54:

1. Diseñar la viga con el máximo porcentaje de acero.
2. Diseñar la viga con el mínimo porcentaje de acero.

Fig. 11.52. Viga continua, (a).

Fig. 11.53. Gráfico de fuerzas cortantes, (b).

Solución 1.

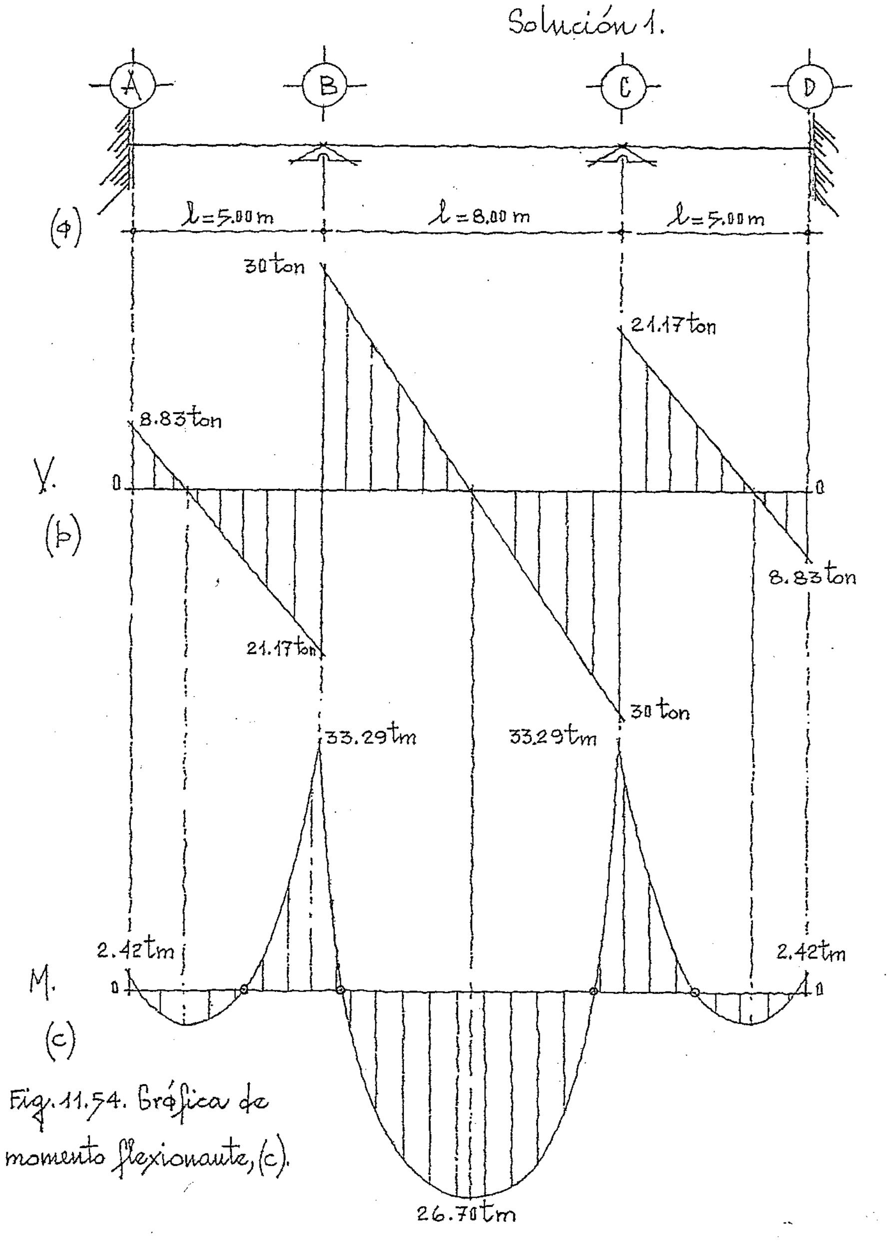


Fig. 11.54. Gráfica de momento flexionante, (c).

Datos:

$f'_c = 250\ Kg/cm^2;\ f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

$M_U = d^2 f'_c b\, y(1-0.59\, y)$ . . y

$y = \rho \dfrac{f_Y}{f'_c}$

El reglamento especifica:

"El área máxima de acero en tensión será la correspondiente a la falla balanceada; determina también, que el ancho de la viga no será menor de 20 cm".

En consecuencia

$\rho_b = \dfrac{0.85 f'_c \beta}{f_Y} \cdot \dfrac{6000}{6000+f_Y}$

$= \dfrac{0.85\times250\times0.80}{4200} \cdot \dfrac{6000}{6000+4200}$

$\therefore \rho_b = 0.04\times0.588 \simeq 0.0235$

$y = 0.0235\ \dfrac{4200}{250} \simeq 0.395$

$d^2 = \dfrac{3329000}{0.90\times0.85\times250\times20\times0.395(1-0.59\times0.395)}$

$= \dfrac{3329000}{1159} = 2872\ cm^2$

$\therefore d = \sqrt{2872} \simeq 53.60\ cm$

Cálculo del área de acero

$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad \therefore A_s = \rho bd = 0.0235 \times 20 \times 53.6 \simeq 25.20 \text{ cm}^2$

Con $\phi_s \# 8 = \frac{25.20}{5.07} \simeq 5 \phi_s \# 8$

Solución 2

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} bd = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} bd \simeq 0.0026\, bd$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd}, \quad y \quad A_s = 0.0026\, bd \quad \therefore \rho = \frac{0.0026\, bd}{bd} \simeq 0.0026$$

$$y = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.0026 \frac{4200}{250} \simeq 0.044$$

Respetando el mismo ancho, $b = 20$ cm, se obtiene

$$d^2 = \frac{3329000}{0.90 \times 0.85 \times 20 \times 250 \times 0.044 (1 - 0.59 \times 0.044)} \simeq 20300 \text{ cm}^2$$

$$d = \sqrt{20300} \simeq 142.5 \text{ cm}$$

Cálculo del área de acero

$A_s = \rho bd = 0.0026 \times 20 \times 142.5 = 7.41 \text{ cm}^2$

Con $\phi_s \# 7 = \frac{7.41}{3.87} \simeq 2 \phi_s \# 7$

Comparando los resultados obtenidos, se observa gran diferencia entre las soluciones expuestas:

1er. Ejemplo ($d = 63$ cm; $b = 42$ cm)

2o. Ejemplo

Máx. porcentaje de acero ($d = 53.6$ cm; $b = 20$ cm)

Mín. porcentaje de acero ($d = 142.5$ cm; $b = 20$ cm)*

Las áreas de acero y secciones de concreto difieren considerablemente, figs. 11.55 a 11.57.

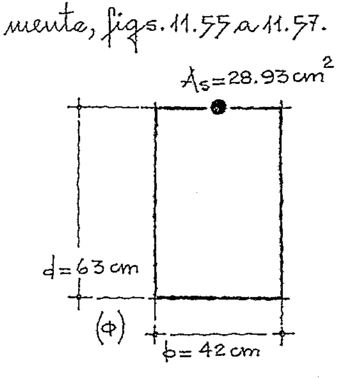


Fig. 11.55. Corte transversal mostrando sección y armados, (a).

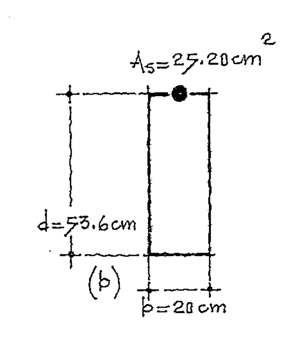


Fig. 11.56. Corte transversal mostrando sección y armados, (b).

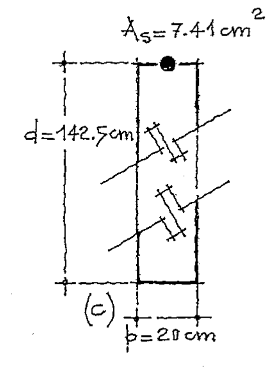


Fig. 11.57. Corte transversal mostrando sección y armados, (c).

* Recuérdese que la relación peralte-espesor, no deberá rebasar de 5 para evitar torsiones en la viga.

Referencias bibliográficas

Capítulo 11

"*Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado*," ACI 318-83, Detroit, 1983.

Harris y Wilbur, "*Análisis Elemental de Estructuras*," McGraw-Hill de México, 1977.

Gere, J.M., "*Distribución de momentos*," Cecsa, México, 1965.

Paschard, E., "*Resistencia de materiales*," Universidad Nacional Autónoma de México, 1969.

Hsieh, Y., "*Teoría Elemental de Estructuras*," Prentice-Hall Internacional, Nueva Jersey, 1973.

"*Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*," México, 1988.

12

PÓRTICOS

se puede definir como una estructura formada por vigas rectas horizontales o con cierta inclinación, unidas a columnas o elementos rectos o con inclinación."

Los pórticos pueden ser articulados, empotrados o también articulados y empotrados, según se encuentren unidos a sus bases por medio de articulaciones o unidos rígidamente.

Generalmente, en los pórticos se denominan vigas o dinteles a los elementos rectos horizontales o con cierta inclinación y columnas o pilares a los elementos rectos verticales o con cierta inclinación, figuras 12.1 a 12.5.

Fig. 12.1. Pórtico con doble empotramiento, (a).

Fig. 12.2. Pórtico de varios niveles (b).

Fig. 12.3. Pórtico con doble articulación, (c).

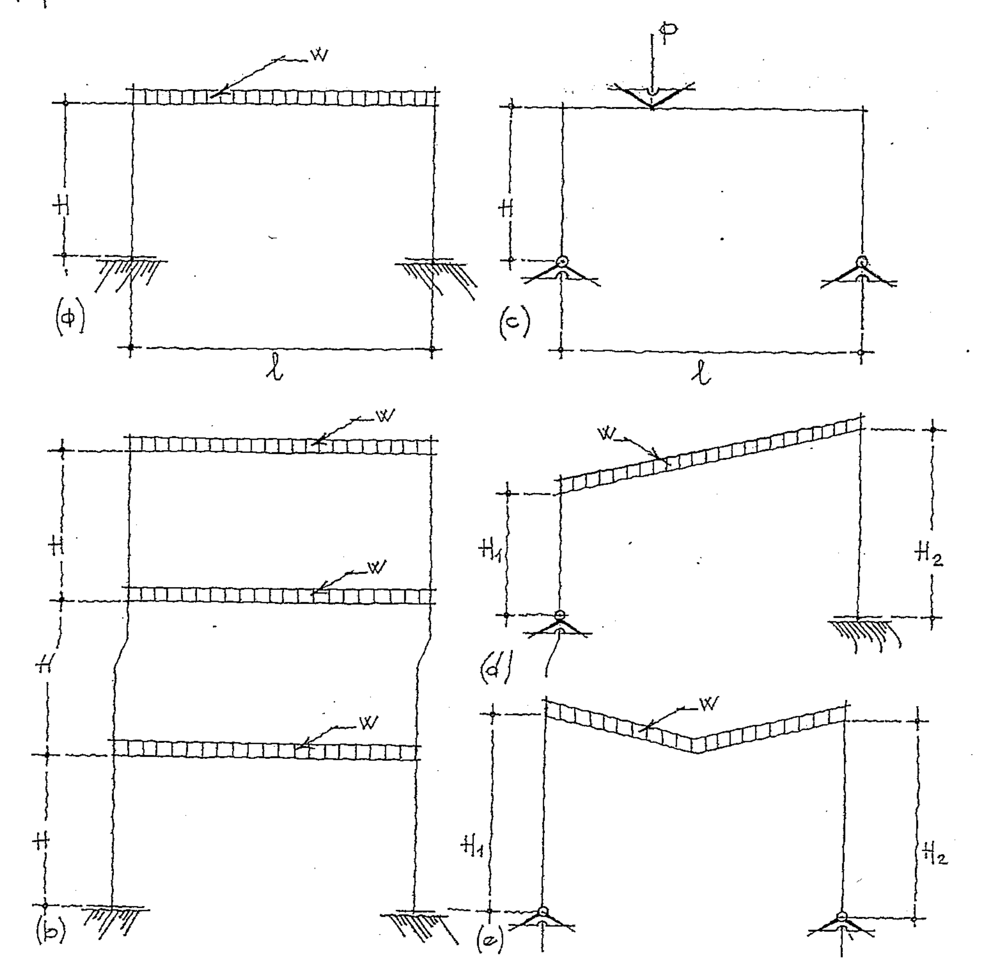


Fig. 12.4. Pórtico con una inclinación, (d). Articulado y empotrado.

Fig. 12.5. Pórtico con doble inclinación, (e).

Fig. 12.6. Pórtico con ambos postes articulados, (a).
Fig. 12.7. Al girar los postes se tiene una viga de tres tramos, (b).
Fig. 12.8. Tramo de la viga AB, (c).

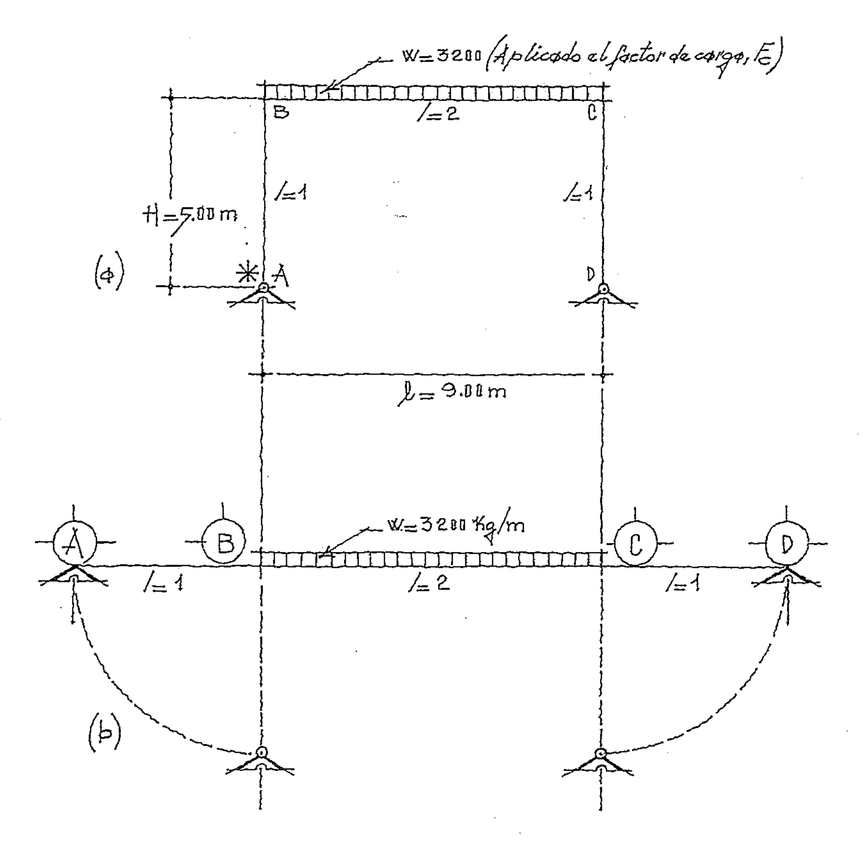
Los ejemplos que se presentan a continuación serán resueltos por medio de la distribución de momentos, método útil y sencillo en el análisis de estructuras hiperestáticas.

En los pórticos, los nudos se suponen rígidos, es decir, que son capaces de mantener los ángulos iniciales entre todas las piezas, pues aunque el nudo sufra rotación, los ángulos que en él concurren, no varían.

Ejemplo ilustrativo *(Distribución de momentos)*

Se tiene un marco con sus dos extremos articulados y sometido a una carga uniformemente repartida de 3200 Kg/m.

Diseñar el marco con los datos dados, figs. 12.6 a 12.8.



Datos:

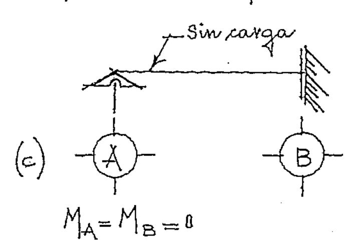
$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

Pasos a seguir para la solución del pórtico:

1. Se hace el giro a 90° de los tramos AB y CD.
2. Se obtienen las rigideces; (Téngase presente que en elementos articulados,* la rigidez se multiplica por $\frac{3}{4}$).
3. Factores de distribución.
4. Momentos de empotramiento.

$K_{AB} = \frac{I}{H} \cdot \frac{3}{4}$ $\quad K_{BC} = \frac{2}{9} \simeq 0.22$ $\quad K_{CD} = 0.15$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20} = 0.15$



$M_A = M_B = 0$

* Articulación es un elemento que en un momento dado puede girar.

(a) K: $\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}$ — $2/9$ — $\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}$; $l=5.00$ m, $l=9.00$ m, $l=5.00$ m; w = 3.2 ton/m; sin carga

Fig. 12.9. Viga de tres tramos, (a). Fig. 12.10. Tramo de viga B–C, (b).

$$M_B = M_C = \frac{wl^2}{12} = \frac{3.2\times 9^2}{12} = 21.6\,tm$$

(c) $M_C = M_D = 0$

(g)

	A	B	B	C	C	D
Factor de Distribución	1.0	0.40	0.60	0.60	0.40	1.0
Momento de Empotre	0	0	+21.6	−21.6	0	0
		−21.6			+21.6	
1a. D.		−8.64	−12.96	+12.96	+8.64	
1er. T.	−4.32		+6.48	−6.48		+4.32
	+4.32	−6.48			+6.48	−4.32
2a. D.	+4.32	−2.60	−3.88	+3.88	+2.60	−4.32
2o. T.	−1.30	+2.16	+1.94	−1.94	−2.16	+1.30
	+1.30	−4.10			+4.10	−1.30
3a. D.	+1.30	−1.64	−2.46	+2.46	+1.64	−1.30
3er. T.	−0.82	+0.65	+1.23	−1.23	−0.65	+0.82
	+0.82	−1.88			+1.88	−0.82
4a. D.	+0.82	−0.76	−1.12	+1.12	+0.76	−0.82
4o. T.	+0.38	+0.41	+0.56	−0.56	−0.41	−0.38
	−0.38	−0.97			+0.97	+0.38
5a. D.	−0.38	−0.39	−0.58	+0.58	+0.39	+0.38
ΣM	0	−10.81	+10.81	−10.81	+10.81	0
Reacciones originales	0	0	+14.40	−14.40	0	0
Modificación continuidad	−2.16	−2.16	0	0	+2.16	+2.16
Reacciones Finales	−2.16	−2.16	+14.40	−14.40	+2.16	+2.16

Figs. 12.12 a 12.15. Tramos de viga y cuadro.

Obtención de los factores de distribución, F.D.:

Nudo A

F.D. = 1.0

Nudo B

$$F.D._{BA} = \frac{0.15}{0.15+0.22} = 0.40$$

$$F.D._{BC} = \frac{0.22}{0.22+0.15} = 0.60$$

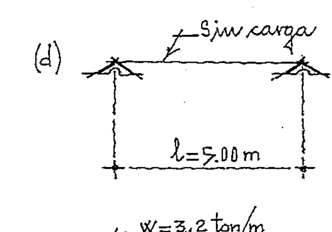
Nudo C

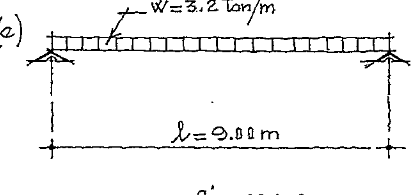
$$F.D._{CB} = \frac{0.22}{0.37} = 0.60$$

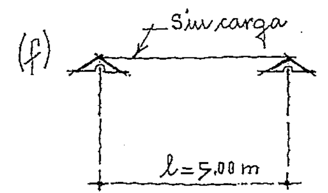
$$F.D._{CD} = \frac{0.15}{0.37} = 0.40$$

Momentos de empotramiento, figs. 12.9 a 12.11.

Reacciones originales y cuadro de distribución, figs. 12.12 a 12.15.







En las figs. 12.16 a 12.19 se muestran los gráficos del pórtico.

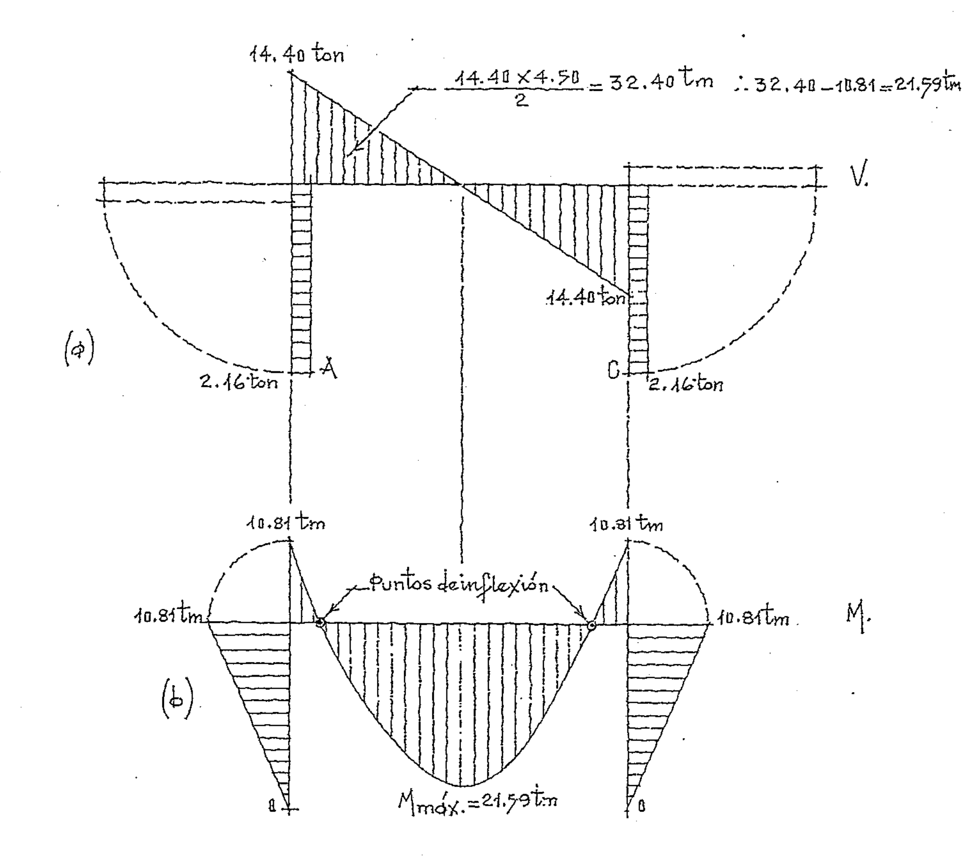


Fig. 12.16. Gráfica de esfuerzo cortante, (a).

Fig. 12.17. Gráfico de momento flexionante, (b).

Obtención del punto de inflexión

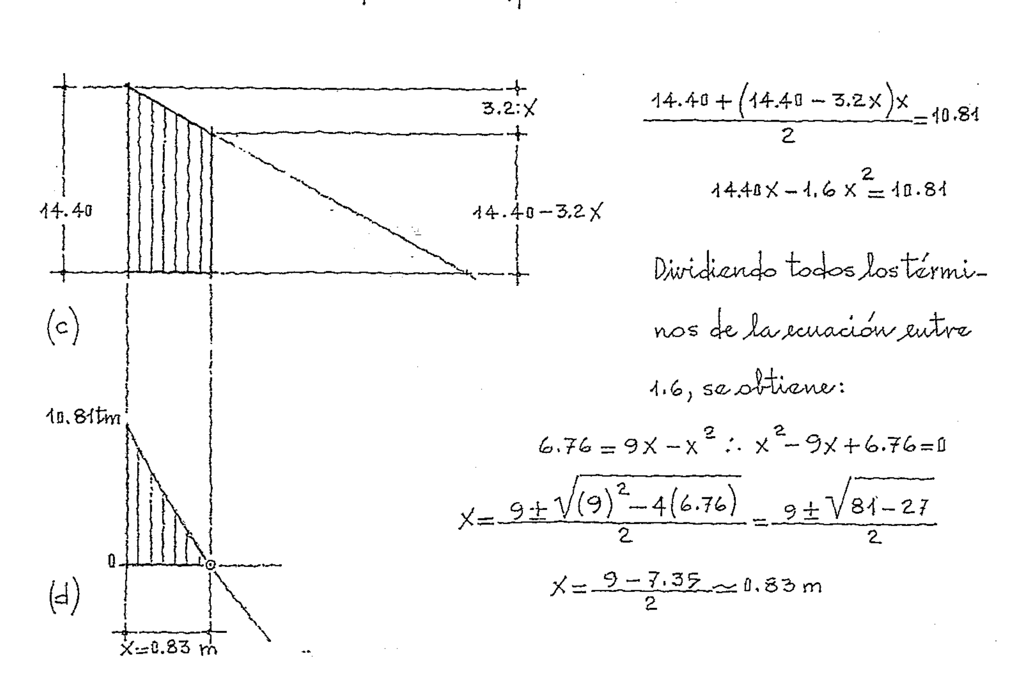


Fig. 12.18. Volumen del trapecio para obtener la distancia (x), (c).

Fig. 12.19. Localización del punto de inflexión, (d).

$$\frac{14.40 + (14.40 - 3.2X)X}{2} = 10.81$$

$$14.40X - 1.6X^2 = 10.81$$

Dividiendo todos los términos de la ecuación entre 1.6, se obtiene:

$$6.76 = 9X - X^2 \therefore X^2 - 9X + 6.76 = 0$$

$$X = \frac{9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4(6.76)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 27}}{2}$$

$$X = \frac{9 - 7.35}{2} \simeq 0.83 \text{ m}$$

Datos para diseñar el pórtico:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

$b = ?$; $d = ? = 2b$

Desde el inicio del ejemplo se supuso una relación entre los momentos de inercia (I) de la viga y los postes de : $2 \simeq 1$; dicha relación será necesario respetar para no tener que rehacer los cálculos, veamos:

$$\frac{I_v}{I_p} \simeq \frac{2}{1} = 2$$

Suponiendo que el ancho de la viga y el de los postes son iguales, se tiene

$$\frac{I_v}{I_p} = \frac{bh^3/12}{bh^3/12} = \frac{(h_v)^3}{(h_p)^3} = 2$$

$$\therefore (h_p)^3 = \frac{(h_v)^3}{2} \quad y$$

$$M_{máx.} = R b d^2 \quad y \text{ como } d = 2b$$

$$M_{máx.} = R \cdot b \cdot 2b \cdot 2b = R\,4\,b^3$$

Dando valores

$$b = \sqrt[3]{\frac{2159000}{15 \times 4}} = \sqrt{35984} \simeq 33\ cm$$

y como $d = 2b \therefore d = 2 \times 33 = 66\ cm$ y $h = d + r = 70\ cm$

El otro lado del poste valdrá:

$$(h_p)^3 = \frac{(h_v)^3}{2} = \frac{(70)^3}{2} = 171500\ cm^3$$

$$\therefore h_p = \sqrt[3]{171500} \simeq 55.6\ cm$$

Cálculo de las áreas de acero

Viga:

$$A_s = \frac{M_{máx.}}{f_s\, j\, d} = \frac{2159000}{2100 \times 0.87 \times 66} = 17.90\ cm^2$$

Utilizando varillas de 3/4"

$$\text{No. de } \phi_s = \frac{17.90}{2.87} \simeq 6\phi_s \#6$$

Para los otros momentos

$$A_s = \frac{1081000}{2100 \times 0.87 \times 66} = 8.96\ cm^2$$

$$\text{Con } \phi_s \#6 = \frac{8.96}{2.87} \simeq 3\phi_s \#6$$

Postes:

El área de acero en los postes será la misma que la obtenida para el momento negativo de la viga (zona del nudo).

Revisión a cortante, fig. 12.20.

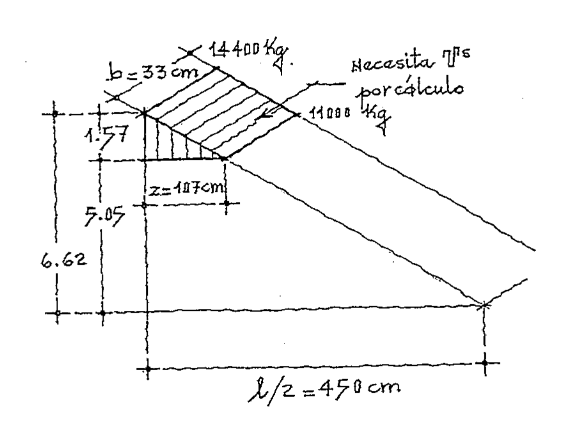


Fig. 12.20. Volumen del prisma triangular excedente.

$$v = \frac{V}{bd} = \frac{14400}{33 \times 66} \simeq 6.62\ Kg/cm^2$$

El concreto toma

$$V_{CR} = 0.5 F_R bd \sqrt{f_c^*} \quad .\ .\ y$$

$$V_{CR} = 0.5 \times 0.8 \times 33 \times 66 \sqrt{160}$$

$$V_{CR} \simeq 11000\ Kg$$

Por comparación de triángulos obtenemos la distancia "z":

$$\frac{450}{z} = \frac{6.62}{1.57} \therefore z \simeq 107\ cm$$

Volumen del prisma triangular excedente

$$T = \frac{1.57 \times 33 \times 107}{2} \simeq 2772\ Kg$$

Como el valor del cortante excedente es pequeño, se utilizarán estribos verticales del #2 (1/4")

$$t_{E} = 2A_{sv} f_s = 2 \times 0.32 \times 1265^* \simeq 809\ Kg$$

$$\therefore\ No.\ de\ E's = \frac{T}{t_E} = \frac{2772}{809} \simeq 4\ E's \#2$$

Separación de estribos (Viga)

$$s_E \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.32 \times 66 \times 1265 (sen 90° + cos 90°)}{14400 - 11000} \simeq 14\ cm$$

y también

$$s_E \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.32 \times 1265}{3.5 \times 33} \simeq 6\ cm$$

Se tomará la separación de 6 cm. Para una separación mayor bastará con aumentar el diámetro del estribo.

*Para el alambrón de 1/4", se recomienda utilizar acero grado estructural con resistencia, $f_s = 1265\ Kg/cm^2$.

pórtico.

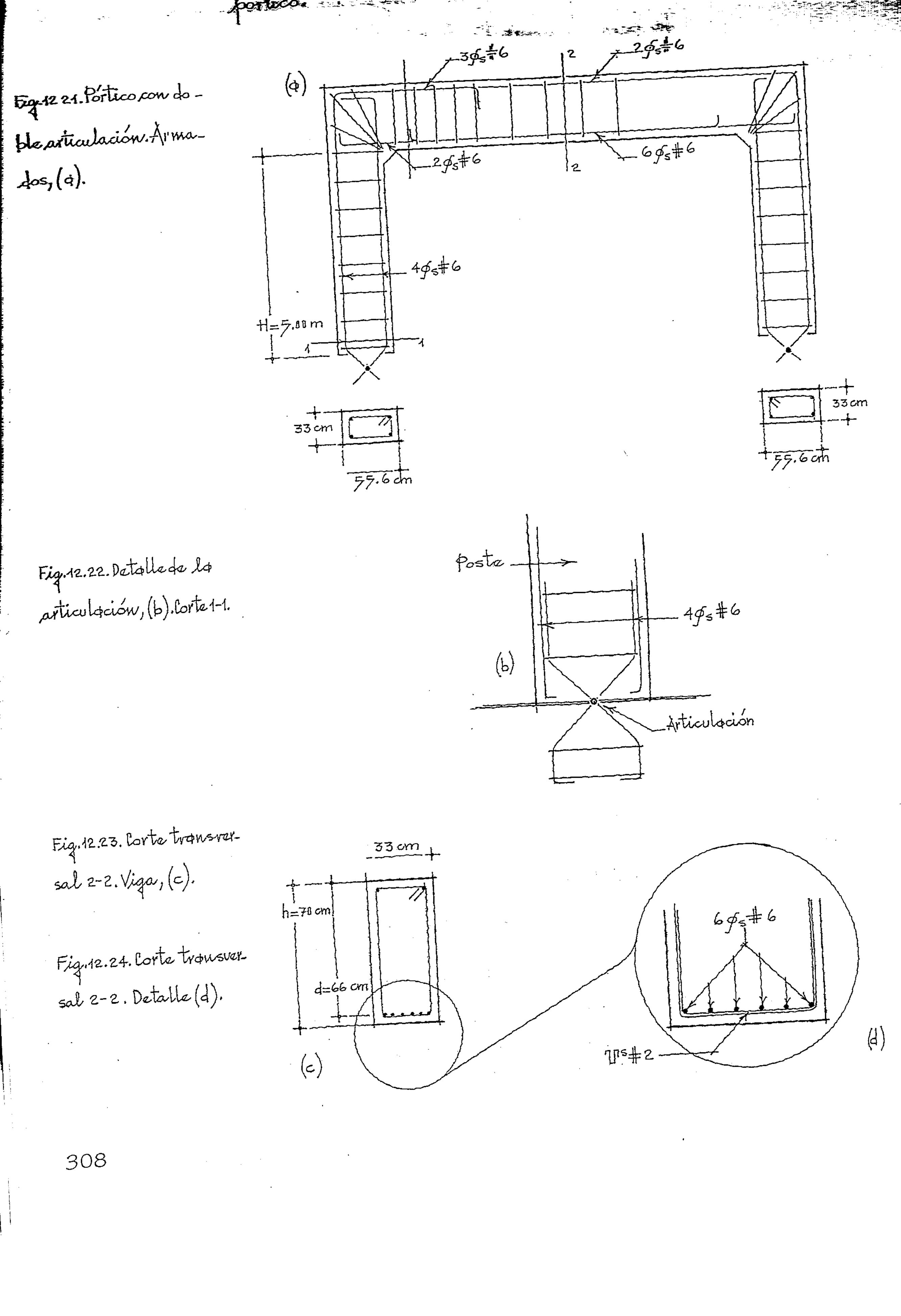


Fig. 12.21. Pórtico con doble articulación. Armados, (a).

Fig. 12.22. Detalle de la articulación, (b). Corte 1-1.

Fig. 12.23. Corte transversal 2-2. Viga, (c).

Fig. 12.24. Corte transversal 2-2. Detalle (d).

les mostrando armados del pórtico

Fig. 12.25. Corte longitudinal 2-2, (a). Viga.

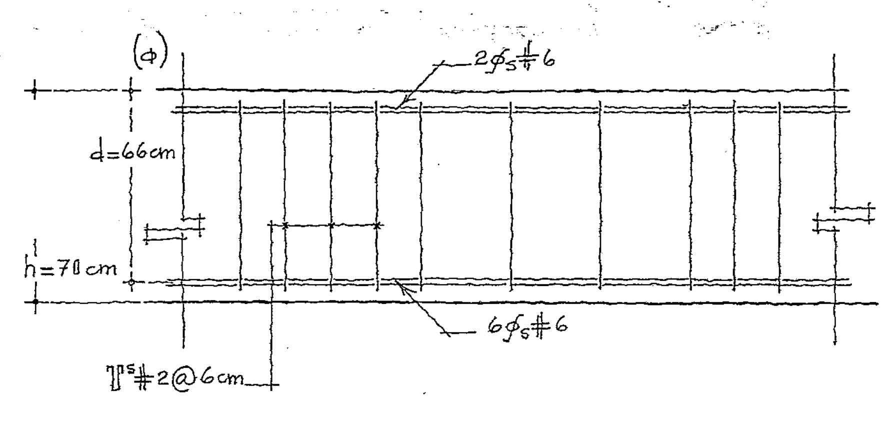
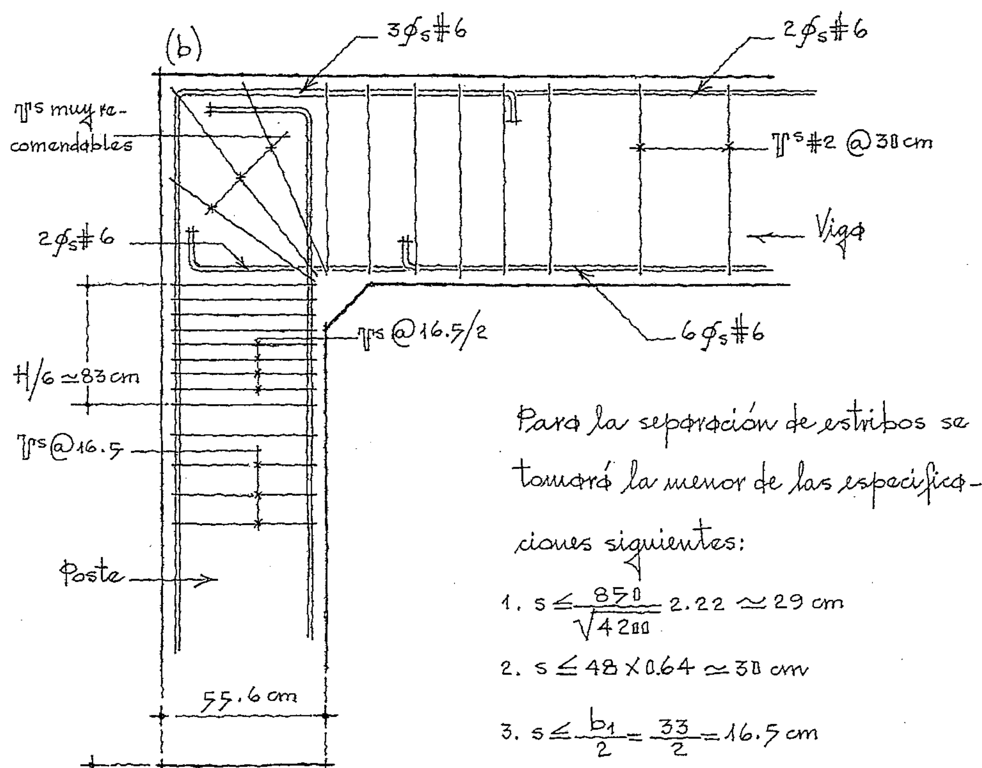


Fig. 12.26. Corte del pórtico. Nudo B, (b).



Para la separación de estribos se tomará la menor de las especificaciones siguientes:

1. $s \leq \frac{850}{\sqrt{4200}} 2.22 \simeq 29$ cm

2. $s \leq 48 \times 0.64 \simeq 30$ cm

3. $s \leq \frac{b_1}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$ cm

La distancia de 16.5 cm será la separación en la parte central de la longitud del fuste.

La distancia se reducirá a la mitad en una longitud arriba y abajo que no será menor de:

a) La dimensión máxima transversal, (55.6 cm).

b) Longitud libre de la columna entre seis, H/6.

c) 60 cm.

Ejemplo ilustrativo

Se tiene un pórtico con ambos extremos empotrados y sometido a una carga uniformemente repartida y otra concentrada; véanse las figuras 12.27 a 12.29.

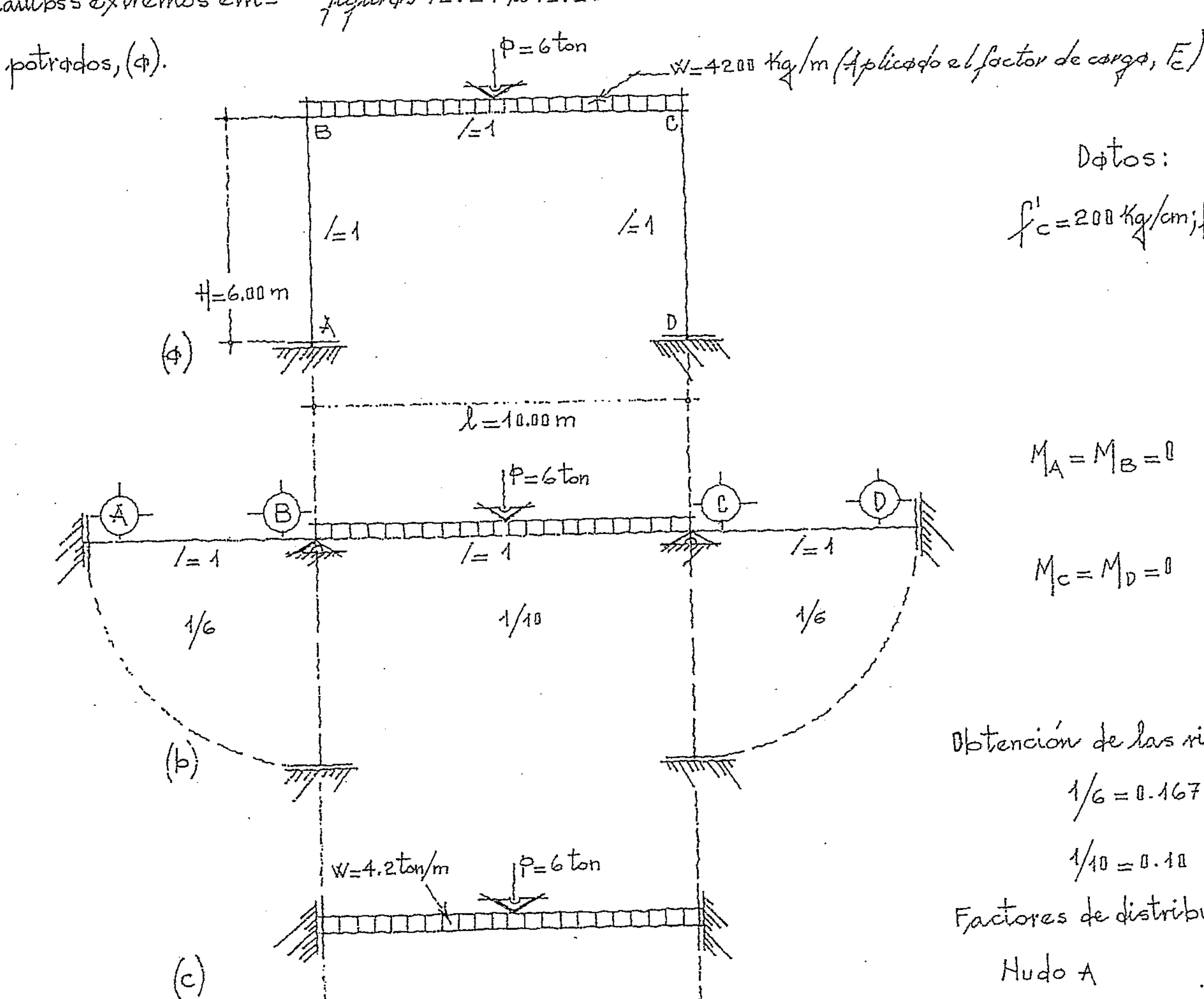


Fig. 12.27. Pórtico con ambos extremos empotrados, (a).

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm; $f_y = 4200$ Kg/c

$M_A = M_B = 0$

$M_C = M_D = 0$

Obtención de las rigideces:

$1/6 = 0.167$

$1/10 = 0.10$

Factores de distribución, F.D.

Nudo A

F.D. = 0

Nudo B

$F.D._{BA} = \frac{0.167}{0.167+0.10} \simeq 0.63$

$F.D._{BC} = \frac{0.10}{0.10+0.167} \simeq 0.37$

Nudo C

$F.D._{CB} = 0.37$

$F.D._{CD} = 0.63$

Nudo D ; F.D. = 0

Momentos de empotramiento

$$M_B = M_C = \frac{wl^2}{12} + \frac{Pl}{8}$$

$$= \frac{4.2 \times 10^2}{12} + \frac{6 \times 10}{8} = 35 + 7.5$$

$$\therefore M_B = M_C = 42.5 \text{ tm}$$

Fig. 12.28. Al girar los postes se tiene una viga de tres tramos, (b).

Fig. 12.29. Tramo de la viga BC, (c).

En las figs. 12.30,a – 12.33, se presentan las gráficas finales de cortantes y de momentos flexionantes.

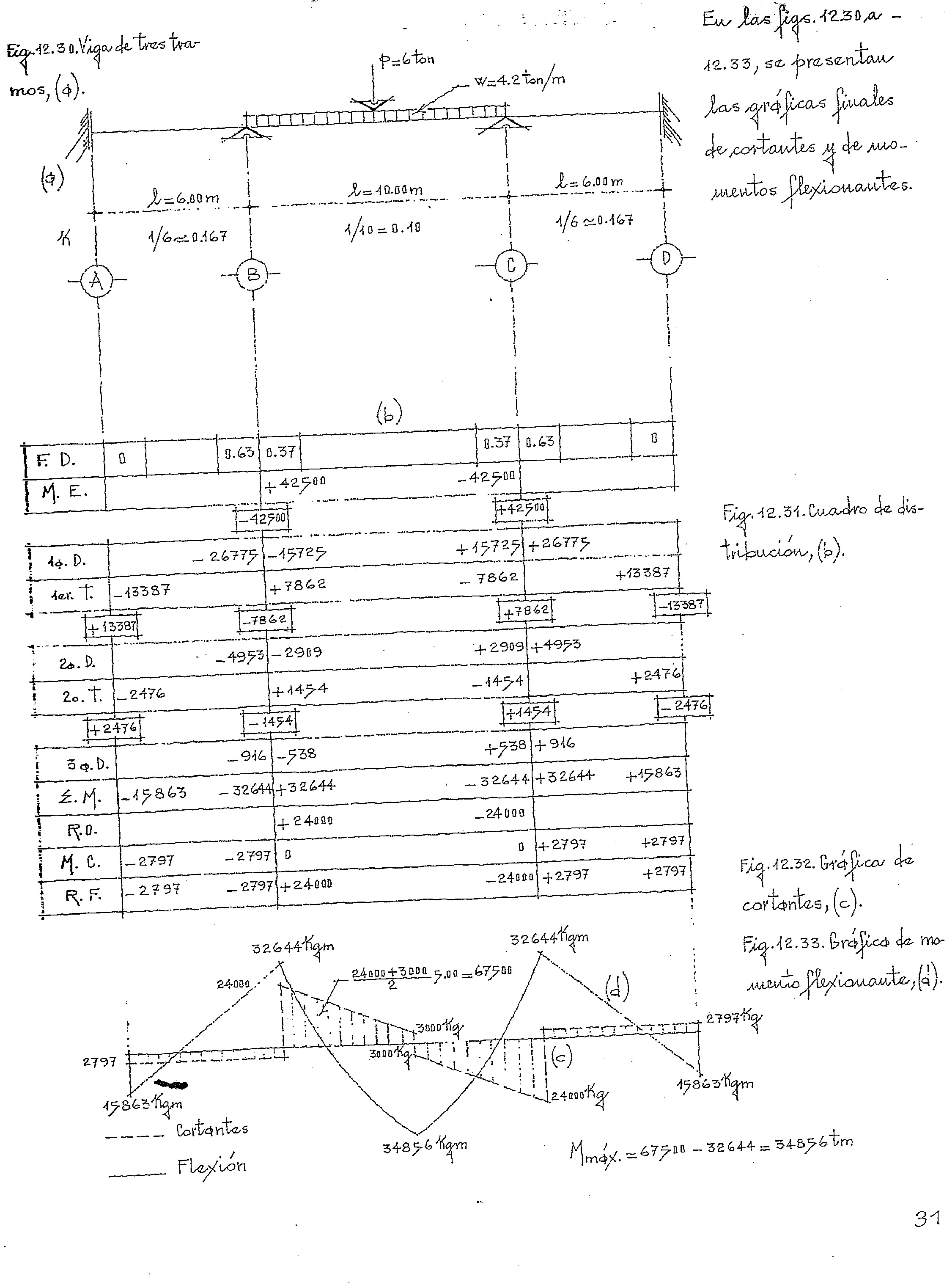


Fig. 12.30. Viga de tres tramos, (a).

	A	B	B	C	C	D
F. D.	0	0.63	0.37	0.37	0.63	0
M. E.			+42500	-42500		
			-42500	+42500		
1a. D.		-26775	-15725	+15725	+26775	
1er. T.	-13387		+7862	-7862		+13387
	+13387		-7862	+7862		-13387
2a. D.		-4953	-2909	+2909	+4953	
2o. T.	-2476		+1454	-1454		+2476
	+2476		-1454	+1454		-2476
3a. D.		-916	-538	+538	+916	
Σ. M.	-15863	-32644	+32644	-32644	+32644	+15863
R.O.			+24000	-24000		
M. C.	-2797	-2797	0	0	+2797	+2797
R. F.	-2797	-2797	+24000	-24000	+2797	+2797

Fig. 12.31. Cuadro de distribución, (b).

Fig. 12.32. Gráfica de cortantes, (c).

Fig. 12.33. Gráfica de momento flexionante, (d).

En las figs. 12.34 a 12.37, se muestran las gráficas, deformaciones y armados del pórtico.

Fig. 12.34. Gráfica de esfuerzos cortantes, (a).

Fig. 12.35. Gráfica de momentos flexionantes, (b).

Fig. 12.36. Esquema de deformaciones, (c).

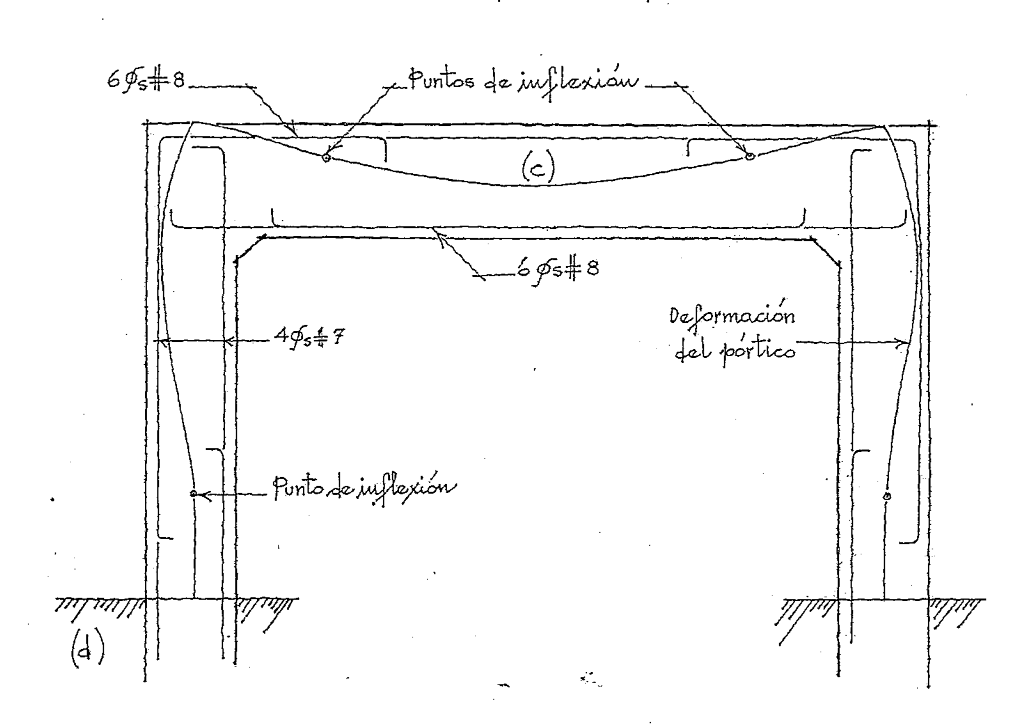


Fig. 12.37. Esquema de armados, (d).

Datos para diseñar el pórtico

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

$b = ?$; $d = ?$

$\frac{/v}{/p} = 1$ y, como $d = b$, se tiene:

$$M_{máx.} = R\, b d^2 = R \cdot b \cdot b \cdot b = R b^3$$

$$\therefore\ b = \sqrt[3]{\frac{M_{máx.}}{R}} = \sqrt{\frac{3485600}{15}} \simeq \sqrt{232370}$$

$b \simeq 61.5$ cm $\therefore d = 61.5$ cm

y, $h = d + r = 61.5 + 4.5 = 66$ cm

Cálculo de las áreas de acero

Viga:

$$A_s(viga) = \frac{M_{máx.}}{f_s\, j\, d} = \frac{3485600}{2100 \times 0.87 \times 61.5} = 31\ cm^2$$

$$\text{Con } \phi_s \# 8 = \frac{31}{5.07} \simeq 6 \phi_s \# 8$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{bd} = \frac{31\ cm^2}{61.5 \times 61.5} = \frac{31}{3782} \simeq 0.008 < 1\%$$

Para los otros momentos

$$A_s(viga)\ y\ (poste) = \frac{3264400}{112360} \simeq 29\ cm^2$$

$$\text{Con } \phi_s \# 8 \simeq 6 \phi_s \# 8$$

Postes:

$$A_s(poste) = \frac{1586300}{112360} \simeq 14.12\ cm^2$$

$$\text{Con } \phi_s \# 7 = \frac{14.12}{3.87} \simeq 4 \phi_s \# 7$$

Revisión a fuerza cortante, fig. 12.38

$$v = \frac{V}{bd} = \frac{24000}{61.5 \times 61.5} \simeq 6.35\ Kg/cm^2$$

El concreto toma

$$V_{CR} = F_R\, bd\,(0.2 + 30 \rho_s)\sqrt{f_c^*}$$

$$= 0.8 \times 61.5 \times 61.5\,(0.2 + 30 \times 0.008)\sqrt{160}$$

$\therefore V_{CR} \simeq 16840$ Kg.

Por comparación:

$$\frac{500}{z} = \frac{5.56}{1.90}\ \therefore z \simeq 171\ cm$$

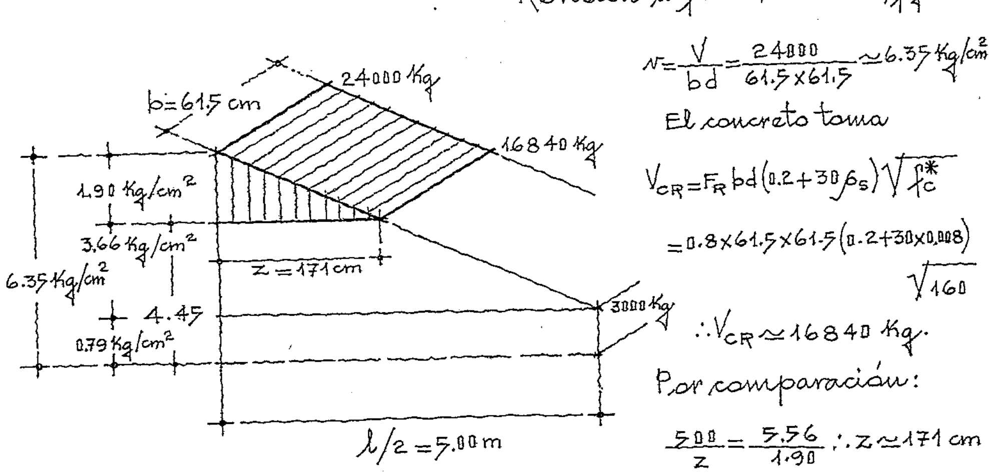


Fig. 12.38. Volumen del prisma triangular excedente.

Volumen del prisma triangular excedente

$$T = \frac{1.90 \times 61.5 \times 171}{2} \simeq 9990 \text{ Kg}$$

Con estribos verticales del # 2.5

$$t_{\Pi} = 2A_{sv} \cdot 0.40 f_y = 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \simeq 1646 \text{ Kg}$$

$$\text{N° de } \Pi^s = \frac{T}{t_{\Pi}} = \frac{9990}{1646} \simeq 6 \Pi^s \# 2.5$$

Separación de estribos en la viga

$$s_{\Pi} \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 61.5 \times 0.40 \times 4200 \,(\text{sen } 90° + \cos 90°)}{24000 - 16840}$$

$$\therefore s_{\Pi} \simeq 12 \text{ cm}$$

y también

$$s_{\Pi} \leq \frac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200}{3.5 \times 61.5} \simeq 7 \text{ cm}$$

Se dejará la separación de 7 cm

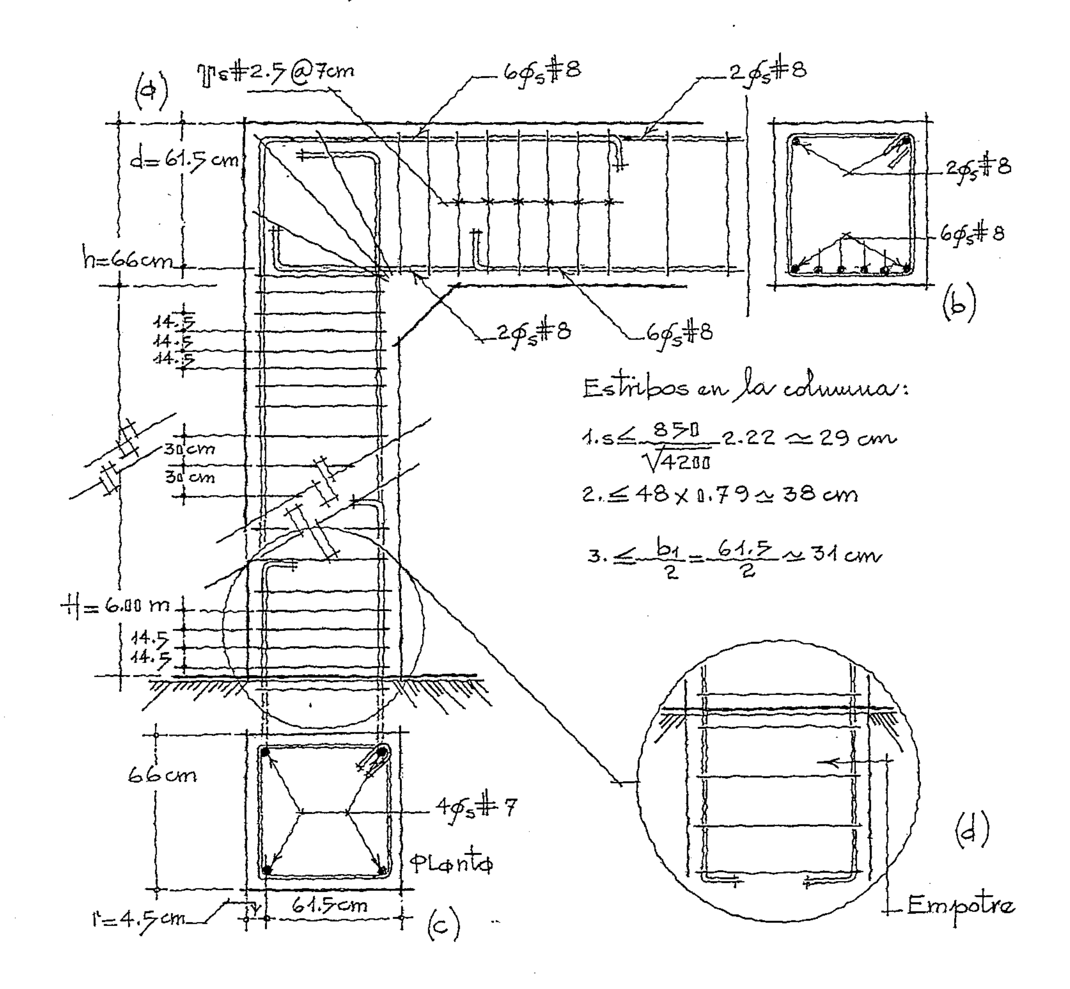
En las figs. 12.39 a 12.42, se muestran los armados del pórtico.

Fig. 12.39. Corte del pórtico, Nudo B, (a)

Fig. 12.40. Corte transversal, (b).

Fig. 12.41. Corte transversal del poste, (c).

Fig. 12.42. Detalle del empotramiento del poste, (d).



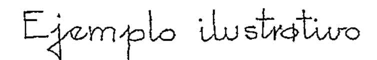


Fig. 12.43. Pórtico asimétrico, (a).

Fig. 12.44. Cuadro de distribución, (b).

Se tiene un pórtico asimétrico sometido a una carga lateral de 2 ton/m. En un lado se encuentra articulado y empotrado en el otro extremo; véanse las figs. 12.43 a 12.45.

P = 18 ton; Sin carga; B; C; I = 1.6; I = 2; I = 2; I = 2; I = 1.6; H = 4.00 m; D; H = 6.00 m; w = 2 ton/m; A

(a)

Datos:

$f'_c = 250\ Kg/cm^2$; $f_y = 4200\ Kg/cm^2$

	$l = 6.00\ m$		2.00 m + 3.00 m		$l = 4.00\ m$	
K	$\frac{I}{l} \times \frac{3}{4} = \frac{1.6}{6}\ 0.75 \simeq 0.2$		$\frac{2}{5} = 0.4$		$\frac{2}{4} = 0.5$	
F. D.	1.0	0.34	0.66	0.44	0.56	0
M. E.	+9	−9	+12.96	−8.64	0	0
	−9		−3.96		+8.64	
1a. D.	−9	−1.34	−2.62	+3.80	+4.84	
1er. T.	−0.67	−4.50	+1.90	−1.31		+2.42
	+0.67		+2.60		+1.31	−2.42
2a. D.	+0.67	+0.88	+1.72	+0.58	+0.73	
2o. T.	+0.44	+0.34	+0.29	+0.86		+0.36
	−0.44		−0.63		−0.86	−0.36
3a. D.	−0.44	−0.22	−0.41	−0.38	−0.48	
ΣM	0	−13.84	+13.84	−5.09	+5.09	+2.78
R. O.	+6	−6	+10.8	−7.2	0	0
M. C.	−2.30	−2.30	+1.75	+1.75	+1.96	+1.96
R. F.	+3.70	−8.30	+12.55	−5.45	+1.96	+1.96

(b)

Fig. 12.45. Tramo de viga, (c).

Factores de distribución:

Nudo A

F.D. = 1.0

Nudo B

$$F.D._{BA} = \frac{0.20}{0.20 + 0.40} \simeq 0.34$$

$$F.D._{BC} = \frac{0.40}{0.40 + 0.20} \simeq 0.66$$

Nudo C

$$F.D._{CB} = \frac{0.40}{0.40 + 0.50} \simeq 0.44$$

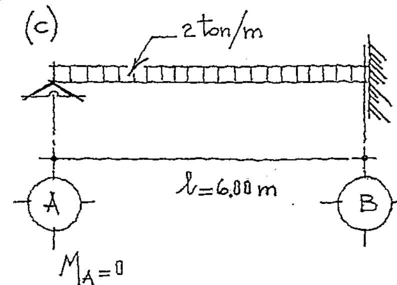
$$F.D._{CD} = \frac{0.50}{0.50 + 0.40} \simeq 0.56$$

Nudo D

F.D. = 0

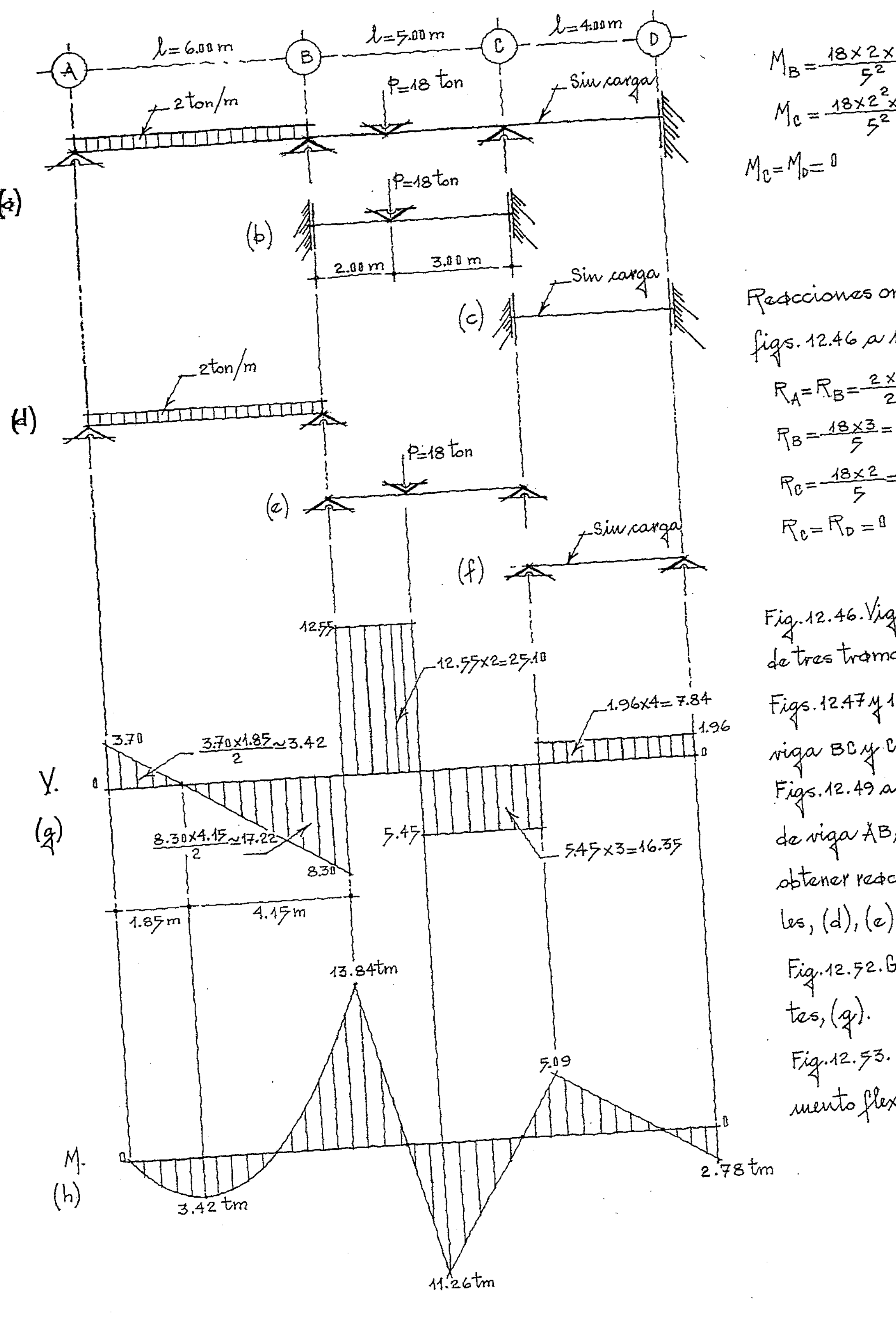
Momentos de empotramiento

(c)



$M_A = 0$

$$M_B = \frac{2 \times 6^2}{8} = \frac{72}{8} = 9\ tm$$



$$M_B = \frac{18 \times 2 \times 3^2}{5^2} = 12.96$$

$$M_C = \frac{18 \times 2^2 \times 3}{5^2} = 8.64$$

$$M_C = M_D = 0$$

Reacciones originales, figs. 12.46 a 12.53.

$$R_A = R_B = \frac{2 \times 6}{2} = 6 \text{ ton}$$

$$R_B = \frac{18 \times 3}{5} = 10.80 \text{ ton}$$

$$R_C = \frac{18 \times 2}{5} = 7.20 \text{ ton}$$

$$R_C = R_D = 0$$

Fig. 12.46. Viga asimétrica de tres tramos, (a).

Figs. 12.47 y 12.48. Tramos de viga BC y CD, (b) y (c).

Figs. 12.49 a 12.51. Tramos de viga AB, BC y CD, para obtener reacciones originales, (d), (e) y (f).

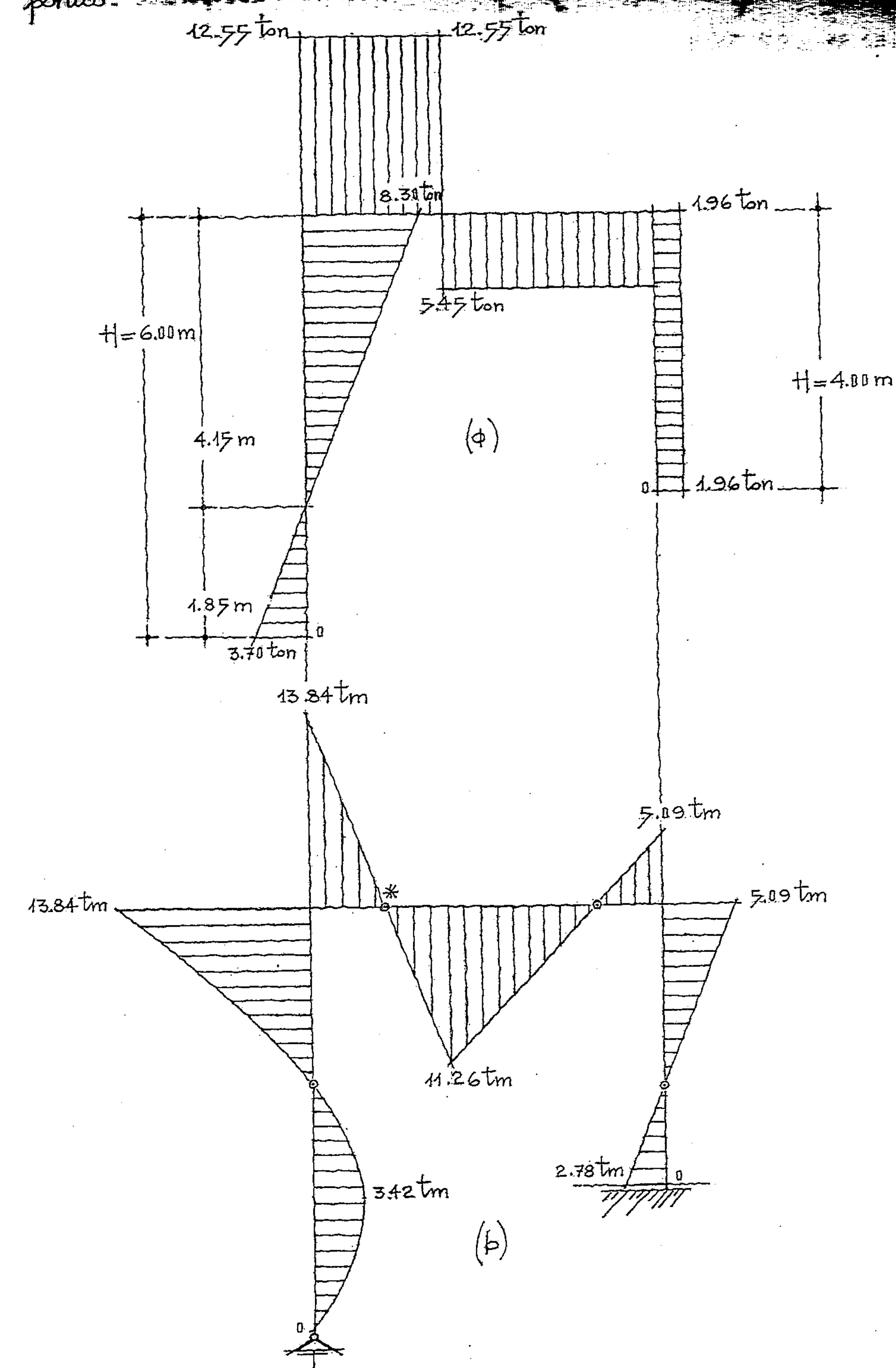
Fig. 12.52. Gráfico de cortantes, (g).

Fig. 12.53. Gráfico de momento flexionante, (h).

pórtico.

Fig. 12.54. Gráfico de esfuerzos cortantes, (a).

Fig. 12.55. Gráfico de momentos flexionantes, (b).



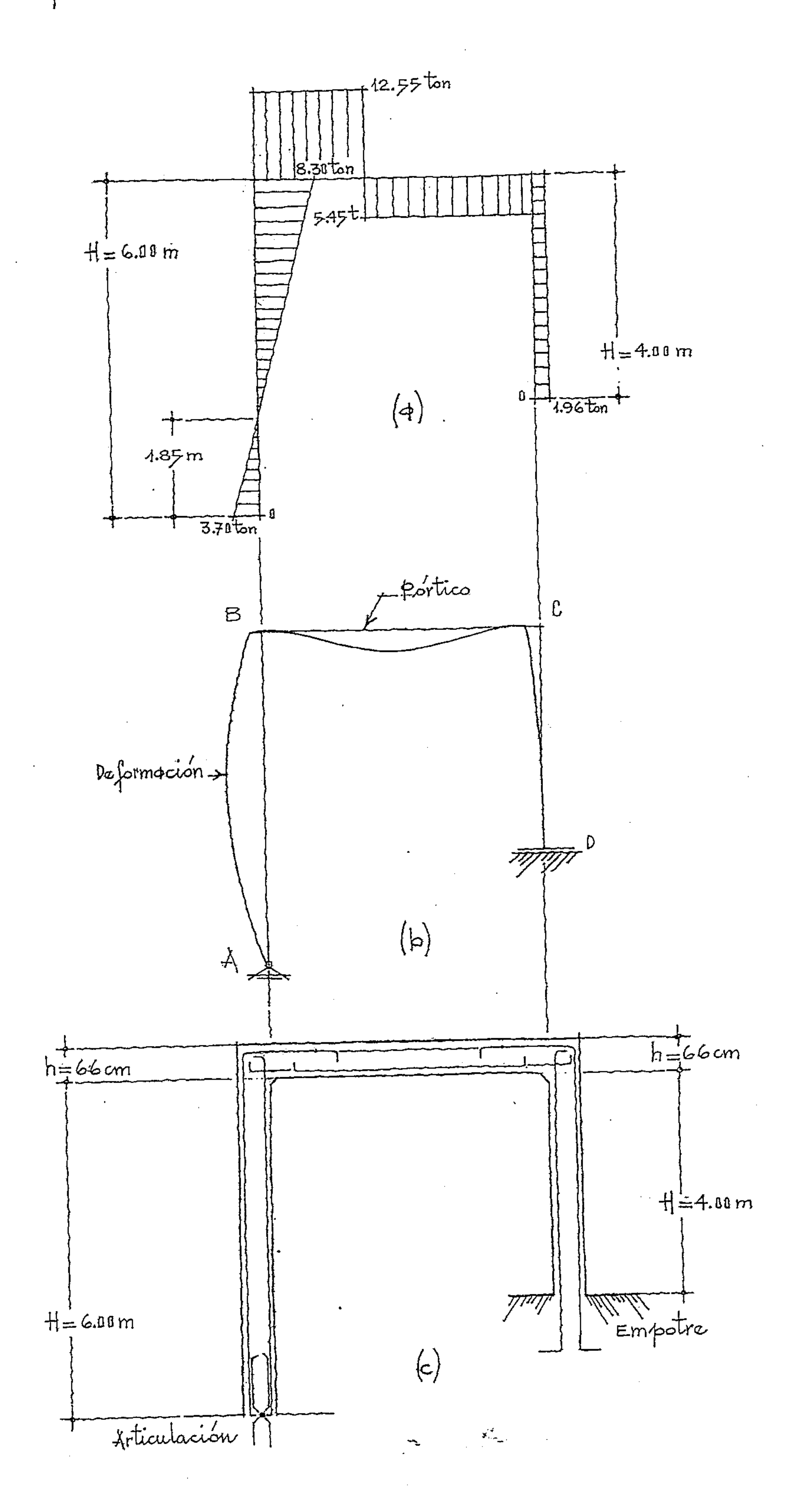
*Como la localización de los puntos de inflexión no requieren de una exactitud matemática, se puede obtener la distancia gráficamete, trabajando a escala los diagramas.

En los figuras 12.56 a 12.58, se presentan las deformaciones y esquema de armados del pórtico.

Fig. 12.56. Gráfico de esfuerzos cortantes, (a).

Fig. 12.57. Deformación del pórtico, (b).

Fig. 12.58. Esquema de armados, (c).



Ejemplo ilustrativo

Se tiene un pórtico doblemente empotrado y columnas iguales sometido a una carga de 8 ton; véanse las figs. 12.59 a 12.62.

Fig. 12.59. Pórtico empotrado sometido al empuje de una carga horizontal, (a).

Factores de distribución:

Nudo A

$F.D._{AB}=0$

Nudo B

$F.D._{BA}=\frac{0.25}{0.25+0.33}\simeq 0.43$

$F.D._{BC}=\frac{0.33}{0.33+0.25}\simeq 0.57$

Nudo C

$F.D._{CB}=\frac{0.33}{0.33+0.25}\simeq 0.57$

$F.D._{CD}=\frac{0.25}{0.25+0.33}\simeq 0.43$

Nudo D

$F.D._{DC}=0$

Figs. 12.60, 12.61 y 12.62 (b), (c) y (d) respectivamente, muestran los cuadros de distribución.

(b)

	B	C
Σ.M.	−693	−693
2a. D.	+162	+162
	+285	+285
1er. T.	−285	−285
1a. D.	−570	−570
	−1.000	−1.000
M.E.	0	0
F.D.	0.57	0.57

(c)

	Extremo B	Extremo A
F.D.	0.43	0
M.E.	+1000*	+1000
	−1000	−1000
1a. D.	−430	0
1er. T.	0	−215
	+285	+215
2a. D.	+123	0
Σ.M.	+693	+787

(d)

	Extremo C	Extremo D
F.D.	0.43	0
M.E.	+1000	+1000
	−1000	−1000
1a. D.	−430	0
1er. T.	0	−215
	+285	+215
2a. D.	+123	0
Σ.M.	+693	+787

* Cuando se tiene actuando en el eje de la viga una fuerza horizontal, se acostumbra dar al momento un valor cualquiera (por facilidad le damos 1000 Kgm).

Cálculo de la fuerza horizontal originada por los momentos, fig. 12.63.

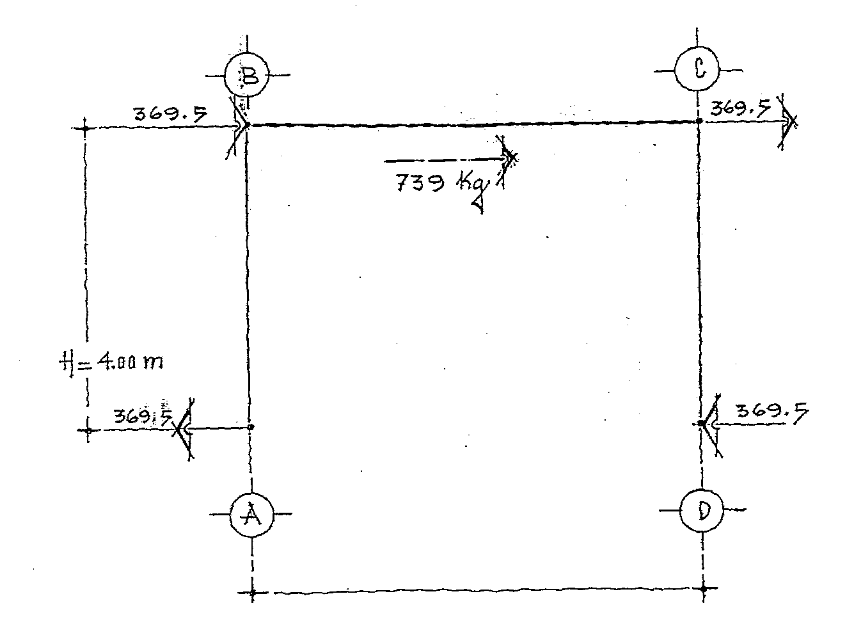


Fig. 12.63. Fuerzas horizontales en el pórtico.

$$\frac{785+693}{4} = \frac{1478}{4} = 369.5 \text{ Kg}$$

Igualación de los empujes horizontales:

$$8000 \text{ Kg} = 369.5\, \gamma \cdot 2$$

donde

$$\gamma = \frac{8000}{739} = 10.82 \text{ (Factor de corrección)}$$

Los momentos reales que actúan en la viga y en los postes ocasionados por el empuje horizontal, se obtienen multiplicando los momentos relativos ya calculados, por el factor de corrección, veamos:

$$M_A = 785 \cdot \gamma = 785 \times 10.82 \simeq 8494 \text{ Kgm}$$

$$M_B = 693 \cdot \gamma = 693 \times 10.82 \simeq 7498 \text{ Kgm}$$

y,

$$M_A = M_D$$

$$M_B = M_C$$

Las figuras 12.64 a 12.66 muestran los diagramas correspondientes.

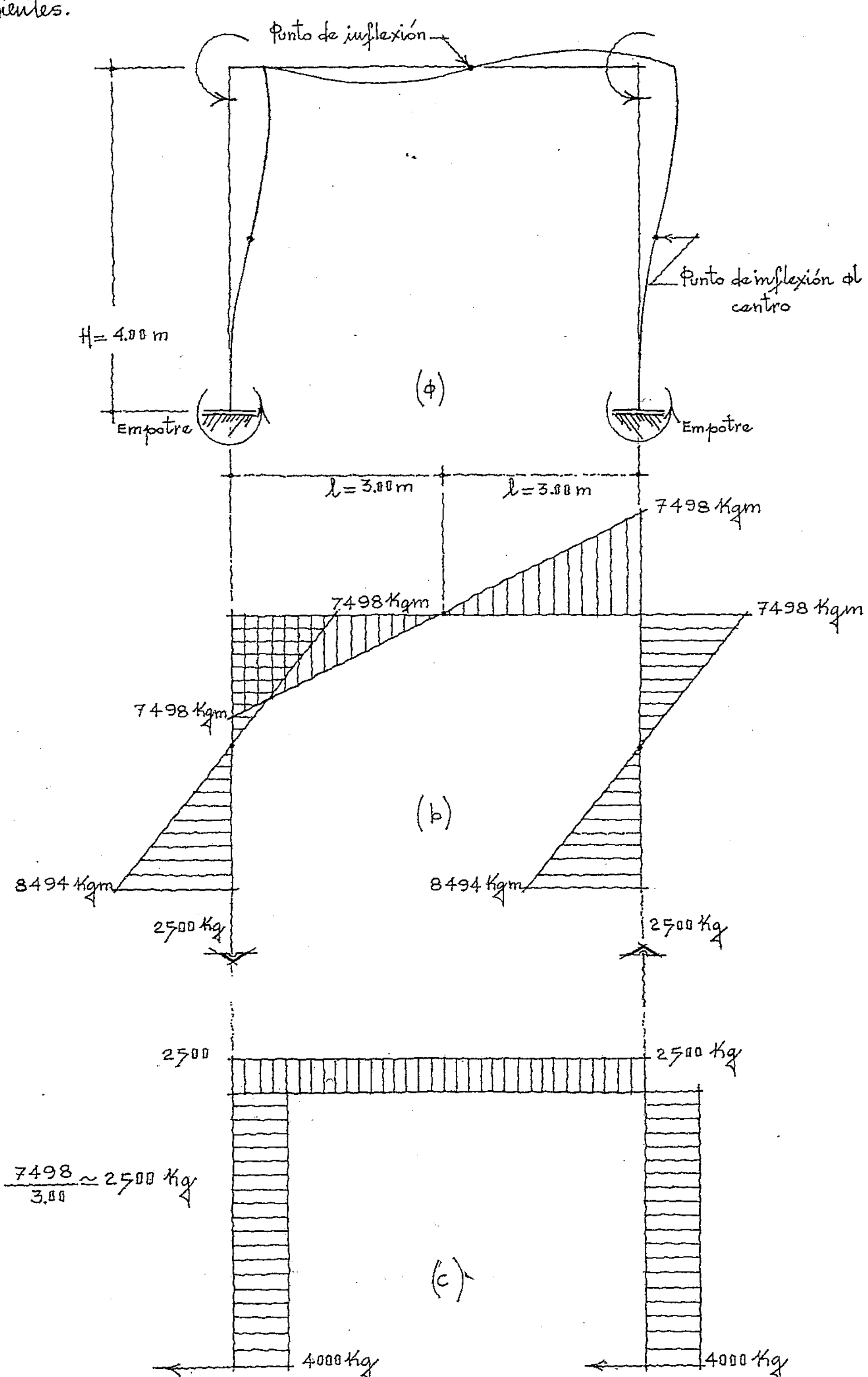


Fig. 12.64. Deformación del pórtico, (a).

Fig. 12.65. Diagrama de momento flexionante, (b).

Fig. 12.66. Diagrama de esfuerzo cortante, (c).

Datos para diseñar el pórtico

$f'_c = 250\ Kg/cm^2;\ f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

$b = ?\ ;\ d = ?$

Suponemos que el ancho de la viga y el de los postes son iguales:

$$\frac{I_v}{I_p} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{bh^3/12}{bh^3/12} = \frac{(hv)^3}{(hp)^3} = 2 \quad \therefore (hp)^3 = \frac{(hv)^3}{2}$$

y, $\quad M_{máx.} = R\,b\,d^2$ y $d = 2b$

$$M_{máx.} = R\,4\,b^3$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{849400}{20 \times 4}} = \sqrt[3]{\frac{849400}{80}} \simeq 22\ cm$$

En postes sometidos a flexocompresión el lado menor de la columna será de 30 cm

$$\therefore 30 \times 2 = 60\ cm \quad y \quad h = d + r = 65\ cm$$

El otro lado del poste valdrá:

$$(hp)^3 = \frac{(hv)^3}{2} = \frac{(65)^3}{2} = \frac{274625}{2} \simeq 137300\ cm^3$$

$$\therefore hp = \sqrt[3]{137300} \simeq 51.6\ cm$$

El reglamento especifica

a) Lado menor de la columna, 30 cm.

b) El área total de la columna no será menor de

$$P_a / 0.5 f'_c \quad \therefore \frac{2500}{0.5 \times 250} = 20\ cm^2 < b_1 \cdot b_2 \ (Correcto)$$

c) El lado menor de la columna, b_1, entre, b_2, será mayor de 0.4

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{51.6}{65} \simeq 0.79 > 0.4 \ (Correcto)$$

d) En columnas sometidas a cargas excéntricas, la relación entre la altura libre de la columna, H, y su menor dimensión transversal, b_1, no excederá de 20.

$$\frac{H}{b_1} = \frac{400}{51.6} \simeq 7.8 < 20 \ (Correcto)$$

e) El traslape de varillas longitudinales únicamente se permi-

tiró en la parte central del fuste de la columna, fig. 12.67.

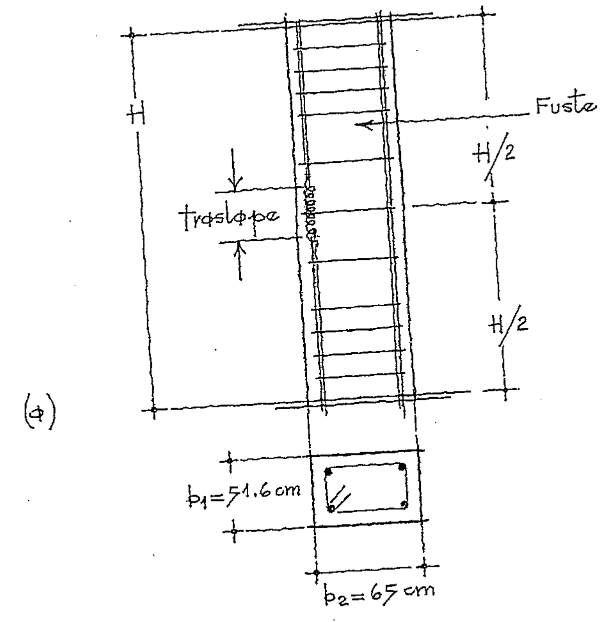


Fig. 12.67. Columna mostrando la parte central del fuste, (a).

f) El acero utilizado como refuerzo transversal tendrá un grado de fluencia no mayor de 4200 Kg/cm²

g) El refuerzo transversal tendrá un diámetro no menor de 0.95 cm, es decir, varilla de 3/8".*

Cálculo de las áreas de acero, fig. 12.68

Poste:

$$A_s = \frac{M_{máx.}}{f_s\, j\, d} = \frac{849400}{2100 \times 0.87 \times 51.6} \simeq 9\, cm^2$$

$$\text{Con } \phi\#5 = \frac{9}{1.99} \simeq 5\phi\#5$$ (No cumple con la especificación)

Para los otros momentos

$$A_s = \frac{749800}{94275} \simeq 7.96\, cm^2; \text{ con } \phi\#5 \simeq 4\phi\#5$$

7498 Kgm

B

Punto de inflexión al centro

(b)

A

8494 Kgm

Fig. 12.68. Desplazamiento tomando en cuenta la aplicación de las cargas, (b).

---

* El autor considera que para columnas sometidas a cargas pequeñas, se pueden utilizar estribos de 1/4" y 5/16".

En el último capítulo del libro se hará el análisis de una estructura completa.

Revisión a cortante, fig. 12.69.

Viga:

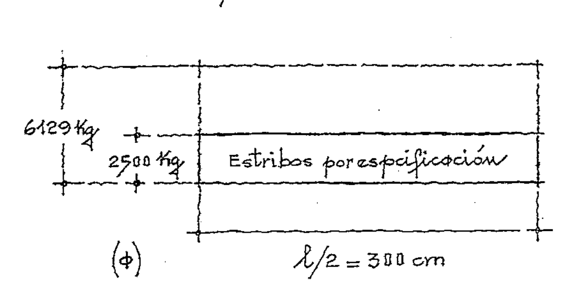


Fig. 12.69. Volumen del prisma, (a).

$$\rho_s = \frac{A_s}{bd} = \frac{7.96}{30 \times 51.6} \simeq 0.005$$

$\therefore\ 0.005 < 0.01$

Para este porcentaje el concreto toma:

$$V_{CR} = F_R\, bd(0.2 + 30\rho_s)\sqrt{f_c^*}$$

$$= 0.8 \times 30 \times 51.6(0.2 + 30 \times 0.005)\sqrt{200}$$

$$\simeq 6129 \text{ Kg} > 2500 \text{ Kg}$$

(La viga no necesita estribos por cálculo).

Poste:

Separación de estribos en el poste, fig. 12.70

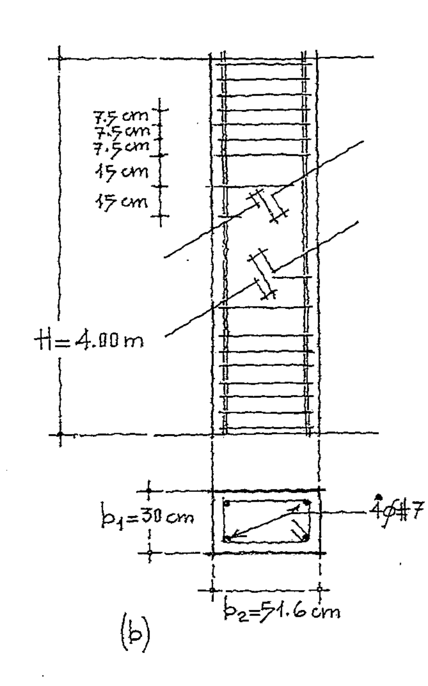


Fig. 12.70. Columna (Poste) mostrando sus armados, (b).

$$s \leq \frac{850}{\sqrt{f_Y}}\phi = \frac{850}{\sqrt{4200}}1.59 \simeq 20 \text{ cm}$$

$$s \leq 48\phi_{\int} = 48 \times 0.79 \simeq 38 \text{ cm}$$

$$s \leq \frac{b_1}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

En una longitud de 60 cm arriba y abajo de la intersección de la columna con la losa y piso, se colocarán a 7.5 cm.

El área de acero del poste deberá cumplir con un porcentaje mínimo de acero del 1%, veamos:

$$\rho_s = \frac{A_s}{bd} = \frac{9 \text{ cm}^2}{30 \times 51.6} \simeq 0.006 < 1\% \text{ (No cubre)}$$

$$\therefore A_s = \rho_s bd = 0.01 \times 1548 = 15.48 \text{ cm}^2$$

$$\text{Con } \phi_s \#7 = \frac{15.48}{3.87} = 4\phi_s \#7$$

En las figuras 12.71 a 12.76, se presentan los armados del pórtico.

Fig. 12.71. Pórtico doblemente empotrado, (a).

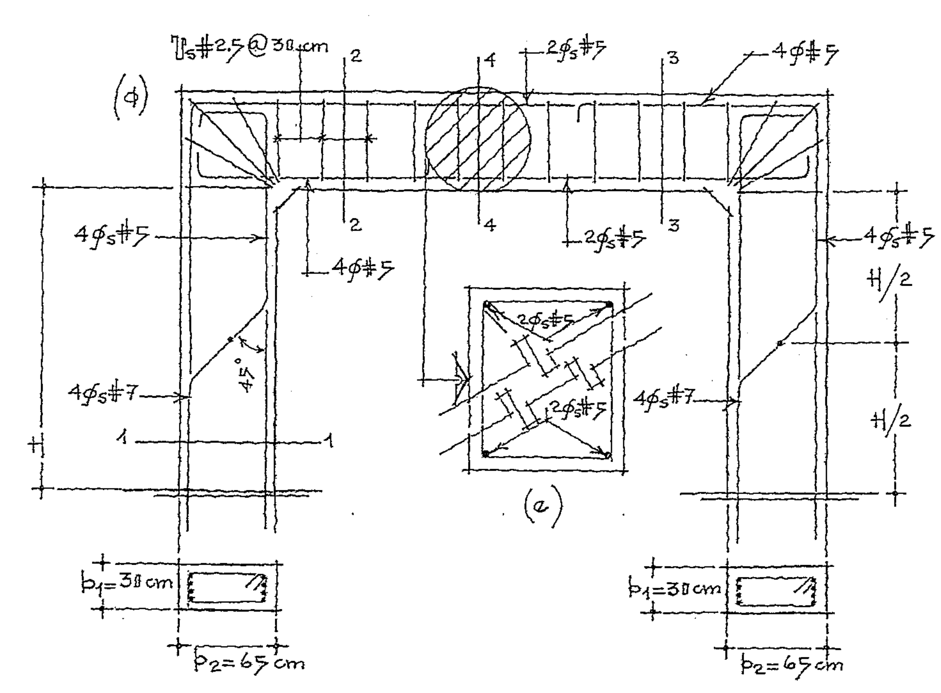
Fig. 12.72. Corte transversal 1-1 y planta, (b).

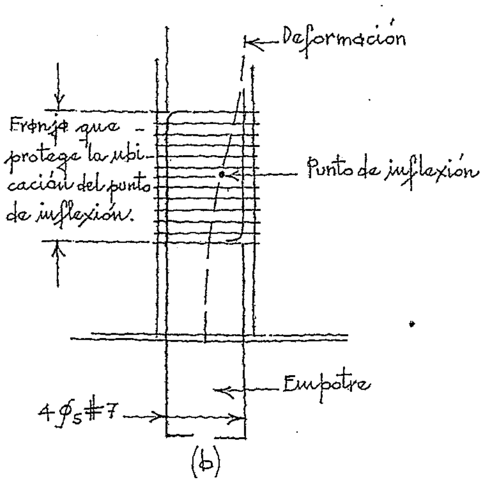
Fig. 12.73. Corte transversal 2-2, (c).

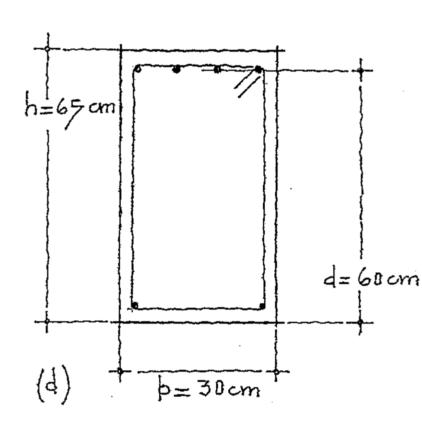
Fig. 12.74. Corte transversal 3-3, (d).

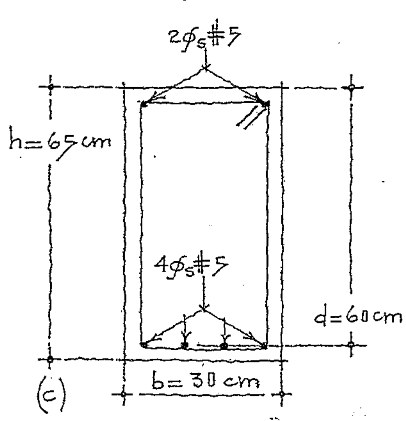
Fig. 12.75. Corte transversal 4-4, (e).

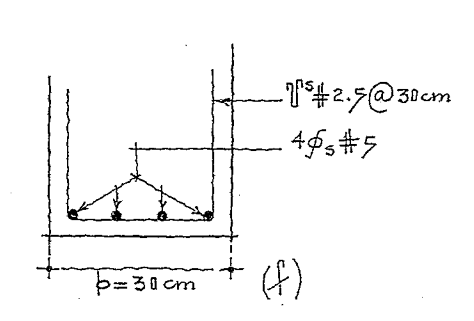
Fig. 12.76. Detalle de armados por 2-2.









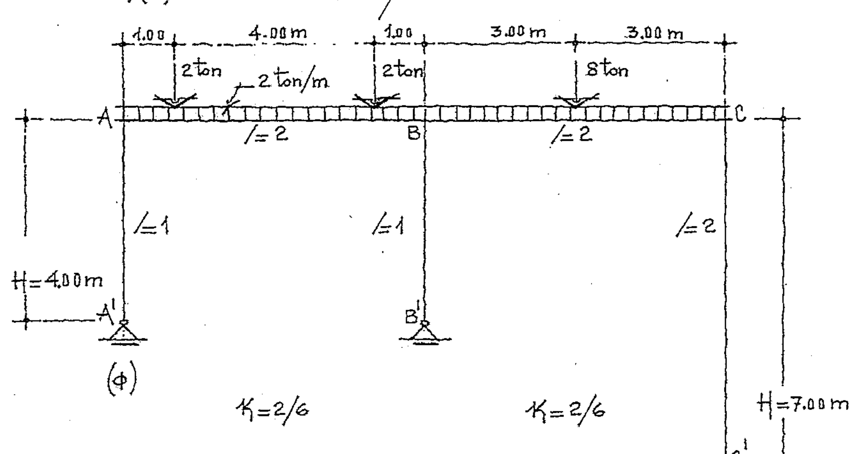


Ejemplo ilustrativo

Fig. 12.77. Pórtico, (a).

Fig. 12.78. Cuadro de distribución, (b).

En las figuras 12.77 a 12.79, se presenta un pórtico sometido a cargas diferentes y columnas con diferentes longitudes. Hágase el diseño del pórtico.



K=1/4×3/4 K=1/4×3/4 K=2/7

(b)

	A	B		C
F. D.	0.64	0.39	0.39	0.54
M. E.	+7.67	-7.67	+12	-12
	-7.67	-4.33		+12
1a. D.	-4.98	-1.69	-1.69	+6.48
1er. T.	-0.84	-2.45	+3.24	-0.84
	+0.84	-0.79		+0.84
2a. D.	+0.54	-0.30	-0.30	+0.46
2o. T.	-0.15	+0.27	+0.23	-0.15
	+0.15	-0.50		+0.15
3a. D.	+0.10	-0.20	-0.20	+0.08
Σ M	+2.42	-12.04	+13.28	-5.97
Mcol. Sup.	-2.42	-1.24		+5.97
Mcol. Inf.	0	0		+2.98
R. O.	+8	-8	+10	-10
M. C.	-1.60	-1.60	+1.22	+1.22
R. F.	+6.40	-9.60	+11.22	-8.78

Fig. 12.79. Tramo de viga, (c).

Obtención de los factores de distribución, F.D.:

Nudo A

$F.D._{A'A} = 1.0$

$F.D._{AA'} = \dfrac{1/4 \times 3/4}{1/4 \times 3/4 + 2/6} \simeq 0.36$

$F.D._{AB} = \dfrac{2/6}{2/6 + 1/4 \times 3/4} \simeq 0.64$

Nudo B

$F.D._{B'B} = 1.0$

$F.D._{BB'} = \dfrac{1/4 \times 3/4}{1/4 \times 3/4 + 2/6 + 2/6} \simeq 0.22$

$F.D._{BA} = \dfrac{2/6}{2/6 + 2/6 + 1/4 \times 3/4} \simeq 0.39$

$F.D._{BC} = 0.39$

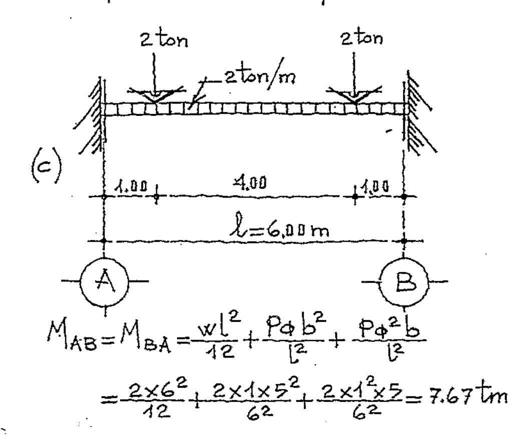
Nudo C

$F.D._{CC'} = \dfrac{2/7}{2/7 + 2/6} \simeq 0.46$

$F.D._{CB} = \dfrac{2/6}{2/6 + 2/7} \simeq 0.54$

$F.D._{C'C} = 0$

Momentos de empotramiento



$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{wl^2}{12} + \frac{Pab^2}{l^2} + \frac{Pa^2b}{l^2}$$

$$= \frac{2 \times 6^2}{12} + \frac{2 \times 1 \times 5^2}{6^2} + \frac{2 \times 1^2 \times 5}{6^2} = 7.67 \text{ tm}$$

$= \frac{2 \times 6^2}{12} + \frac{8 \times 6}{8} \simeq 12\,tm$

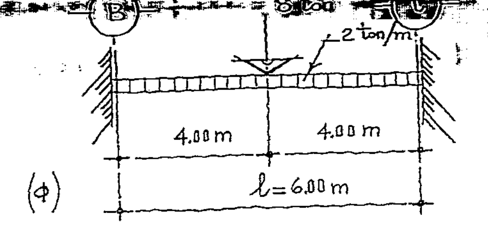


Fig.12.80. Tramo de viga BC, (a).

En la fig. 12.81 se presenta el pórtico mostrando los factores de distribución en viga y postes

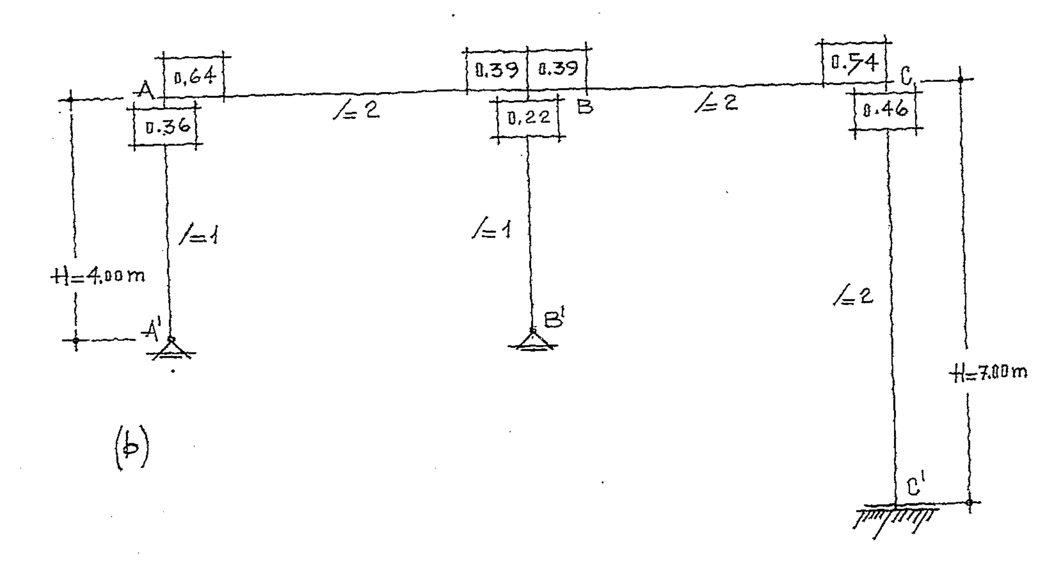


Fig.12.81. Pórtico indicando los factores de distribución en viga y postes, (b).

Los momentos originan una fuerza horizontal de:

$-2.42/4.00\,m \simeq 0.605$ ton (Columna AA')

$-1.24/4.00\,m = 0.310$ ton (Columna BB')

$+5.97 + 2.98/7.00\,m \simeq 1.28$ (Columna CC')

$(-0.605 - 0.310) + 1.28 = +0.365$ ton

El valor de la fuerza horizontal resultó muy pequeño (365 Kg).

A continuación igualamos flechas:

$$\delta_{AA'} = \delta_{BB'} = \delta_{CC'}$$

y, $\delta_{AA'} = \frac{M_{AA'}\,l}{3EK}$ ∴ $M_{AA'} = \frac{\delta_{AA'}\,3EK}{l}$ (Articulación y empotramiento)

$$\delta_{BB'} = \frac{M_{BB'}\, L}{3EK} \therefore M_{BB'} = \frac{\delta_{BB'}\, 3EK}{L} \text{ (Articulación y empotramiento)}$$

$$\delta_{CC'} = \frac{M_{CC'}\, L}{3EK} \therefore M_{CC'} = \frac{\delta_{CC'}\, 3EK}{L} \text{ (Doble empotramiento)}$$

Se obtiene un valor de rigidez para todos los postes, se fija un denominador común (por ejemplo 8) y, se multiplican todos los valores por el valor mencionado, veamos:

$$M_{AA'} = \frac{3\delta_{AA'}\, EK}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{8} = \frac{72\delta_{AA'}}{512} \therefore \delta_{AA'} = \frac{512\, M_{AA'}}{72}$$

$$\delta_{AA'} \simeq 7.11\, M_{AA'}$$

$$M_{AA'} = M_{BB'} \therefore \delta_{BB'} \simeq 7.11\, M_{BB'}$$

$$M_{CC'} = \frac{6\delta_{CC'}\, EK}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{8} = \frac{96\,\delta_{CC'}}{392} \therefore \delta_{CC'} = \frac{392\, M_{CC'}}{96}$$

$$\delta_{CC'} \simeq 4.08\, M_{CC'}$$

Se puede dar un valor de momento arbitrario (por facilidad damos 1000 Kgm) a cualquier poste; suponemos en este caso el poste AA', fig. 12.82.

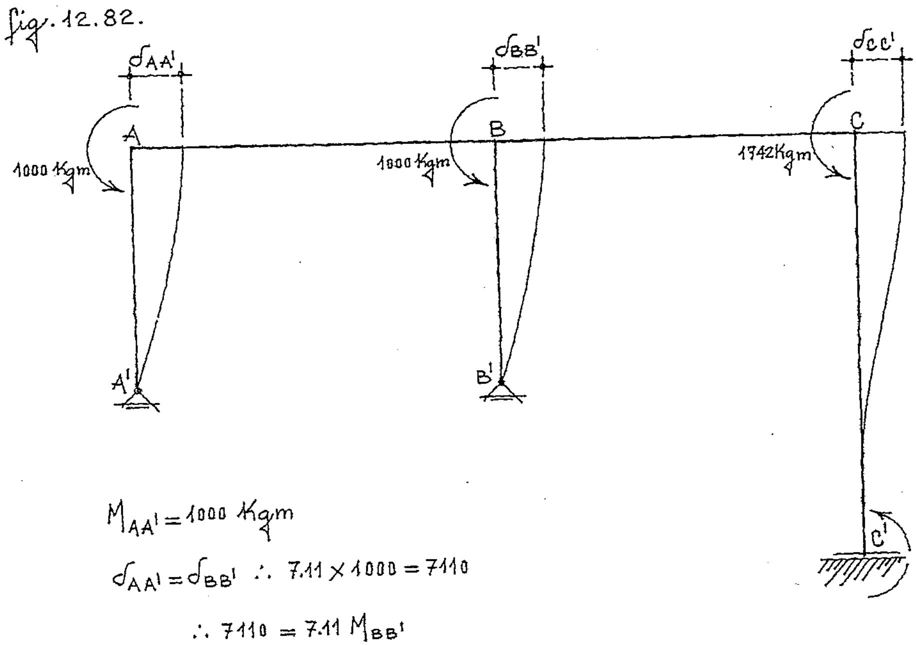


Fig. 12.82. Desplazamientos en el marco.

$M_{AA'} = 1000$ Kgm

$\delta_{AA'} = \delta_{BB'} \therefore 7.11 \times 1000 = 7110$

$\therefore 7110 = 7.11\, M_{BB'}$

y, $M_{BB'} = \frac{7110}{7.11} = 1000$ Kgm

$\delta_{AA'} = \delta_{CC'} \therefore 7110 = 4.08\, M_{CC'}$

$\therefore M_{CC'} = \frac{7110}{4.08} \simeq 1742$ Kgm

Con los valores obtenidos procedemos al cálculo del primer "Cross" respecto a la fuerza de desplazamiento.

Cuadro de distribución, figura 12.83

Nudos	A		B			C	
Tramos	A A'	A B	B A	B B'	B C	C B	C C'
K	1/4 x 3/4	2/6	2/6	1/4 x 3/4	2/6	2/6	2/7
F. D.	0.36	0.64	0.39	0.22	0.39	0.54	0.46
M.E.	−1000			−1000			−1742
	+1000			+1000		+1742	
1a. D.	+360	+640	+390	+220	+390	+940	+802
1er. T.	———	+195	+320	———	+470	+195	———
	−195			−790		−195	
2a. D.	−70	−125	−308	−174	−308	−105	−90
2o. T.	———	−154	−62	———	−52	−154	———
	+154			+114		+154	
3a. D.	+56	+98	+44.5	+25	+44.5	+83	+71
3er. T.	———	+22	+49	———	+42	+22	———
	−22			−91		−22	
4a. D.	−8.0	−14	−36	−20	−36	−12	−10
ΣM	−662	+662	+398	−949	+550	+969	−969
$M_{col.}$ Sup	−1662			−1949			−2711
$M_{col.}$ Inf.	0			0			−485 *

Fig. 12.83. Cuadro.

A continuación calculamos el factor de corrección:

$A = 1000 + 662 = 1662 \div 4.00\,m \simeq 416\ Kg\ (+)$

$B = 1000 + 949 = 1949 \div 4.00\,m \simeq 487\ Kg\ (+)$

$C = 1742 + 969 + 485 = 3196 \div 7.00\,m \simeq 457\ Kg\ (+)$

$\therefore\ 416 + 487 + 457 = 1360\ Kg$

Por tanto

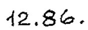
$$\gamma = \frac{365}{1360} \simeq 0.268 \ (\text{Factor de corrección})$$

---

* Se obtiene dividiendo $\frac{\Sigma M \text{ en } CC'}{W} = \frac{0.969\ ton}{2\ ton/m} \simeq 0.485\,tonm = 485\,Kgm\ (-)$



Fuerza horizontal originada por los momentos, figs. 12.84a



A B C

1360 Kg 416 Kg 487 Kg 457 Kg

416 Kg A' 487 Kg B'

(a)

C'

− 485 Kgm

Fig. 12.84. Pórtico. Estructura antisimétrica, (a).

Fig. 12.85. Cuadro de distribución, (b).

(b)

Nudos	A		B			C	
Tramos (Col. y Vigas)	A A'	A B	B A	B B'	B C	C B	C C'
ΣM	−662	+662	+398	−949	+550	+969	−969
ΣM por Fact. de Corr.	−0.177	+0.177	+0.107	−0.254	+0.147	+0.260	−0.260
ΣM y M en Columnas	−2.42	+2.42	−12.04	−1.24	+13.28	+5.97	−5.97
M totales	−2.60	+2.60	−11.93	−1.50	+13.43	+6.23	−6.23
Reacciones Orig.	+8	−8	+10				−10
Modificación por C.	−1.60	−1.60	+1.22				+1.22
Reacciones por Desplaz.	0	0	−0.0195				−0.0195
Reacciones Finales	+6.40	−9.60	+11.20				−8.80

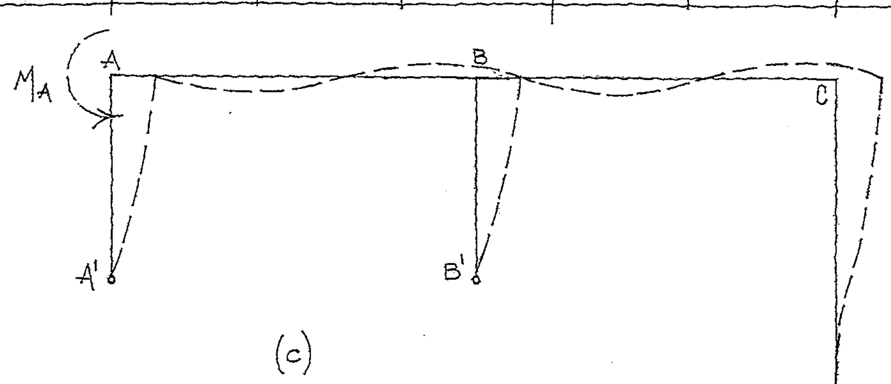


Fig. 12.86. Esquema de desplazamientos y deformaciones, (c)

En las figs. 12.87 y 12.88 se presentan los diagramas de cortantes y de momentos flexionantes.

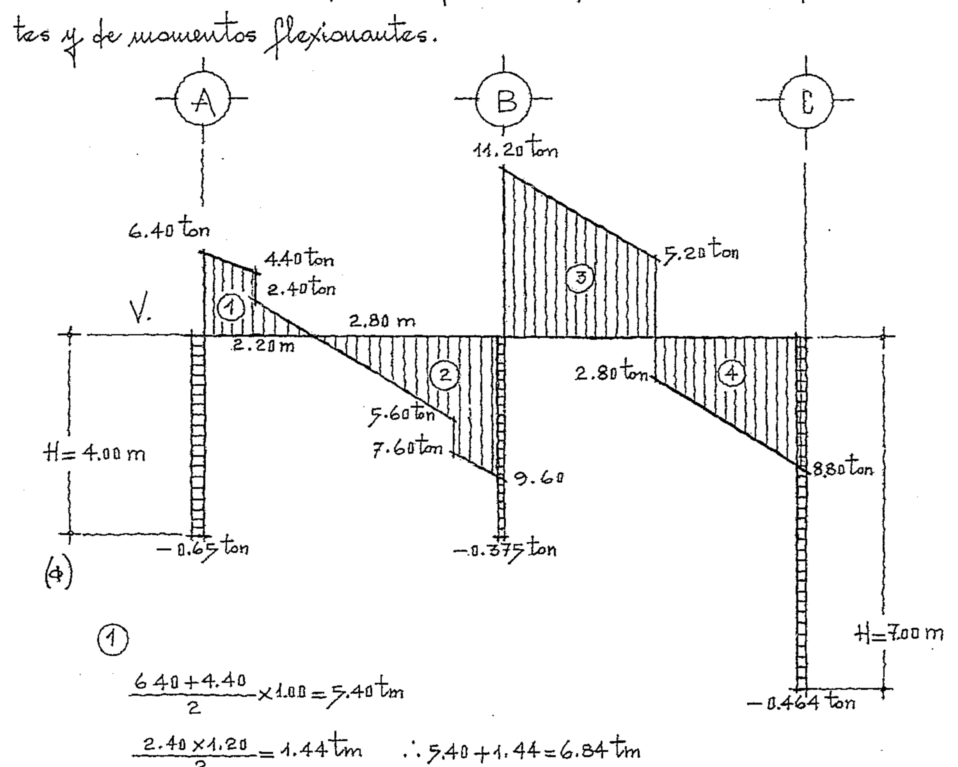


Fig. 12.87. Diagrama de esfuerzo cortante, (a).

(a)

①

$$\frac{6.40+4.40}{2}\times 1.00 = 5.40\ tm$$

$$\frac{2.40\times 1.20}{2} = 1.44\ tm \qquad \therefore 5.40+1.44 = 6.84\ tm$$

②

$$\frac{5.60\times 2.80}{2} = 7.84\ tm$$

$$\frac{9.60+7.60}{2}\times 1.00 = 8.60\ tm \quad \therefore \quad 7.84+8.60 = 16.44\ tm$$

③

$$\frac{11.20+5.20}{2}\times 3.00 = 24.60\ tm$$

④

$$\frac{8.80+2.80}{2}\times 3.00 = 17.40\ tm$$

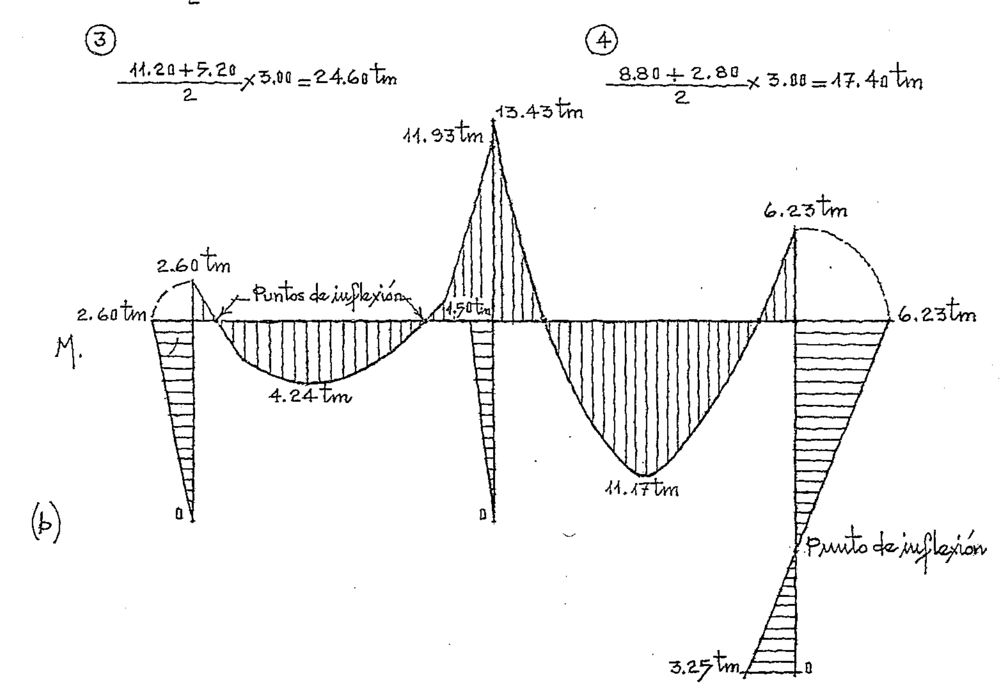


Fig. 12.88. Diagrama de momento flexionante, (b).

(b)

Datos para el diseño del pórtico:

$f'_c = 200\ Kg/cm^2$ $b = ?$

$f_y = 4200\ Kg/cm^2$ $d = ?$

$$M_{máx.} = 13.43\ tm = 1343000\ Kg\text{-}cm$$

Conservando la relación entre el momento de inercia de las vigas y los postes, se tiene:

$$\frac{I_v}{I_p} = \frac{2}{1} = 2 \ (\text{Postes } AA' \text{ y } BB')$$

$$\frac{I_v}{I_p} = \frac{2}{2} = 1 \ (\text{Poste } CC')$$

Suponiendo un mismo ancho para las vigas y los postes, obtenemos.

$$d = 2b \quad \therefore M_{máx.} = R b d^2 = R \cdot b \cdot 2b \cdot 2b = 4Rb^3$$

$$\therefore \quad b = \sqrt[3]{\frac{M_{máx.}}{4R}} = \sqrt[3]{\frac{1343000}{4 \times 15}} = \sqrt[3]{22384} \simeq 28\ cm$$

$$d = 2b = 2 \times 28 = 56\ cm$$

$$y, \quad h = d + r = 56 + 4 = 60\ cm$$

El otro lado del poste valdrá:

$$(hp)^3 = \frac{(hv)^3}{2} = \frac{(60)^3}{2} = \frac{216000}{2} = 108000$$

$$\therefore \quad hp = \sqrt[3]{108000} \simeq 47.60\ cm$$

Para el poste CC', se tiene

$$hv = hp = 60\ cm$$

Cálculo de las áreas de acero

Viga:

$$A_s = \frac{M_{máx.}}{f_s\, j\, d} = \frac{1343000}{2100 \times 0.87 \times 56} \simeq 13.13\ cm^2$$

Con varillas de 3/4"

$$\text{No. de } \phi_s = \frac{13.13}{2.87} \simeq 5\phi_s \#6$$

Por comparación, obtenemos las áreas de acero de los restantes tramos de viga.

Para los momentos (11.93 tm) y (11.17 tm); $A_s = 11.66$ y 10.92 $(4\phi_s \#6)$

Para otros momentos

(6.23 tm) ; (4.24 tm) y (2.60 tm), se tiene

$A_s = 6.10 cm^2$; $A_s = 4.15 cm^2$ y $A_s = 2.54 cm^2$

El Reglamento de Construcciones para el D.F., determina que el área mínima de acero se calculará con la expresión

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} bd = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200} 28 \times 56 \simeq 3.70 \text{ cm}^2$$

Area de acero en nudo A (Viga y poste), se colocará por especificación.

Postes: (fig. 12.89)

Revisión del porcentaje de acero en el poste

$$\rho_s = \frac{A_s}{bh} = \frac{6.10}{28 \times 60} \simeq 0.0036 < 0.01$$

El área de acero en la viga cumple con la especificación, pero el porcentaje de acero en el poste es insuficiente, por tanto

$$A_{s\,mín.} = 0.01 \times 28 \times 60 = 16.80 \text{ cm}^2$$

Con varillas de 3/4" se tiene

$$\text{No. de } \phi_s = \frac{16.80}{2.87} \simeq 6\phi_s \# 6 \text{ (en C)}$$

En C' también se colocará el acero por especificación.

Fig. 12.89. Momentos en el poste C C', (a).

Revisión a cortante, fig. 12.90

Fig. 12.90. Volumen del prisma triangular excedente, (b).

Cuando la relación entre el claro y el peralte total de la viga, (L/h > 5), la fuerza que toma el concreto se calcula con la expresión

$$V_{CR} = F_R bd(0.2 + 30\rho_s)\sqrt{f_c^*}$$

si $\rho_s < 0.01 \therefore \rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{13.13}{28 \times 56} = \frac{13.13}{1568} \simeq 0.0084 < 0.01$

En la figura 12.91. se muestran los valores del cortante excedente: $V_{CR} = 0.8 \times 28 \times 56 (0.20 + 30 \times 0.0084)\sqrt{160} \simeq 7173$ Kg

$$\frac{z}{300} = \frac{2.56}{3.82} = 201 \text{ cm}$$

$$T = \frac{2.56 \times 28 \times 201}{2} \simeq 7204 \text{ Kg}$$

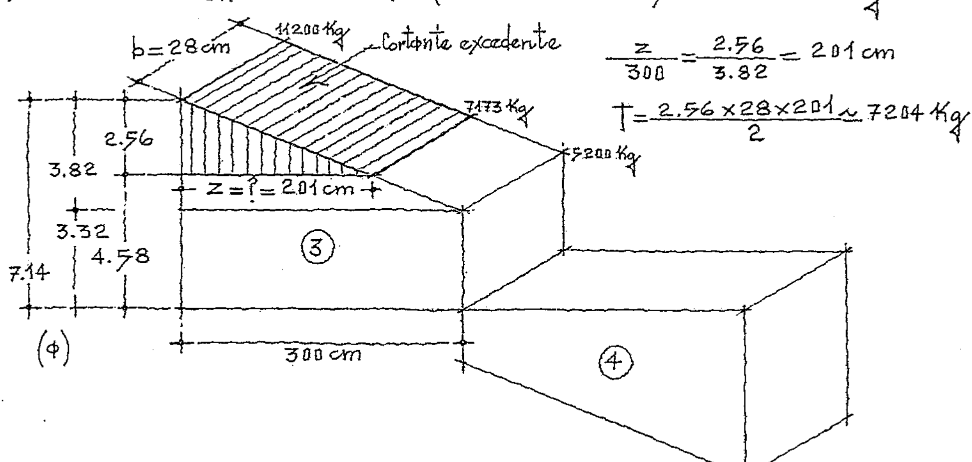


Fig. 12.91. Valor del cortante excedente, (a), (3)

Con estribos # 2.5, obtenemos

$$t = 2A_{s\Pi}\ 0.40 f_Y = 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 \simeq 1646 \text{ Kg}$$

$$\text{No de } \Pi^s = \frac{T}{t} = \frac{7204}{1646} \simeq 5\ \Pi^s \# 2.5$$

Separación de estribos, fig. 12.92

$$s_\Pi = \frac{100.5}{4} \simeq 25 \text{ cm}$$

En esta distancia (100.5 cm) se colocarán 4 Πs.

1		
2	3	1
100.5 cm	100.5 cm	
201 cm		

(b)

$$s_\Pi = \frac{100.5}{3} \simeq 33 \text{ cm}$$

Fig. 12.92. Separación de estribos gráficamente, (b).

$$s_\Pi = \frac{F_R A_{sv}\, 0.40 f_{Yd} (\text{sen } 90^\circ + \cos 90^\circ)}{V - V_{CR}}$$

$$\therefore \frac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200 (1 + 0)}{11200 - 7173} \therefore s_\Pi \simeq 19 \text{ cm}$$

y, $s_\Pi = \dfrac{0.85 \times 2 \times 0.49 \times 0.40 \times 4200}{3.5 \times 28} \simeq 14$ cm (Domina)

En la fig. 12.93 se muestra la colocación de los estribos en el tramo (3) de la viga.

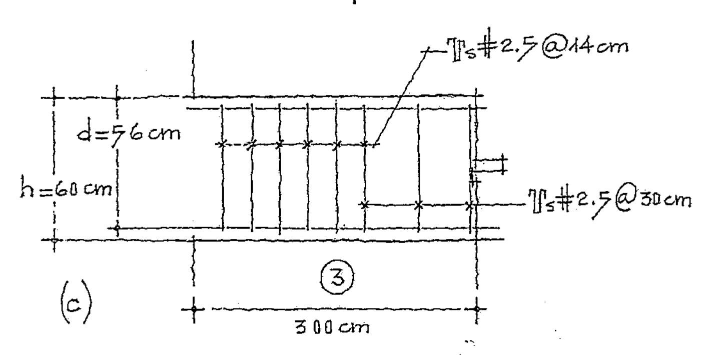
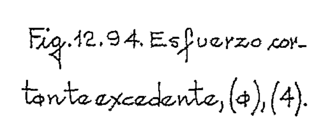
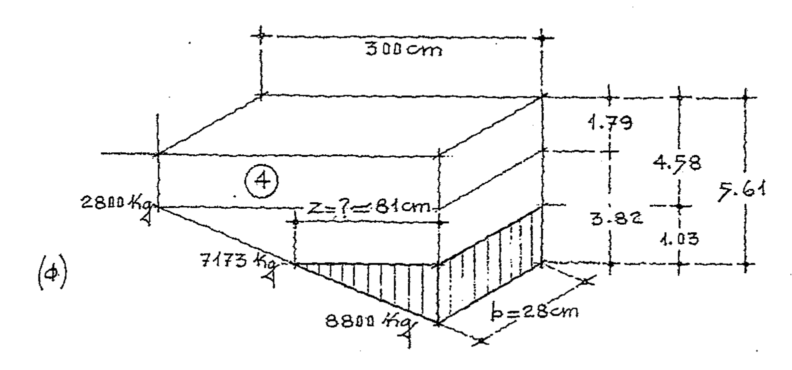


Fig. 12.93. Colocación de estribos y su separación, (c)

En la fig. 12.94 se presenta el cálculo del cortante excedente en el trapecio (4), veamos.


Fig. 12.94. Esfuerzo cortante excedente, (φ), (4).



Cálculo de la distancia "z"

$$\frac{300}{z}=\frac{3.82}{1.03} \quad \therefore \quad z=\frac{300\times 1.03}{3.82}\simeq 81 \text{ cm}$$

Obtención del volumen del prisma triangular excedente

$$T=\frac{1.03\times 28\times 81}{2}=1168 \text{ Kg}$$

Con V^s del #2.5, se tiene

$t=1646$ Kg (Se colocarán por especificación)

En la fig. 12.95, se muestra la colocación de los estribos en el tramo (4) de la viga.

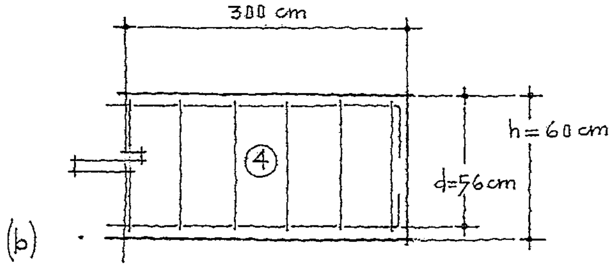


Fig. 12.95. Separación de estribos en el tramo (4) de la viga (b).

En la fig. 12.96, se presenta la colocación de estribos en los tramos 3 y 4 de la viga.

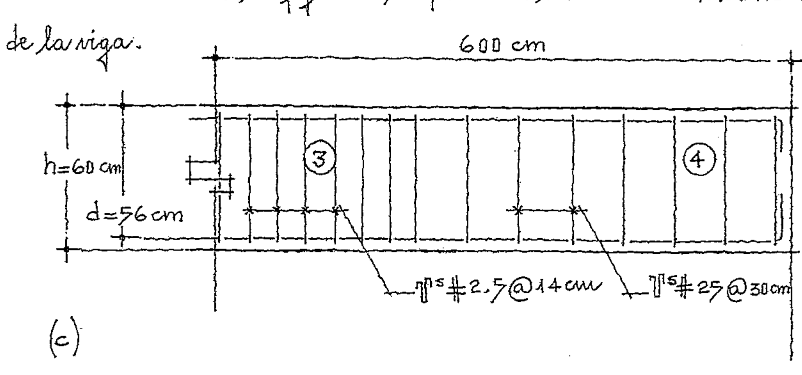


Fig. 12.96. Separación de estribos en los tramos (3) y (4) de la viga, (c).

En las figs. 12.97 a 12.103, se muestran varios cortes del pórtico con los armados correspondientes.

Fig. 12.97. Corte longitudinal del pórtico, (a).

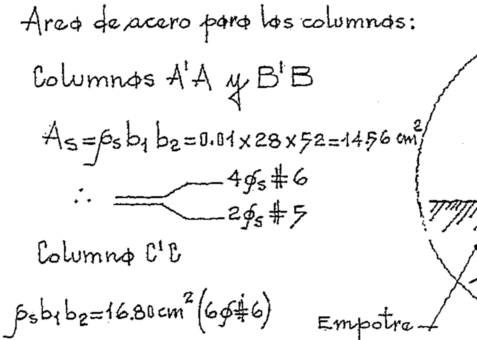
Figs. 12.98 y 12.99. Articulaciones, (b) y (c).

Fig. 12.100. Empotramiento, (d).

Fig. 12.101. Detalle de articulación, (e).

Fig. 12.102. Detalle de articulación, (f).

Fig. 12.103. Detalle de empotramiento, (g).



Area de acero para las columnas:

Columnas A'A y B'B

$A_s = \rho_s b_1 b_2 = 0.01 \times 28 \times 52 = 14.56\ cm^2$

$\therefore$ $4\phi_s \# 6$; $2\phi_s \# 5$

Columna C'C

$\rho_s b_1 b_2 = 16.80\ cm^2\ (6\phi \# 6)$

Referencias bibliográficas

Capítulo 12

"Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado," ACI 318-83, México, 1984.

Prenzlow C., "Cálculo de Estructuras por el Método de Cross," Gustavo Gili, S.A, Barcelona, España, 1978.

Peschard E., "Resistencia de Materiales," Universidad Nacional Autónoma de México, 1969.

Park R., y Paulay T., "Estructuras de Concreto Reforzado," Limusa, México, 1979.

Pérez A., Vicente, "El Concreto Armado en las Estructuras," Teoría Elástica, trillas, México, 2000.

Lin T.Y., y Stotesbury S.D., "Conceptos y Sistemas Estructurales para Arquitectos e Ingenieros," Limusa, México, 1991.

"Normas técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal," México, 1988.



13

LOSAS QUE TRABAJAN EN UNA DIRECCIÓN

13.1. Generalidades

Una losa trabaja en una dirección cuando la relación entre sus lados a_2/a_1 (lado largo y corto del tablero), es mayor de 1.5 y la flexión se ejerce únicamente en el sentido perpendicular al claro largo.

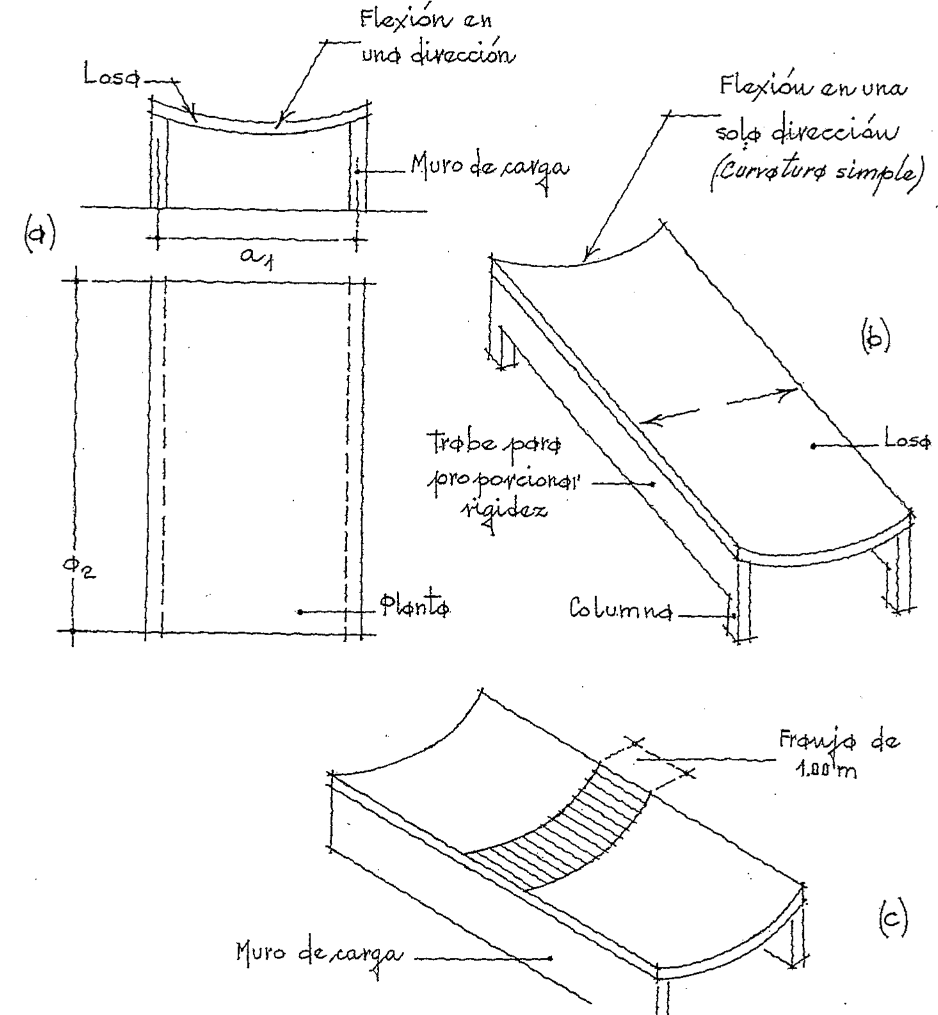
Para su estudio la analizamos tomando en cuenta sus condiciones mecánicas de trabajo, veamos:

La losa se encuentra apoyada o empotrada en dos lados discontinuos, cuya acción mecánica de flexión se ejerce en una dirección, dirección perpendicular a los apoyos. Se deforman en curvatura simple, figs. 13.1 a 13.3.

Fig. 13.1. Planta y corte transversal, (a).

Fig. 13.2. Losa apoyada sobre columnas y trabe rígida, (b).

Fig. 13.3. Losa apoyada sobre muros de carga, (c).



Para calcular el momento flexionante en la losa, el claro se contará a partir del centro del apoyo, siempre que el ancho de dicho apoyo no sea mayor que el peralte efectivo de la viga. En caso contrario, el claro se tomará a partir de la sección que se encuentra a medio peralte efectivo del paño interior del apoyo.

Para su diseño es aconsejable comenzar suponiendo un peralte que garantice una rigidez adecuada, con la finalidad de limitar las deflexiones, o deformaciones que puedan afectar negativamente la resistencia de la estructura para las cargas de servicio. Para tal fin, el peralte total (h) mínimo que debe aplicarse a losas con flexión en una dirección es el que aparece en la tabla 13.1, de lo contrario, será necesario calcular las deflexiones.

Tabla 13.1

	Peralte mínimo (h) para losas con flexión en una dirección			
	Condiciones de apoyo			
	Simplemente apoyada	Con un extremo continuo	Con ambos extremos continuos	En voladizo
Losas macizas	$\frac{L}{20}$	$\frac{L}{24}$	$\frac{L}{28}$	$\frac{L}{10}$

En términos generales, las losas son elementos subreforzados por lo tanto, deberán diseñarse con un porcentaje de acero no inferior a

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y}$$

La separación del acero por flexión no será mayor de tres veces el espesor de la losa, ni tampoco de 30 cm.

Además del refuerzo por flexión, se proporcionará un refuerzo perpendicular al anterior para resistir esfuerzos por cambios volumétricos ocasionados por contracción y temperatura, de acuerdo con lo dispuesto por el Reglamento,

que dice:

El área de acero que se suministre por contracción o temperatura no será menor que

$$a_s = \frac{660 x_1}{f_Y (x_1 + 100)}$$

a_s, área de refuerzo por cambios volumétricos.

x_1, espesor de la losa (x_1 es la literal, h).

En lugar de utilizar la fórmula anterior, se puede suministrar un refuerzo mínimo de $\rho_s = 0.2\%$ para elementos estructurales protegidos de la intemperie, y $\rho_s = 0.3\%$ para elementos expuestos a la intemperie, o que estén en contacto con el terreno.

La separación del refuerzo por cambios volumétricos no excederá de 50 cm, ni de 3.5 h.

El esfuerzo cortante en losas quedará limitado a la fuerza cortante capaz de tomar el concreto (V_{CR}) ya que, por su escaso espesor, el refuerzo para absorber el cortante proporciona un anclaje poco eficiente.

Para obtener el valor que toma el concreto a fuerza cortante, el Reglamento determina:

Cuando el ancho (b) no resulte menor que cuatro veces el peralte efectivo (d) con espesor hasta 60 cm y también cuando la relación

$$\frac{M}{Vd} \leq 2$$

la fuerza que toma el concreto será igual a

$$V_{CR} = 0.5 F_R bd \sqrt{f_c^*}$$

sin importar la cuantía del refuerzo.

Cuando el espesor es mayor de 60 cm, o la relación $\frac{M}{Vd} > 2$, la fuerza cortante que toma el concreto se valuará con las expresiones:

Cuando $\rho_s < 1\%$ $\quad V_{CR} = F_R bd (0.2 + 30 \rho_s) \sqrt{f_c^*}$

Cuando $\rho_s \geq 1\%$ $\quad V_{CR} = 0.5 F_R bd \sqrt{f_c^*}$

Ejemplo ilustrativo

Una losa para una escuela se encuentra sometida a acciones permanentes y variables.

Diseñar la losa que aparece en las figs. 13.4 a 13.7, tomando en consideración que la estructura deberá soportar la aglomeración de personas.

Mosaico
Cadena de concreto
Mortero de cemento-arena
Yeso, tirol y pintura
Losa de concreto armado
Muro de carga
(a)
$a_1 = 4.40$ $a_1 = 4.40$ $a_1 = 4.40$ $a_1 = 4.40$

Fig. 13.4. Corte transversal de la losa, (a).

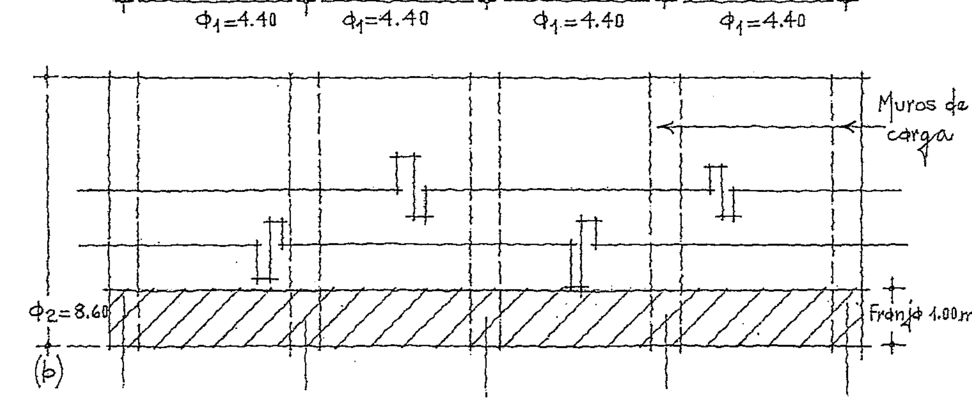


Fig. 13.5. Planta de la estructura, (b).

2334 Kg
$\frac{2334 \times 1.73}{2} \simeq 2019$ Kgm = 201900 Kgcm
V.
0
(c)
1.73 m

Fig. 13.6. Gráfica de esfuerzo cortante, (c). Sección.

M.
0
201900 Kgcm
(d)

Fig. 13.7. Gráfica de momento flexionante, (d). Sección.

Datos:

$f'_c = 250\ Kg/cm^2$; Claro corto, $a_1 = 4.40\ m$

$f_Y = 4200\ Kg/cm^2$; Claro largo, $a_2 = 8.60\ m$

Cargas en la losa; fig. 13.8

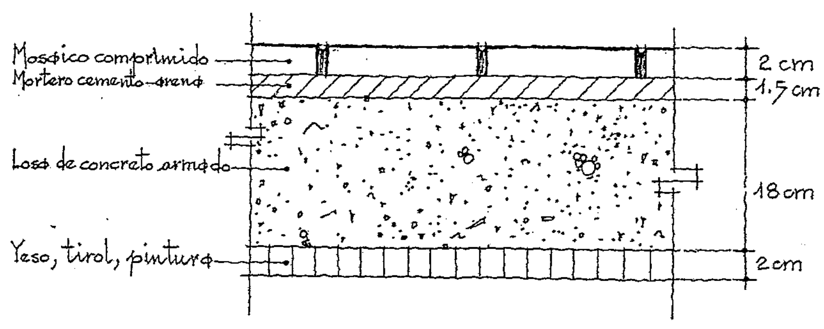


Fig. 13.8. Detalle de la losa y acabados.

Mosaico comprimido	$= 0.02 \times 2600 = 52\ Kg/m^2$
Mortero cemento-arena	$= 0.015 \times 2000 = 30\ Kg/m^2$
Losa de concreto armado	$= 0.18 \times 2400 = 432\ Kg/m^2$
Yeso, tirol y pintura	$= 0.02 \times 1650 = 33\ Kg/cm^2$
	Carga muerta $= 547\ Kg/m^2$
	Carga viva $= 353\ Kg/m^2$
	C.M. + C.V. $= 900\ Kg/m^2$

Aplicando el factor de carga (F_c) correspondiente, se tiene

Carga de diseño $= 1.5 \times 900 = 1350\ Kg/m^2$

Para evitar deflexiones en el espesor de la losa se tomó el más desfavorable de la tabla 13.1.

Un extremo continuo

$$h = \frac{a_1}{24} = \frac{440}{24} \simeq 18\ cm$$

y

$$d = h - (1/2\phi + r) = 18 - (0.64 + 2.36) = 15\ cm$$

Hay autores que la relación entre sus lados la consideran hasta 2, sin embargo, pasándose de 1.5 el lado corto (a_1) no recibe arriba del 20% de la carga total.

Cálculo de esfuerzos cortantes y momentos flexionantes

Cortantes, fig. 13.6(c).

Nudo A

$$\frac{11}{28} \simeq 0.3928 \quad \therefore \quad V_A = 0.3928 \times 1350 \times 4.40 \simeq 2334 \text{ Kg}$$

Nudo B

$$1350 \times 4.40 = 5940 \quad \therefore \quad V_B = 5940 - 2334 = 3606 \text{ Kg}$$

$$\frac{15}{28} \simeq 0.5357 \quad \therefore \quad V_B = 0.5357 \times 1350 \times 4.40 \simeq 3182 \text{ Kg}$$

Nudo C

$$5940 \quad \therefore \quad V_C = 5940 - 3182 = 2758 \text{ Kg}$$

$$\frac{13}{28} \simeq 0.4643 \quad \therefore \quad V_C = 0.4643 \times 1350 \times 4.40 \simeq 2758 \text{ Kg}$$

Nudo D

$$5940 \quad \therefore \quad V_D = 5940 - 2758 = 3182 \text{ Kg}$$

$$\frac{17}{28} \simeq 0.6071 \quad \therefore \quad V_D = 0.6071 \times 1350 \times 4.40 \simeq 3606 \text{ Kg}$$

Nudo E

$$\frac{11}{28} \simeq 0.3928 \quad \therefore \quad V_E \simeq 2334 \text{ Kg}$$

Obtención de los momentos flexionantes, fig. 13.9 y 13.10

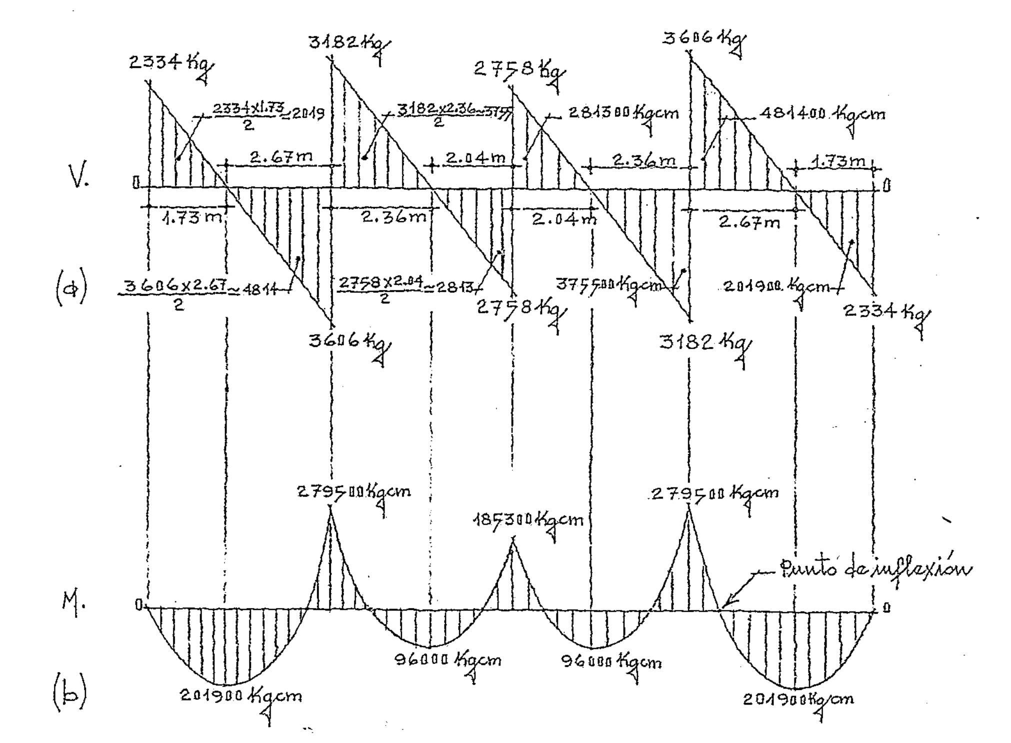


Fig. 13.9. Gráfica de esfuerzo cortante, (a).

Fig. 13.10. Gráfica de momento flexionante, (b).

Tratándose de estructuras continuas el Reglamento especifica que el porcentaje de refuerzo (ρ_s) sea el 50% del correspondiente a falla balanceada para tener la seguridad de un comportamiento dúctil, veamos:

$$\rho_{sb} = 0.50\,\frac{0.85 f'_c \beta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} = 0.50\,\frac{0.85 \times 250 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{10200}$$

$$= 0.50 \times 0.04 \times 0.59 \simeq 0.012$$

y,

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y} = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} \simeq 0.0026$$

$$\therefore \rho_{sb} > \rho_{s\,mín.}$$

Obtención de las áreas de acero

$$A_{s\,máx.} = \rho_{sb}\,bd = 0.012 \times 100 \times 15 = 18\ cm^2$$

Las áreas de acero para los otros momentos las obtenemos proporcionalmente

$$A_s = \frac{279500}{201900} : \frac{18}{X_1} \qquad \therefore X_1 = \frac{201900 \times 18}{279500} \simeq 13\ cm^2$$

$$\frac{279500}{185300} : \frac{18}{X_2} \qquad \therefore X_2 = \frac{185300 \times 18}{279500} \simeq 11.94\ cm^2$$

$$\frac{279500}{96000} : \frac{18}{X_3} \qquad \therefore X_3 = \frac{96000 \times 18}{279500} \simeq 6.18\ cm^2$$

Para $A_s = 18\ cm^2$; con $\phi_s \#4 = \frac{18\ cm^2}{1.27} \simeq 14 \phi_s \#4$

$$\text{Separación} = \frac{100\ cm}{14\phi_s} \simeq 7\ cm$$

$$\frac{13\ cm^2}{1.27\phi_s} \simeq 10\,\phi_s \#4\ @\ 10\ cm$$

$$\frac{11.94}{1.27} \simeq 9\phi_s \#4\ @\ 11\ cm$$

$$\frac{6.18}{1.27} \simeq 5\phi_s \#4\ @\ 20\ cm$$

Areas de acero por contracción y temperatura

(Se supone que la estructura se encuentra protegida de la intemperie)($\rho_s = 0.2\%$). A la intemperie se aplicará $\rho_s = 0.3\%$.

$$A_{st} = 0.002 \times 15 \times 100 = 3.00\ cm^2$$

$$\text{Con } \phi_s \#3 = \frac{3.00\ cm^2}{0.71\ cm^2} \simeq 5\phi_s \#3\ @\ 20\ cm$$

Esfuerzo cortante

$V_{máx.} = 3606$ Kg

Tomando en cuenta las especificaciones:

$$\frac{M}{Vd} \leq 2 \quad \therefore \quad \frac{279500}{3606 \times 15} \simeq 5.16 > 2$$

Como la relación es mayor que dos y, además, b, es mayor que cuatro veces el peralte efectivo, d, tendremos:

Cuando la relación de claro a peralte, no es menor de cinco, la fuerza que toma el concreto para absorber el cortante, se calculará con la expresión:

Si $\rho_s < 0.01$ $\quad V_{CR} = F_R\, bd\,(0.2 + 30\rho_s)\sqrt{f'_c}$

Si $\rho_s \geq 0.01$ $\quad V_{CR} = 0.5\, F_R\, bd\sqrt{f'_c}$

En ningún caso se tomará V_{CR} mayor que

$$1.5\, F_R\, bd\sqrt{f'_c}$$

En nuestro ejemplo

$$\frac{L}{h} = \frac{440 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} \simeq 24 > 5$$

y como $\rho_s < 0.01$, aplicamos la expresión que dice

$$V_{CR} = 0.8 \times 100 \times 15\,(0.2 + 30 \times 0.012)\sqrt{250} = 10624 \text{ Kg}$$

Por lo tanto

$$V_{CR} > V_{máx.} \text{ (Correcto)}$$

En la fig. 13.11 se presenta un corte longitudinal de la losa mostrando sus armados.

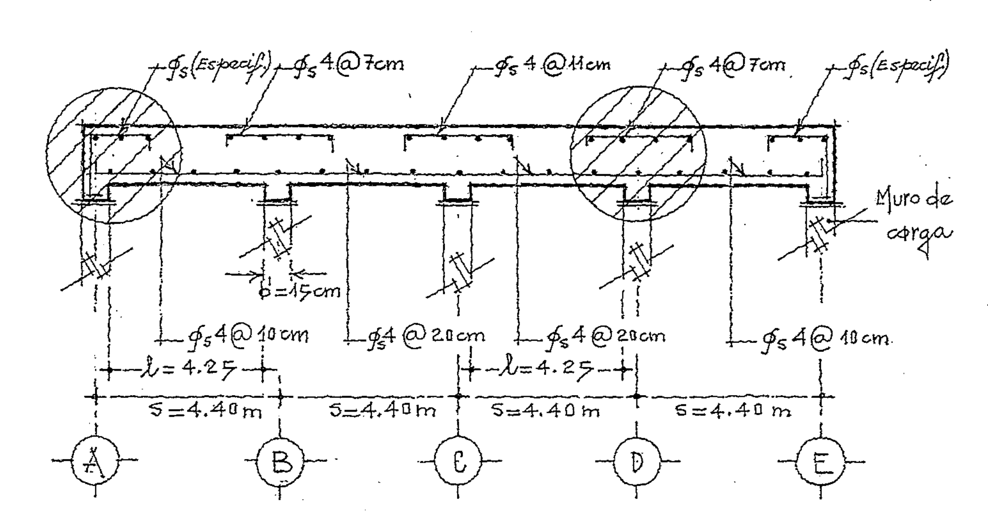
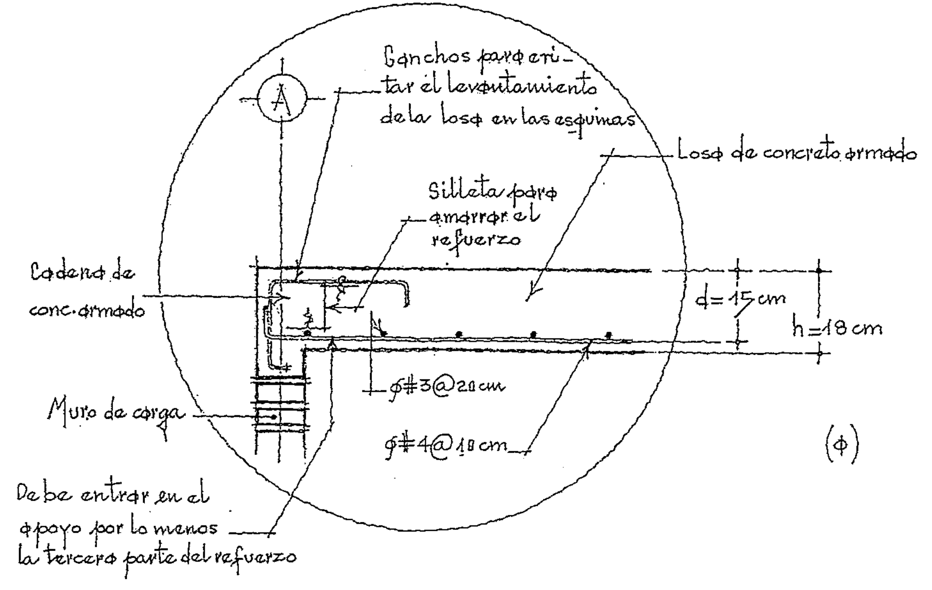


Fig. 13.11. Corte longitudinal de la Losa. Armados.

En las figs. 13.12 y 13.13, se presentan detalles de armados de la losa.

Fig. 13.12. Losa libremente apoyada. Armados, (a).



El constructor deberá colocar las varillas de la losa siguiendo un sentido práctico, aunque a veces la separación de las varillas difiera un poco de los coeficientes aplicados.

El Reglamento dice:

En extremos libremente apoyados, el refuerzo de tensión para momento positivo máximo, se prolongará sin doblar hasta dentro del apoyo, por lo menos la tercera parte de dicho refuerzo. En extremos continuos se prolongará la cuarta parte.

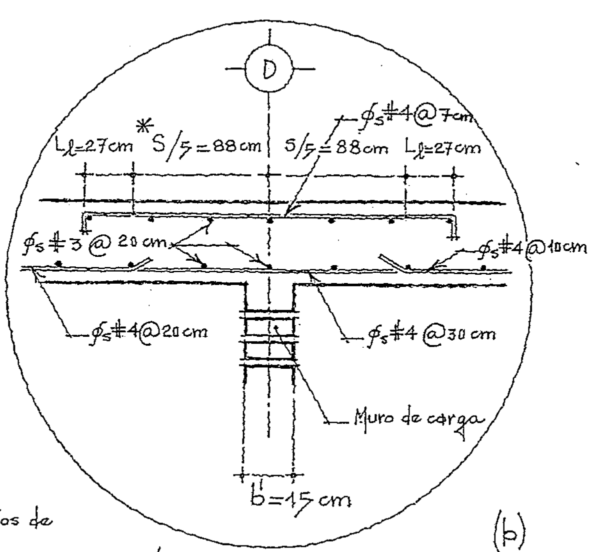
Fig. 13.13. Losa continua. Armados, (b).

En un apoyo el refuerzo negativo se prolongará más allá del punto de inflexión, como mínimo la tercera parte del refuerzo con una longitud no menor que:

a) *Un peralte efectivo,* $d = 15 cm$

b) $12 d_b = 12 \times 1.27 cm \simeq 15 cm$

c) $L_\ell = 425/16 \simeq 27 cm$ (*Se toma este valor*).



* Es práctico considerar para los puntos de inflexión una distancia igual a S/5 ∴ 440 cm/5 = 88 cm.

Referencias bibliográficas Capítulo 13

ACI 318-83, "Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado," México, 1984

ACI 318-71, "Building Code Requeriments for Reinforced Concrete," Detroit, 1971.

Comité ACI 340, "Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77", Detroit, 1981.

Corley, W. G., Sozen, M. A., y Siess, C. P., "The Equivalent-Frame Analysis for Reinforced Concrete Slabs," Civil Engineering Studies, Structural Research series núm. 218, University of Illinois, 1961.

Hatcher, D.S., Sozen, M.A., y Siess, C. P., "Test of a Reinforced Concrete Flat Plate," Proceedings, ASCE, 1965.

Portland Cement Association, "Continuity in Concrete Building Frames," Chicago, 3a. edición.

Thor Germundsson, Chairman, "Reinforced Concrete Handbook," ACI Committee 317, Detroit, 1955.

"Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal," México, 1988.

14

LOSAS QUE TRABAJAN EN DOS DIRECCIONES

14.1. Generalidades

Las losas son elementos estructurales horizontales o con cierta inclinación destinadas a soportar cargas vivas, muertas o accidentales para transmitirlas a elementos verticales de apoyo, como son los muros de carga y las columnas.

La relación entre sus lados a_2/a_1 es igual o menor que 1:5, trabajan en dos direcciones y se apoyan en dos lados contiguos, en tres o en cuatro lados, con flexión en dos direcciones. Se deforman en curvatura doble, figs. 14.1 y 14.2.

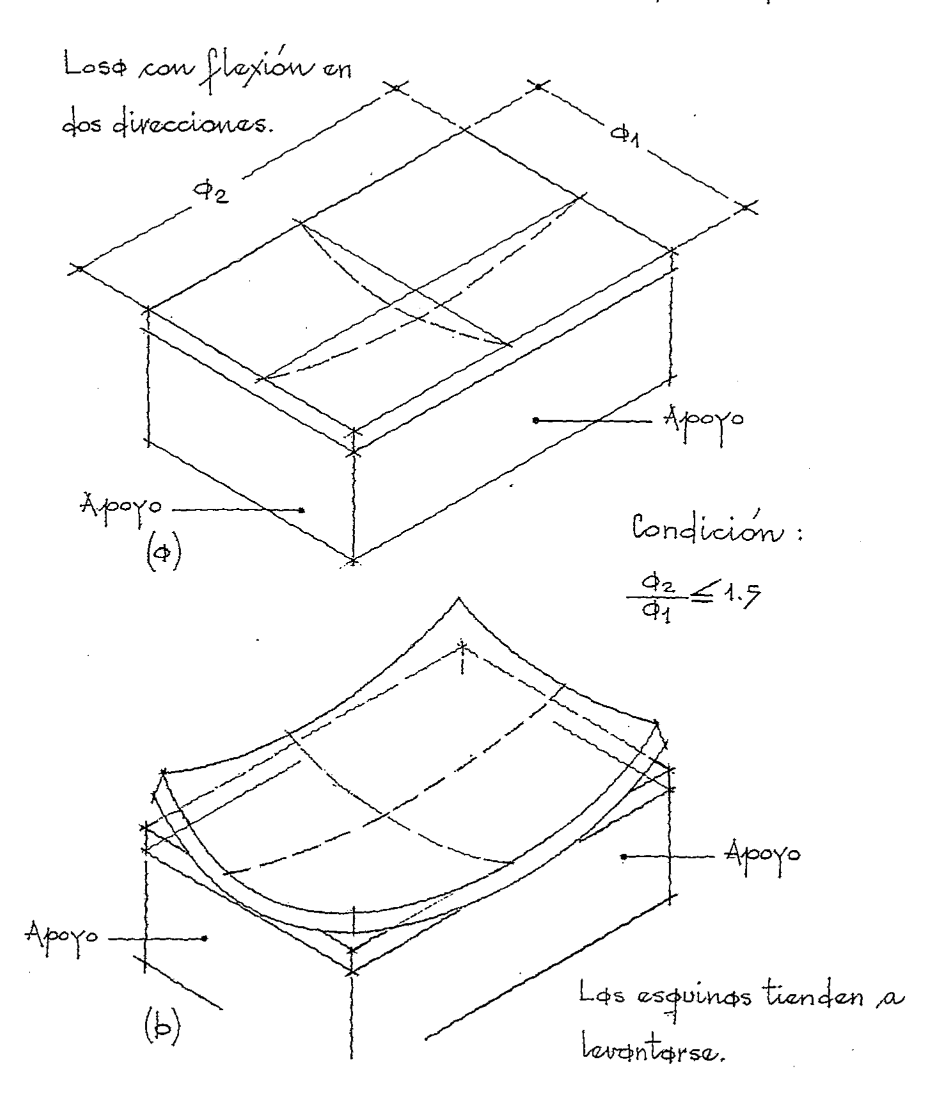


Fig. 14.1. Losa con flexión en dos direcciones. Se deforma en curvatura doble, (a).

Fig. 14.2. En las esquinas se producen momentos negativos, (b).

Para losas apoyadas o empotradas en todo su perímetro el Reglamento de Construcciones para el D.F., establece:

a) *Los momentos flexionantes producidos por cargas uniformemente repartidas se pueden obtener utilizando los coeficientes dados en la Tabla 4.1* del mencionado reglamento, siempre que se cumplan las siguientes limitaciones:*

1. Los tableros serán rectangulares.
2. Las cargas en los tableros serán uniformes.
3. En un apoyo común de dos tableros juntos, los momentos negativos no serán diferentes entre sí más del 50% con respecto al menor de ellos.
4. Entre la carga viva y la muerta la relación no será mayor de 2.5 para losas monolíticas con sus apoyos, ni mayor de 1.5 para otros casos.

Cuando la relación, m, entre ambos claros resulte con valores intermedios, se interpolará linealmente.

b) *Secciones críticas y franjas de refuerzo.*

Para momento positivo . . . En las líneas medias.

Para momento negativo . . . En los bordes de la losa.

Para la colocación del acero la losa se considera dividida, en cada dirección, en dos franjas extremas y una central, figura 14.3.

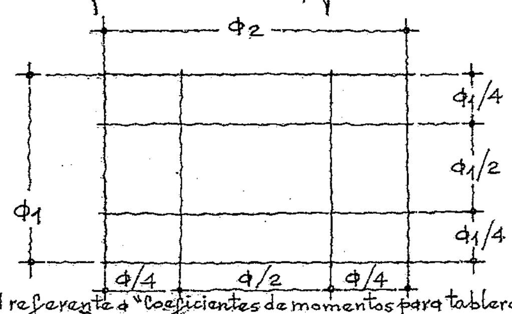


Fig. 14.3. División de la losa en franjas.

*Véase la tabla 14.1 referente a "Coeficientes de momentos para tableros rectangulares".

Cuando la relación de claro corto a largo sea mayor de 0.5 la franja central será igual a la mitad del claro perpendicular a ella, y cada franja extrema igual a la cuarta parte del mismo. Para relaciones de claro corto a largo menores de 0.5, la franja central perpendicular al lado largo tendrá un ancho igual a $a_2 - a_1$, y cada franja extrema igual a $a_1/2$, fig. 14.4.

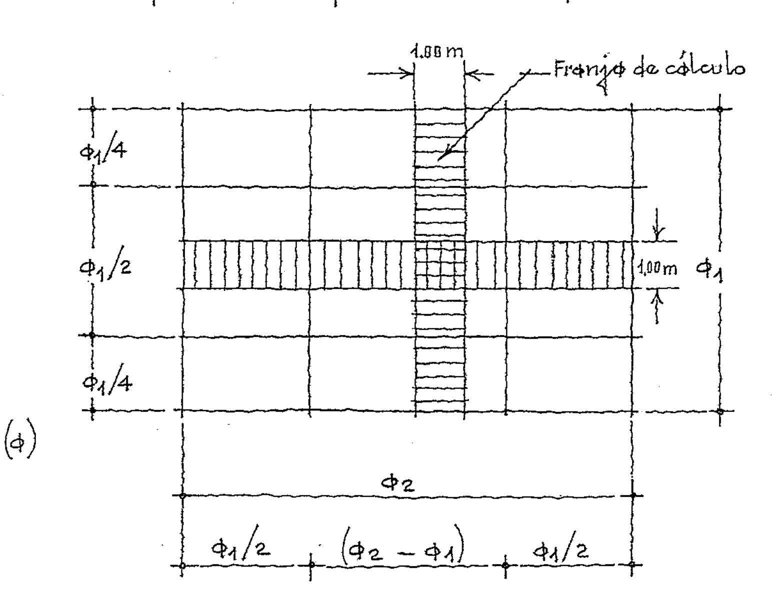


Fig. 14.4. División de la losa en franjas, (a). Para calcular la losa resulta conveniente trabajar con una franja de 1.00 m de ancho en ambos sentidos.

Para momento positivo el punto de inflexión se tomará igual a 1/6 del claro corto desde los bordes del tablero, y para momento negativo a 1/5 del claro corto desde los bordes de la losa, fig. 14.5.

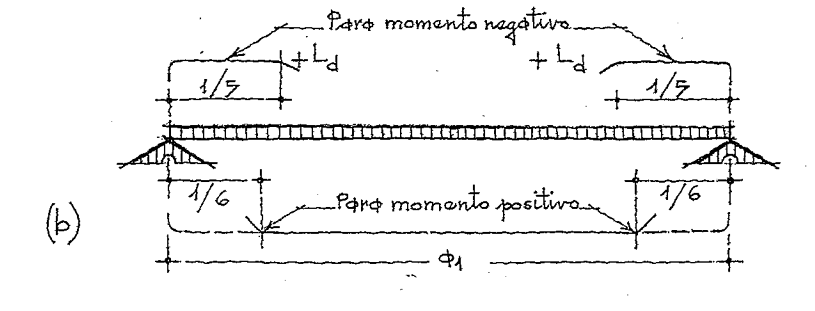


Fig. 14.5. Localización de los puntos de inflexión, (b).

c) *Distribución de momentos entre tableros adyacentes.*

Cuando los momentos en dos tableros adyacentes son diferentes, se distribuirán 2/3 del momento en desequilibrio entre los dos tableros si éstos son monolíticos con sus apoyos, o la totalidad de dicho momento si no lo son.

Para que la distribución sea válida se supondrá que la rigidez del tablero es proporcional a d^3/a_1.

d) *Porcentaje mínimo de acero y separación máxima del refuerzo.*

El porcentaje mínimo de acero será del 0.2% para elementos estructurales protegidos de la intemperie, y 0.3% para aquellos expuestos a ella.

El 0.3% se aplicará también a aquellos elementos estructurales que estén en contacto directo con el terreno.

Cuando la losa se encuentre sometida a cargas concentradas superiores a 1000 Kg, la separación del refuerzo no excederá de 2.5 veces el peralte efectivo de la losa.

Para cambios volumétricos la separación del refuerzo no excederá de 50 cm ni de 3.5 x_1*.

e) *Peralte mínimo de la losa.*

Cuando se utilice la tabla de coeficientes para momentos en el cálculo de la losa, podrá omitirse el cálculo de deflexiones si el peralte no es

* x_1, es la dimensión mínima del miembro medida perpendicularmente al refuerzo.

menor que el perímetro del tablero entre 300.

En lados discontinuos la longitud se aumentará 50% cuando los apoyos de la losa y la losa no son monolíticos, y 25% cuando sí lo sean.

La limitación es aplicable cuando

$$f_s \leq 2100\ Kg/cm^2 \quad y \quad w \leq 380\ Kg/m^2$$

para otras combinaciones de f_s y w, el peralte efectivo mínimo se obtiene multiplicando el valor obtenido por

$$0.034 \sqrt[4]{f_s w}$$

Por sencillez, se puede tomar el espesor de la losa con la especificación

$$h \geq \frac{Perímetro}{180}$$, y dar un recubrimiento libre de 2 cm.

f) Resistencia a fuerza cortante.

Se supondrá que la sección crítica se localiza a un peralte efectivo del paño de la losa. La resistencia del concreto a fuerza cortante se supone igual a

$$V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$$

Es recomendable que el esfuerzo cortante quede limitado a la resistencia proporcionada por el concreto.

A continuación se presenta la Tabla 14.1 que muestra los coeficientes para obtener los momentos en la losa siempre y cuando los tableros presenten claros regulares y también cargas regulares uniformes.

Tabla 14.1

Coeficientes de momentos para tableros rectangulares (*Franjas Centrales*)

Para las franjas extremas se multiplicarán los coeficientes dados por 0.60.

Tablero	Momento	Claro	m = 0, I	0, II	0.5, I	0.5, II	0.6, I	0.6, II	0.7, I	0.7, II	0.8, I	0.8, II	0.9, I	0.9, II	1.0, I	1.0, II
Interior Todos los bordes continuos	Negativo en bordes interiores	Corto	998	1018	553	565	489	498	432	438	381	387	333	338	288	292
		Largo	516	544	409	431	391	412	371	388	347	361	320	330	288	292
	Positivo	Corto	630	668	312	322	268	276	228	236	192	199	158	164	126	130
		Largo	175	181	139	144	134	139	130	135	128	133	127	131	126	130
De borde Un lado corto discontinuo	Negativo en bordes interiores	Corto	998	1018	568	594	506	533	451	478	403	431	357	388	315	346
		Largo	516	544	409	431	391	412	372	392	350	369	326	341	297	311
	Negativo en bordes discontinuos	Largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0
	Positivo	Corto	630	668	329	356	292	306	240	261	202	219	167	181	133	144
		Largo	179	187	142	149	137	143	133	140	131	137	129	136	129	135
De borde Un lado largo discontinuo	Negativo en bordes interiores	Corto	1060	1143	583	624	514	548	453	481	397	420	346	364	297	311
		Largo	587	687	465	545	442	513	411	470	379	426	347	384	315	346
	Negativo en bordes discontinuos	Corto	651	0	362	0	321	0	283	0	250	0	219	0	190	0
	Positivo	Corto	751	912	334	366	285	312	241	263	202	218	164	175	129	135
		Largo	185	200	147	158	142	153	138	149	135	146	134	145	133	144
De esquina Dos lados adyacentes discontinuos	Negativo en bordes interiores	Corto	1060	1143	598	653	530	582	471	520	419	464	371	412	324	364
		Largo	600	715	475	564	455	541	429	506	394	457	360	410	324	364
	Negativo en bordes discontinuos	Corto	651	0	362	0	321	0	277	0	250	0	219	0	190	0
		Largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0
	Positivo	Corto	751	912	358	416	306	354	259	298	216	247	176	199	137	153
		Largo	191	212	152	168	146	163	142	158	140	156	138	154	137	153
Aislado Cuatro lados discontinuos	Negativo en bordes discontinuos	Corto	570	0	550	0	530	0	470	0	430	0	380	0	330	0
		Largo	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0
	Positivo	Corto	1100	1670	830	1380	800	1330	720	1190	640	1070	570	950	500	830
		Largo	200	250	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830

Relación entre los lados corto y largo, $m = a_1 / a_2$

Caso I. Losa colada monolíticamente con sus apoyos.

Caso II. Losa no colada monolíticamente con sus apoyos.

Los coeficientes multiplicados por $10^{-4} w a_1^2$ dan momentos por unidad de ancho.

Para el caso I, a_1 y a_2 son claros libres entre paños de vigas. Para el caso II, a_1 y a_2 son los claros entre ejes, pero sin exceder el claro libre más dos veces el espesor de la losa.



Las losas trabajando en dos direcciones (*Losas perimetrales*), también pueden ser diseñadas utilizando el método de las rigideces relativas o igualación de las deflexiones máximas de la losa.

A continuación se exponen ejemplos empleando ambos procedimientos.

Ejemplo ilustrativo (Método "Coeficientes de Momentos")

Diseñar la losa rectangular libremente apoyada y sometida a la acción de cargas permanentes y variables, figs. 14.6 a 14.8.

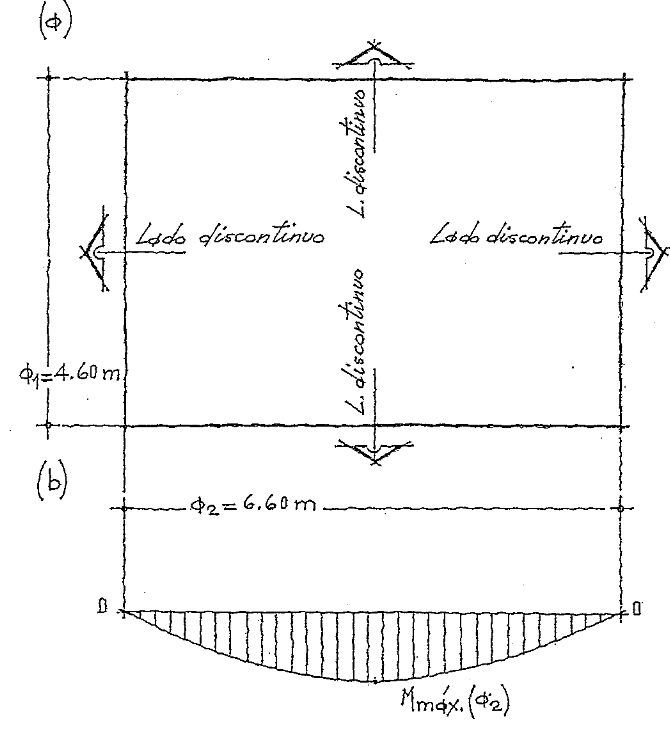


Fig. 14.6. Planta de la losa, (a).

Fig. 14.7. Gráfica de momento flexionante, (b).

Datos:

$f'_c = 200$ Kg/cm²

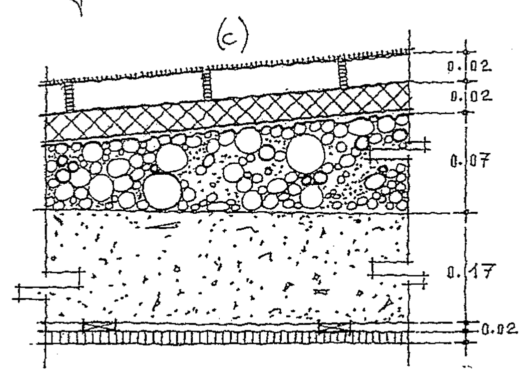
$f_y = 4200$ Kg/cm²

$F_c = 1.4$

$$\text{Relación} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6.60}{4.60} \approx 1.43$$

$$\therefore 1.43 < 1.50$$

Carga en la losa



Enladrillado, lechadeado y escobillado — 0.02

Mortero de cemento-arena — 0.02

Tezontle (*promedio*) — 0.07

Concreto armado (*losa*) — 0.17

Plafón de madera — 0.02

Fig. 14.8. Corte indicando los materiales que conforman el techo, (c).

Losa de concreto armado	= 0.17 × 2400	" " = 408	" (supuesto)
Relleno de tezontle	= 0.07 × 1200	" " = 84	"
Bastidor y plafón de madera	= 0.02 × 600	" " = 12	"
	Carga Muerta	= 564	Kg/m²
	Carga Viva	= 156	" (supuesto)
	Suma C.M. + C.V.	= 720	Kg/m²

Aplicando el factor de carga (F_C), se tiene

$$720 \times 1.4 \simeq 1010 \ Kg/m^2$$

Cuando

$$f_s = 2100 \ Kg/cm^2 > 2000 \ Kg/cm^2$$

$$W = 1010 \ Kg/m^2 > 380 \ Kg/cm^2$$

el reglamento determina que el perímetro sufre corrección, veamos

$$0.034 \sqrt[4]{f_s \, W} = 0.034 \sqrt[4]{2100 \times 1010} \simeq 1.29 \ (\text{factor de corrección})$$

Perímetro final

$$1.50 \left[(2 \times 660) + (2 \times 460) \right] = 3360 \ cm$$

$$\therefore \ 3360 \times 1.29 \simeq 4334 \ cm$$

Obtención del peralte mínimo

$$d_{mín.} = \frac{4334}{300} \simeq 14.5 \ cm \quad \therefore \ h = d + 1' = 17 \ cm$$

Tomando los coeficientes de la tabla 14.1 para las franjas centrales, obtenemos:

Caso aislado (Cuatro lados discontinuos) $\therefore$ Relación $= \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{4.60}{6.60} \simeq 0.70$

Coeficientes:

- Negativos en bordes discontinuos
  - Claro corto, $\phi_1 = 0$
  - Claro largo, $\phi_2 = 0$
- Positivos
  - Claro corto, $\phi_1 = 1190$
  - Claro largo, $\phi_2 = 830$

Obtención de los momentos

$$10^{-4} W \phi_1^2 = 0.0001 \times 1010 \times 4.60^2 \simeq 2.14 \text{ Kg m}$$

Por lo tanto

Claro corto, $M_{\phi_1} = 2.14 \times 1190 \simeq 2547$ Kg m

Claro largo, $M_{\phi_2} = 2.14 \times 830 \simeq 1776$ Kg m

Verificación del peralte supuesto:

$$d = \sqrt{\frac{M_{\phi_1}}{F_R\, b\, f'_c\, y(1-0.59y)}} = \sqrt{\frac{254700}{0.9 \times 100 \times 200 \times 0.05(1-0.59 \times 0.05)}}$$

$$d \simeq 17 \text{ cm} \therefore h = 19 \text{ cm}$$

Los dos peraltes resultaron prácticamente iguales

$$y = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c}, \quad \rho_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y} = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200} \simeq 0.0024$$

$$\therefore \; y = 0.0024 \frac{4200}{200} = 0.05$$

Cálculo de las áreas de acero

$$M_U = F_R A_s f_Y d(1-0.59y)$$

$$\therefore A_s = \frac{M_U}{F_R f_Y d(1-0.59 \times 0.05)} = \frac{254700}{0.9 \times 4200 \times 17(1-0.0295)} \simeq 4.10 \text{ cm}^2$$

Por comparación obtenemos la otra área de acero

254700 . . . . 4.10

177600 X

$$\therefore \; X = \frac{177600 \times 4.10}{254700} \simeq 2.86 \text{ cm}^2$$

El reglamento especifica un área de acero mínima de

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y} bd = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200} 100 \times 17 = 4.0 \text{ cm}^2$$

El acero en el claro largo será por especificación.

Con ϕ_s #3

$$\text{Separación} = \frac{4.10}{0.71} \simeq 6\, \phi_s \#3 \;@\; 17 \text{ cm}$$

Al respecto el reglamento dice:

La separación del refuerzo no excederá de 50 cm ni de 3.5 veces el espesor de la losa.

Esfuerzo cortante

La fuerza cortante se calculará con la expresión

$$V = \frac{\left(\frac{\phi_1}{2} - d\right) w}{\left[1 + \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^6\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{4.60}{2} - 0.17\right) 1010}{\left[1 + \left(\frac{4.60}{6.60}\right)^6\right]} = \frac{2151}{[1 + 0.1147]} = \frac{2151}{1.1147} = 1930 \text{ Kg}$$

y

$$V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 0.5 \times 0.8 \times 100 \times 17 \sqrt{160}$$

$$\therefore V_{CR} = 8602 \text{ Kg} > V \quad (\text{correcto})$$

Armados en la losa, figs. 14.9 y 14.10

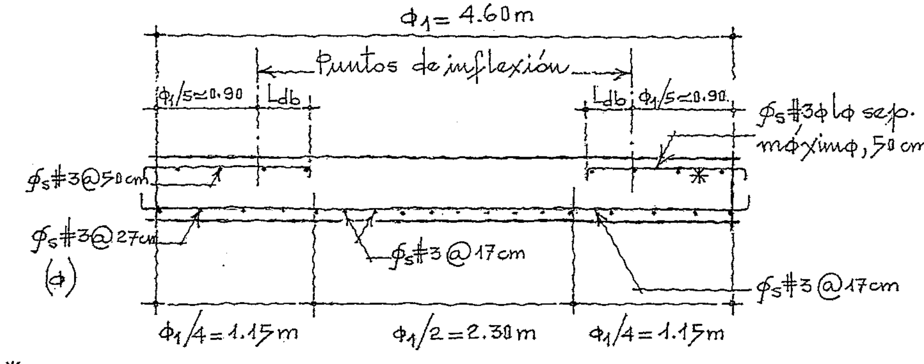


Fig. 14.9. Corte transversal, claro ϕ_1, (a).

*En la parte superior de la losa se colocó refuerzo de acero para evitar que las esquinas se levanten.

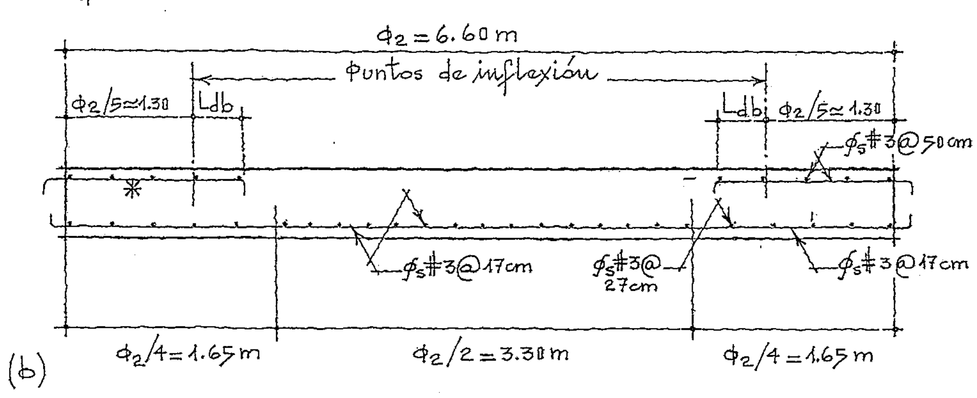


Fig. 14.10. Corte transversal, claro ϕ_2 (b).

La separación de las varillas es la misma en ambos sentidos, debido a que el área de acero por cálculo y por especificación resultaron prácticamente iguales. El área de acero resultó mínima.

a 14.13.

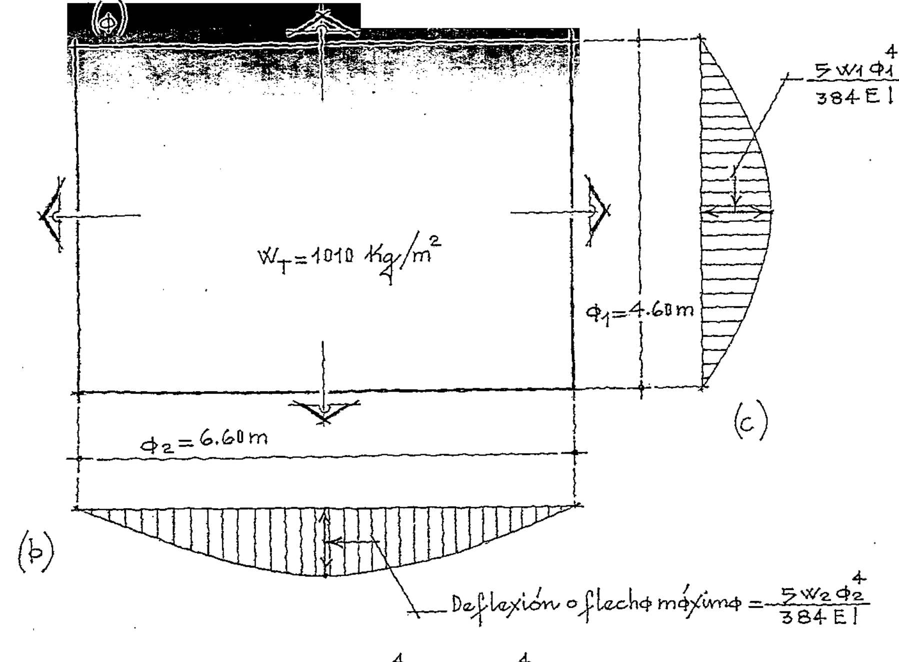


Fig. 14.11. Losa perimetral vista en planta, (a).

Fig. 14.12. Gráfica de momento flexionante, (b). Claro largo, ϕ_2.

Fig. 14.13. Gráfica de momento flexionante, (c). Claro corto, ϕ_1.

$$\frac{5 w_1 \phi_1^4}{384 EI} = \frac{5 w_2 \phi_2^4}{384 EI}$$

Anulando factores comunes e igualando flechas, se tiene

$$w_1 \phi_1^4 = w_2 \phi_2^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La primera condición de cálculo se cumple con la ecuación (1).

Para que se cumpla la segunda condición, será necesario que las cargas parciales $(w_1 + w_2)$ sean iguales a la carga total (w_T), veamos

$$w_1 + w_2 = w_T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\therefore \; w_1 = w_T - w_2$$

Substituyendo en la ecuación (1)

$$(w_T - w_2)\phi_1^4 = w_2 \phi_2^4 \; ; \quad w_T \phi_1^4 - w_2 \phi_1^4 = w_2 \phi_2^4$$

y

$$w_T \phi_1^4 = w_2 \phi_2^4 + w_2 \phi_1^4 \quad \therefore \quad w_T \phi_1^4 = w_2 (\phi_2^4 + \phi_1^4)$$

Finalmente

$$w_2 = \frac{\phi_1^4}{\phi_2^4 + \phi_1^4} w_T \text{ (Carga parcial en el sentido largo)}$$

Para la carga en el otro sentido

$$w_2 = w_T - w_1$$

$$w_1 \ell_1^4 = (w_T - w_1)\,\ell_2^4 \quad ; \quad w_1 \ell_1^4 = w_T \ell_2^4 - w_1 \ell_2^4$$

$$w_T \ell_2^4 = w_1 \ell_1^4 + w_1 \ell_2^4$$

$$\therefore \quad w_T \ell_2^4 = w_1 (\ell_1^4 + \ell_2^4)$$

Finalmente

$$w_1 = \frac{\ell_2^4}{\ell_1^4 + \ell_2^4}\, w_T \quad \text{(carga parcial, sentido corto)}$$

Dando valores a las literales, obtenemos:

$$w_1 = \frac{6.60^4}{4.60^4 + 6.60^4}\, w_T = \frac{1897}{448 + 1897}\, w_T = 0.81\, w_T$$

$$w_2 = \frac{4.60^4}{6.60^4 + 4.60^4}\, w_T = \frac{448}{1897 + 448}\, w_T = 0.19\, w_T$$

Por tanto

$$w_1 = 0.81 \times 1010 \simeq 818 \text{ Kg/m}^2$$

$$w_2 = 0.19 \times 1010 \simeq 192 \text{ Kg/m}^2$$

$$\underline{\underline{w_T = 1010 \text{ Kg/m}^2}}$$

Cálculo de los momentos

$$M_1 = \frac{w_1 \ell_1^2}{8} = \frac{818 \times 4.60^2}{8} \simeq 2164 \text{ Kgm}$$

$$M_2 = \frac{w_2 \ell_2^2}{8} = \frac{192 \times 6.60^2}{8} \simeq 1045 \text{ Kgm}$$

Cálculo del peralte efectivo

$$d = \sqrt{\frac{M_1}{F_R\, b\, f''_c\, q\,(1 - 0.59 \times 0.05)}} = \sqrt{\frac{216400}{0.9 \times 100 \times 200 \times 0.05\,(1 - 0.0295)}} \simeq 16 \text{ cm}$$

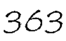
En el ejemplo anterior, $d \simeq 17$ cm *(resultados prácticamente iguales)*

Las áreas de acero se obtienen

$$A_s = \frac{216400}{F_R\, f_y\, d\,(1 - 0.59 \times 0.05)} = \frac{216400}{0.9 \times 4200 \times 16\,(1 - 0.0295)} \simeq 3.69 \text{ cm}^2$$

Area de acero mínima por especificación

$$A_{s\,mín.} = 4.0 \text{ cm}^2$$



El esfuerzo cortante no falla ya que

$$V_{CR} > V$$

En las figs. 14.14 y 14.15 se presentan los armados de la losa vistos en planta.

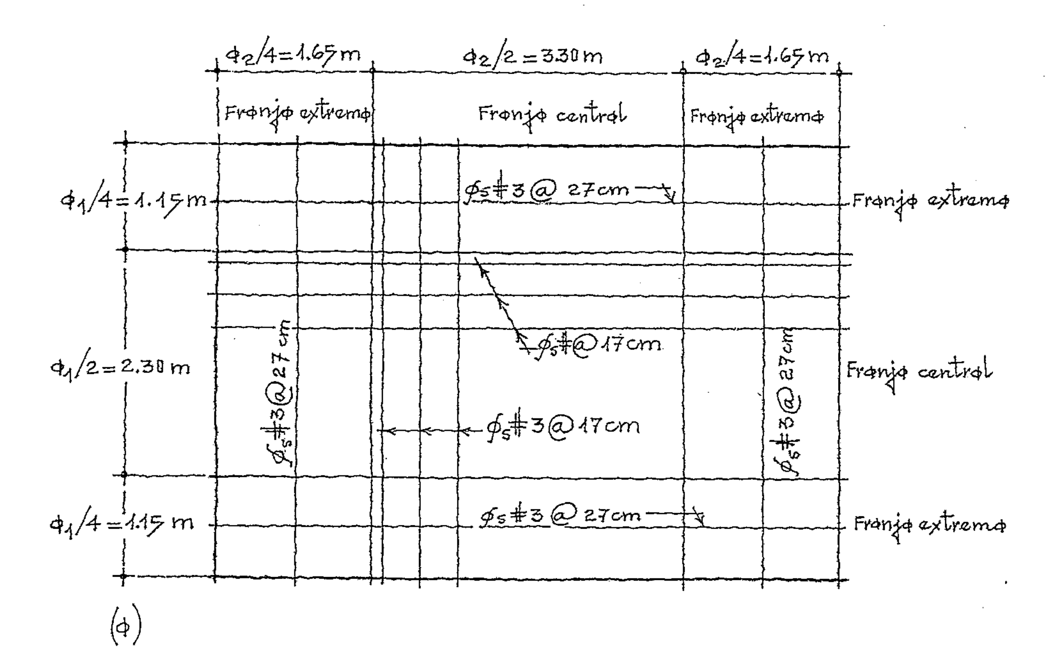


Fig. 14.14. Planta de la losa mostrando los armados en ambos sentidos, (a).

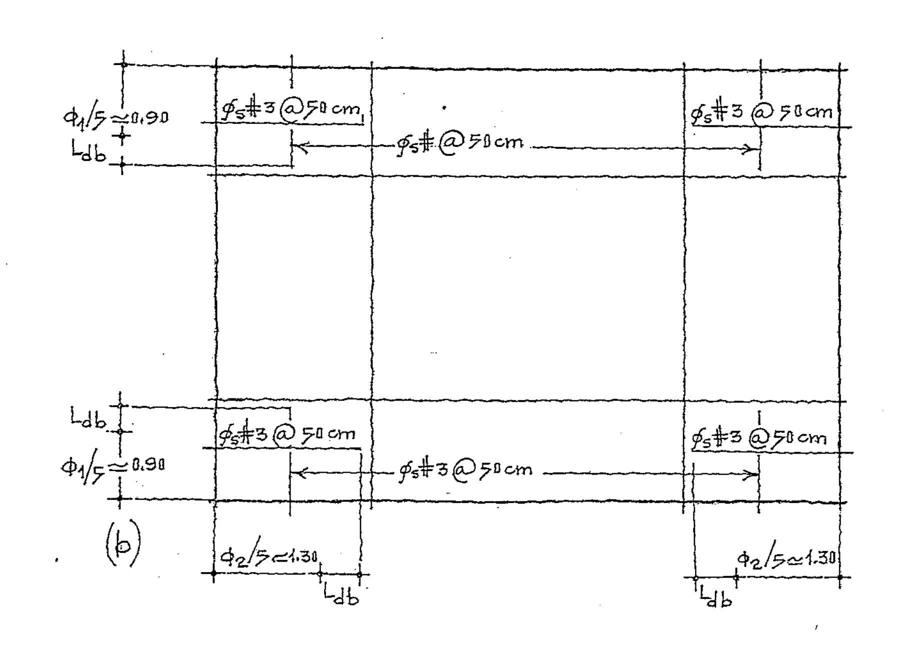


Fig. 14.15. Planta de la losa mostrando el acero en la parte superior del tablero (esquinas), (b).

Referencias bibliográficas

Capítulo 14

"Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el D.F.", México, 1988.

ACI 318-83, "Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado" México, 1984.

Guralnick, S.A., y La Fraugh, R.W., "Laboratory Study of a Forty-Five-Foot Square Flat Plate Structure", ACI Journal, Proceedings, 1963.

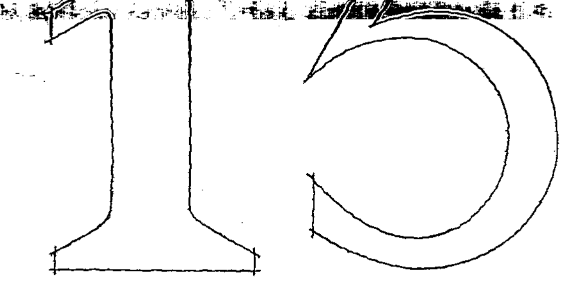
Nwemark, H.M., y Slater, W.A., "Moments and stresses in Slabs, ACI, 1921.

Jirsa, J.O., Sozen, M.A. y Siess, C.P., "Pattern Loadings on reinforced Concrete Floor Slabs", Proceedings, ASCE, 1969.

Harry Parker, M.C., "Diseño Simplificado de Concreto Reforzado", Limusa, México, 1982.

Ferguson. Phil, M., "Teoría Elemental del Concreto Reforzado", E. Continental, México, 1965.

Lin, T.Y., y Stotesbury, S.D., "Conceptos y Sistemas Estructurales para Arquitectos e Ingenieros", Limusa, México, 1991.



LOSAS CON CARGAS LINEALES Y CARGAS CONCENTRADAS

15.1. Generalidades

Las losas trabajando en una o dos direcciones, además de la carga uniforme distribuida a la que normalmente se encuentran sometidas, pueden actuar cargas lineales producidas por muros y también cargas concentradas que se tendrán que analizar para evitar la falla de la losa.

15.2. Cargas lineales

Cuando un muro se apoya sobre una losa, las cargas que recibe el muro y el peso propio del mismo se pueden tomar como cargas uniformemente distribuidas equivalentes, fig. 15.1.

En efecto, el Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

"La carga uniforme equivalente, se obtiene dividiendo el peso del muro entre el área de la losa y el resultado obtenido se multiplicará por el factor correspondiente de la tabla 15.1"

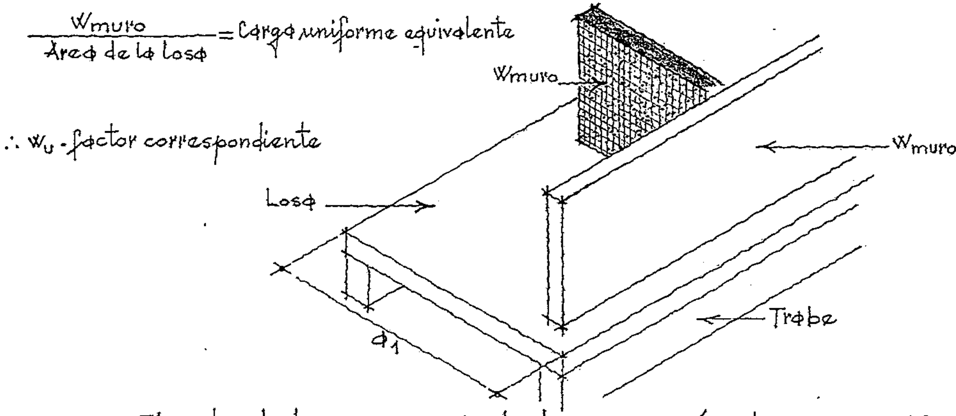
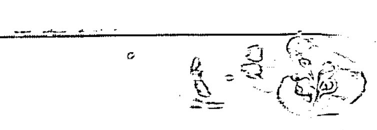


Fig. 15.1. Muros apoyados sobre la losa.

El valor de la carga equivalente se sumará a la carga uniformemente repartida que actúa en la losa.

Tabla 15.1

	Relación de lados, $m = a_1/a_2$ 0.5	0.8	1.0
Muro paralelo al lado corto	1.30	1.50	1.60
Muro paralelo al lado largo	1.80	1.70	1.60



Los factores indicados en la tabla podrán usarse cuando la relación de carga lineal a carga total no es mayor de 0.5.

Cuando resulten valores intermedios se interpolará linealmente.

15.3. Cargas concentradas

Una carga concentrada aplicada sobre una losa puede producir la falla por penetración en el perímetro donde se aplica la carga, o bien, fallar por flexión bajo la carga (generalmente cuando se trata de cargas fuertes).

Al respecto el Reglamento de Construcciones para el D.F., establece:

"Cuando una losa perimetral deba soportar una carga concentrada aplicada en la zona definida por el perímetro de las franjas centrales, la suma de los momentos resistentes, por unidad de ancho, positivo y negativo, se incrementará en cada dirección la cantidad de

$$\frac{P}{2\pi}\left(1-\frac{2r}{3R}\right),$$ *en todo punto del tablero".*

siendo

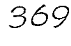
P, carga concentrada sobre la losa.

r, radio del círculo de área igual a la de aplicación de la carga.

R, distancia del centro de la carga al borde más cercano a ella.

La especificaciones anteriores se aplicarán también a las losas trabajando en una dirección, siempre que la distancia de la carga a un borde no sea menor que la mitad del claro, además, la relación de ancho a largo no será menor de $\pi/2$.

A continuación se analizan unos ejemplos ilustrativos para losas con cargas lineales (*muros*) y cargas concentradas (*columnas*).



Ejemplo ilustrativo

Diseñar la losa sometida a una carga uniforme repartida, más la carga de un muro cuyas dimensiones aparecen en las figs. 15.2 a 15.4.

La losa suponemos que tiene continuidad por sus cuatro lados, y sus apoyos se encuentran colados monolíticamente con ella.

Datos

$f'_c = 250$ Kg/cm²

$f_Y = 4200$ Kg/cm²

$F_c = 1.5$

Fig. 15.2. Planta de la losa, (a).

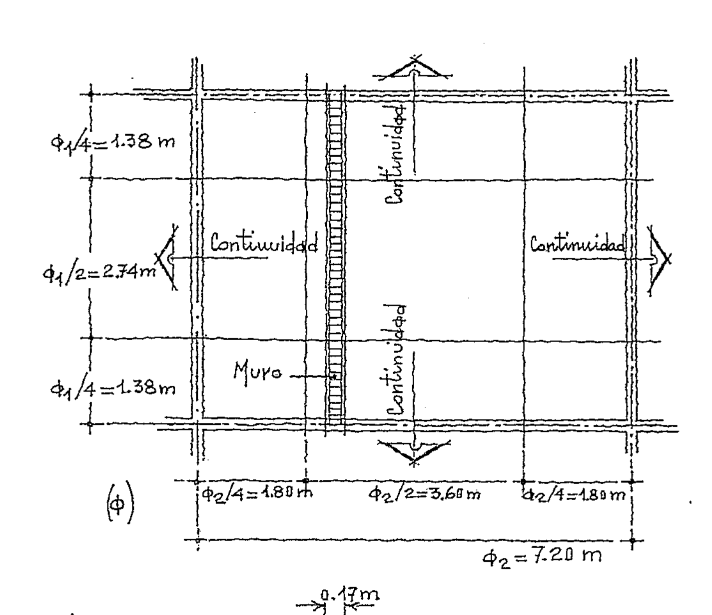


Fig. 15.3. Corte transversal de la losa. Claro a_2, (b):

0.17 m
Muro
H = 2.40 m
2 cm
2 cm
20 cm (Supuesto)
1.5 cm
Trabe
(b)

Fig. 15.4. Corte transversal. Detalle, (c).

Yeso
Muro de tabique
Alfombra
b. alfombra
Yeso
Pulido
Concreto
Yeso
(c)

Cargas en la losa

Alfombra y b. alfombra = 0.02×600 = 12 Kg/m²

Pulido de cemento-arena = 0.02×2000 = 40 "

Losa de concreto armado = 0.20×2400 = 480 "

Yeso y tirol = 0.015×1500 = 23 "

C.M. = 555 Kg/m²

C.V. = 245 Kg/m²

C.M. + C.V = 800 Kg/m²

Peso propio del muro

Tabique $= 0.14 \times 2.40 \times 5.50 \times 1500 \simeq 2770$ Kg

Yeso $= 0.04 \times 2.40 \times 5.50 \times 1500 \simeq 790$ Kg

3560 Kg

Sobrecarga en el muro (Supuesto) 7600 Kg

Carga sobre metro cuadrado para sumarla con la carga ya obtenida en la losa

$$\frac{3560 + 7600}{5.50 \times 7.20} = \frac{11160 \text{ Kg}}{39.60 \text{ m}^2} \simeq 282 \text{ Kg/m}^2$$

El resultado se multiplica por el factor de la tabla 15.1, veamos:

$$\text{Relación de lados, } m = \frac{a_1}{a_2} = \frac{5.50}{7.20} \simeq 0.77$$

Interpolando, se tiene

(Muro paralelo al lado corto) . . . $1.3 + 1.5 = 2.80/2 = 1.4$

$\therefore\ 282 \times 1.4 \simeq 395$ Kg/m^2

Carga total en la losa

$$800 + 395 = 1195 \text{ Kg/m}^2$$

Aplicando el factor de carga se obtiene finalmente

$$1195 \times 1.5 \simeq 1800 \text{ Kg/m}^2$$

Caso I (Losa colada monolíticamente con sus apoyos)

Losa interior (Todos los lados continuos)

Relación $\simeq 0.77$

Interpolando los valores indicados en la tabla 14.1, para tablero interior, Caso I, se tiene:

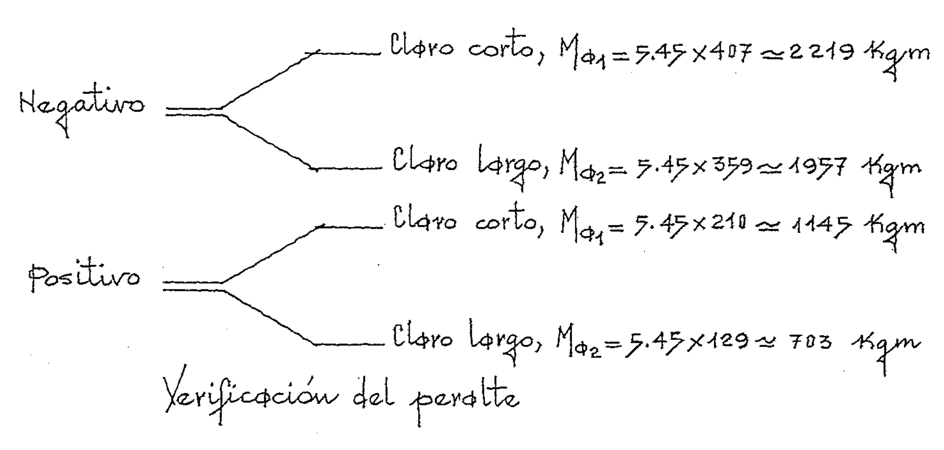
Negativo en bordes interiores
- Claro corto: $\frac{432 + 381}{2} \simeq 407$
- Claro largo: $\frac{371 + 347}{2} = 359$

Positivo
- Claro corto: $\frac{228 + 192}{2} = 210$
- Claro largo: $\frac{130 + 128}{2} = 129$

Obtención de los momentos

$$10^{-4} w \phi_1^2 = 0.0001 \times 1800 \times 5.50^2 \simeq 5.45 \text{ Kgm}$$

Por tanto



Verificación del peralte

$$d = \sqrt{\frac{M\phi_1}{F_R b f'_c y (1 - 0.59 y)}} = \sqrt{\frac{221900}{0.9 \times 100 \times 250 \times 0.044 (1 - 0.59 \times 0.044)}} \simeq 15.2 \text{ cm}$$

$$h = d + 1/2 \phi + r \simeq 18 \text{ cm}^*$$

*El espesor de la losa se supuso de 20 cm para calcular el peso propio de la misma, la diferencia no amerita recalcularse.

$$y = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c}, \quad y \quad \rho_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y} = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} \simeq 0.0026$$

$$y = 0.0026 \, \frac{4200}{250} \simeq 0.044$$

Corrección del perímetro de la losa

$$f_s = 2100 \text{ Kg/cm}^2 > 2000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$w_u = 1800 \text{ Kg/m}^2 > 380 \text{ Kg/m}^2$$

el perímetro debe ser corregido

$$0.034 \sqrt[4]{f_s w_u} = 0.034 \sqrt[4]{2100 \times 1800} \simeq 1.50 \text{ (factor de corrección)}$$

Perímetro final

$$1.25 \left[(5.50 \times 2) + (7.20 \times 2) \right] = 31.75 \text{ m}$$

$$\therefore 31.75 \times 1.50 \simeq 47.63 \text{ m}$$

Peralte mínimo

$$d_{mín.} = \frac{4763}{300} \simeq 15.90 \text{ cm}$$

Cálculo de las áreas de acero

$$M_U = F_R A_s f_y d(1-0.59y)$$

$$\therefore A_s = \frac{M_U}{F_R f_y d(1-0.59y)} = \frac{221900}{0.9\times4200\times15.9(1-0.59\times0.044)} \simeq 3.80\ cm^2$$

El reglamento especifica un área de acero mínima de

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} bd = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} 100\times15.9 = 4.19\ cm^2$$

Todas las áreas de acero serán por especificación.

La separación del acero no excederá de 50 cm ni de 3.5 veces el espesor de la losa.

Esfuerzo cortante

$$V = \frac{\left(\frac{a_1}{2}-d\right)w_U}{\left[1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^6\right]} = \frac{\left(\frac{5.50}{2}-0.159\right)1800}{\left[1+\left(\frac{5.50}{7.20}\right)^6\right]}$$

$$= \frac{4950}{[0.8]} \simeq 6188\ Kg$$

y,

$$V_{CR} = 0.5 F_R bd\sqrt{f_c^*} = 0.5\times0.8\times100\times15.9\sqrt{200}$$

$$\therefore V_{CR} = 8994\ Kg > 6188\ Kg\ (Correcto)$$

Armados en la losa, figs. 15.5 y 15.6

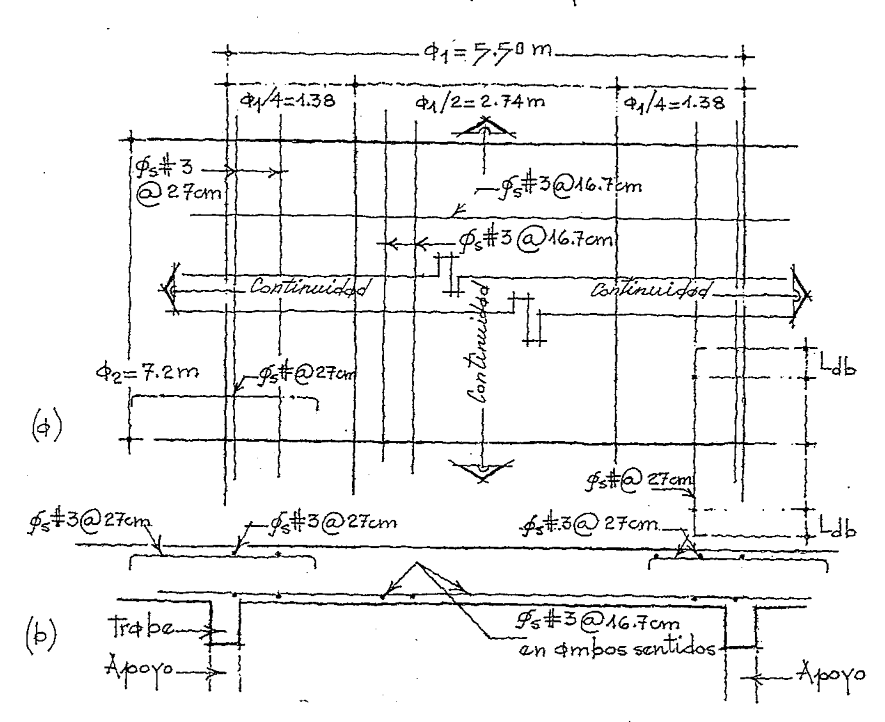


Fig. 15.5. Planta de la losa mostrando armados, (a).

Fig. 15.6. Corte transversal, claro a_1 (b).

Armados de la losa en el claro largo, a_2, figs. 15.7 a 15.9.

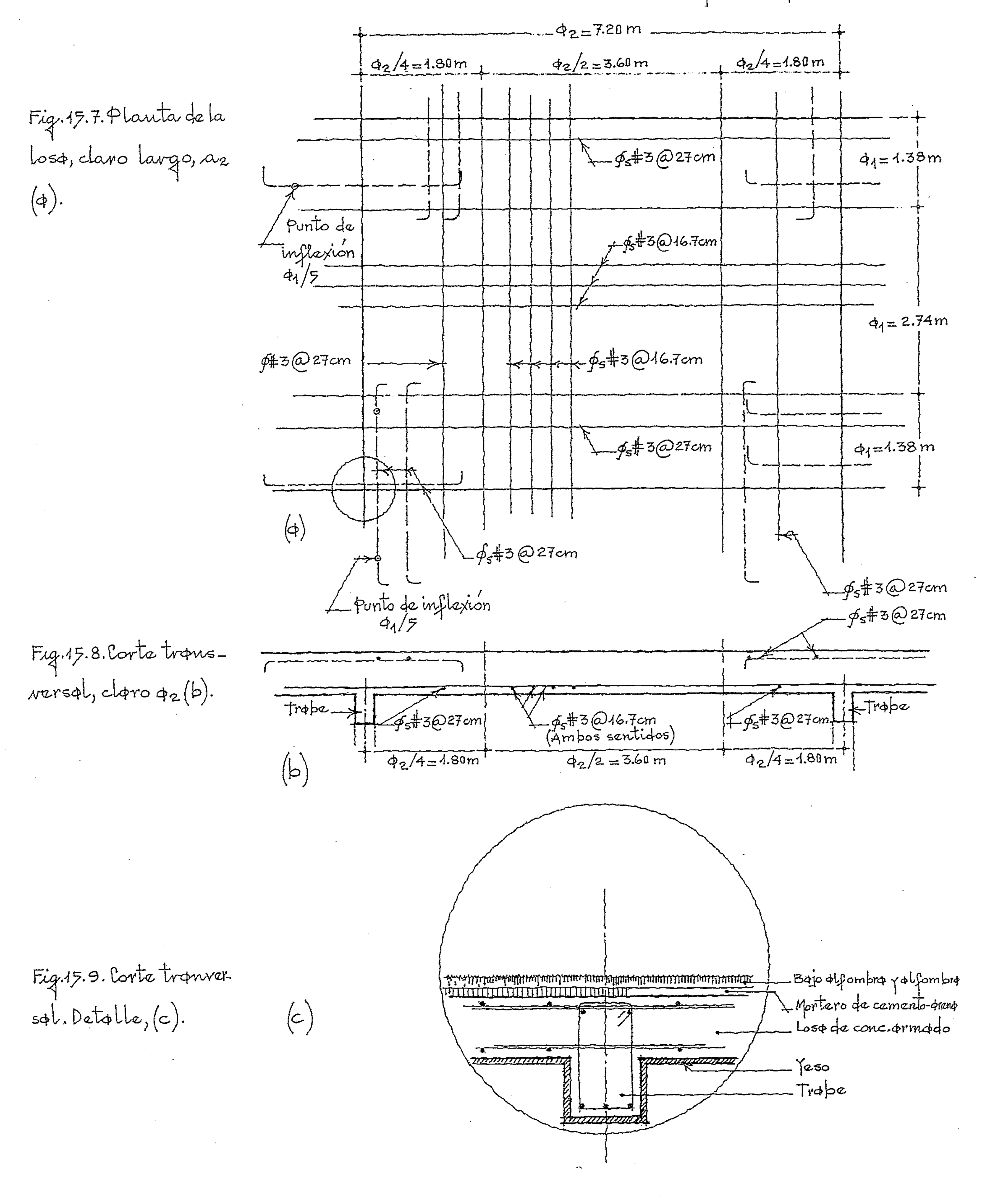


Fig. 15.7. Planta de la losa, claro largo, a_2 (a).

Fig. 15.8. Corte transversal, claro a_2 (b).

Fig. 15.9. Corte tranversal. Detalle, (c).

Ejemplo ilustrativo

Diseñar la losa sometida a una carga concentrada, más la carga uniformemente repartida de la losa.

Se supone que la losa tiene continuidad por sus cuatro lados, y sus apoyos se encuentran colados monolíticamente con ella, figs. 15.10 y 15.11.

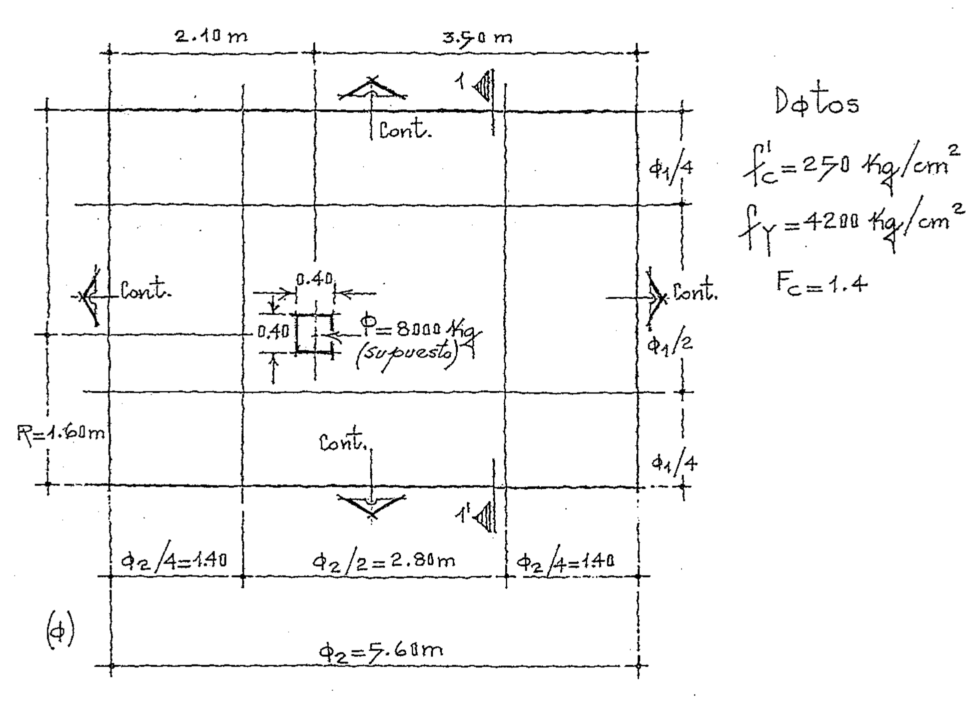


Fig. 15.10. Planta mostrando la ubicación de la carga concentrada, (a).

Datos

$f'_c = 250$ Kg/cm²

$f_y = 4200$ Kg/cm²

$F_c = 1.4$

R, es la distancia desde el centro de la carga al borde más cercano a ella.

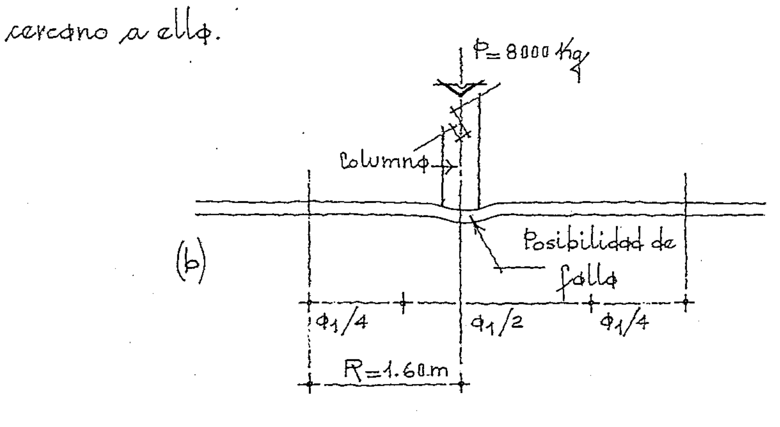


Fig. 15.11. Corte transversal, (b). La losa puede fallar bajo la carga.

Para evitar el cálculo de deflexiones el peralte efectivo no será menor de: $\frac{\text{Perímetro}}{300}$

Para calcular las cargas en la losa suponemos primeramente un espesor de 16 cm, veamos la fig. 15.12.

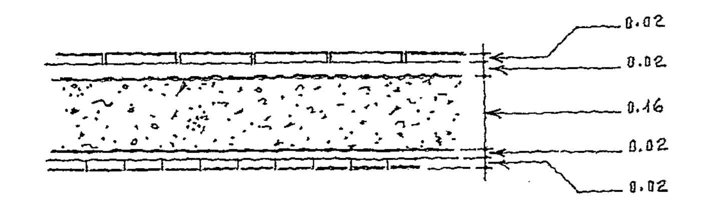


Fig. 15.12. Corte transversal mostrando los materiales que conforman la losa.

Loseta de barro . . .	. 0.02 × 1800 =	36	Kg/m^2
Mortero cemento-arena	. 0.02 × 2000 =	40	"
Losa de concreto armado	. 0.16 × 2400 =	384	"
Bastidor y duela . . .	. 0.02 × 700 =	14	"
	C.M. =	474	Kg/m^2
	C.V. =	226	Kg/m^2
	C.M.+C.V. =	700	Kg/m^2

Como la losa se supone colada monolíticamente con sus apoyos, el reglamento determina:

"La longitud de sus lados se incrementará un 25%."

Por lo tanto

$$1.25\left[(560\times 2)+(400\times 2)\right] = 2400 \text{ cm}$$

además

$$f_s = 2100\ Kg/cm^2 > 2000\ Kg/cm^2$$

y

$$W_U > 380\ Kg/m^2$$

el perímetro deberá ser corregido, veamos:

$$0.034\sqrt[4]{f_s\, W_U} = 0.034\sqrt[4]{2100\times 980}^{*} \simeq 1.29 \text{ (factor de corrección)}$$

$$\therefore 1.29\times 2400 = 3096 \text{ cm}$$

$$d_{mín.} = \frac{3096}{300} \simeq 11 \text{ cm (posteriormente se verificará)}$$

---

* $W_U = 700\ Kg/m \times F_c = 700\times 1.4 = 980\ Kg/m^2$

Caso I (Losa colada monolíticamente con sus apoyos)

Losa interior (Todos los lados continuos)

$$\text{Relación} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{4.00}{5.60} \simeq 0.72$$

Interpolando valores de la Tabla 14.1, se obtiene

Negativo en bordes interiores:
- Claro corto: $\frac{432+381}{2} \simeq 407$
- Claro largo: $\frac{371+347}{2} = 359$

Positivo:
- Claro corto: $\frac{228+192}{2} = 210$
- Claro largo: $\frac{130+128}{2} = 129$

$$\therefore 10^{-4} W a_1^2 = 0.0001 \times 980 \times 4.00^2 \simeq 1.57 \text{ Kgm}$$

Para la carga repartida:
- Negativo:
  - Claro corto, $M_{a_1} = 1.57 \times 407 \simeq 639$
  - Claro largo, $M_{a_2} = 1.57 \times 359 \simeq 564$
- Positivo:
  - Claro corto, $M_{a_1} = 1.57 \times 210 \simeq 330$
  - Claro largo, $M_{a_2} = 1.57 \times 129 \simeq 203$

Para la carga concentrada

$$\frac{P_U}{2\pi}\left(1 - \frac{2r^*}{3R}\right) = \frac{8000 \times 1.4}{2 \times 3.1415}\left(1 - \frac{2 \times 0.226}{3 \times 1.60}\right) \simeq 1604 \text{ Kgm}$$

$$^* \quad r = 0.40 \times 0.40 = 0.16 \text{ m}^2$$

$$\therefore 0.16 = \pi r^2$$

$$\therefore r = \sqrt{\frac{0.16}{3.1415}} \simeq 0.226 \text{ m}$$

El reglamento dice:

"La suma de los momentos resistentes, por unidad de ancho, positivo y negativo, se incrementará en cada dirección paralela a los bordes, en la cantidad de 1604 Kgm" (para nuestro ejemplo).

$$\text{Momento negativo } (\phi_1) \text{ (Finales)} = 639 + \frac{1604 \times 639}{639 + 330} = 639 + 1058 = 1697 \text{ Kgm}$$

$$\text{Momento positivo } (\phi_1) \text{ (Finales)} = 330 + \frac{1604 \times 330}{330 + 639} = 330 + 546 = 876 \text{ Kgm}$$

$$\text{Momento negativo } (\phi_2) \text{ (Finales)} = 564 + \frac{1604 \times 564}{564 + 203} = 564 + 1179 \simeq 1744 \text{ Kgm}$$

$$\text{Momento positivo } (\phi_2) \text{ (Finales)} = 203 + \frac{1604 \times 203}{203 + 564} = 203 + 425 = 628 \text{ Kgm}$$

Verificación del peralte supuesto

$$d = \sqrt{\frac{(-)\,M_{\phi 2}}{F_C\, b f'_c\, y\,(1 - 0.59\, y)}} = \sqrt{\frac{174400}{0.9 \times 100 \times 250 \times 0.044\,(1 - 0.59 \times 0.044)}} \simeq 14 \text{ cm}$$

$$h \simeq 17 \text{ cm (Se supuso } h = 16 \text{ cm)}$$

Obtención de las áreas de acero

$$A_s = \frac{(-)\,M_{\phi 2}}{F_R\, f_Y\, d\,(1 - 0.59\, y)} = \frac{174400}{0.9 \times 4200 \times 14\,(1 - 0.59 \times 0.044)} \simeq 3.40$$

$$(-)\,A_{s\,(\phi_1)} = 3.40 \text{ cm}^2$$

Area mínima de acero

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y}\, bd = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200}\, 100 \times 14 \simeq 3.70 \text{ cm}^2$$

Todas las áreas de acero serán por especificación.

Separación de las varillas

$$\text{Con } \phi_s\ 3/8'' \ \therefore\ N^{\circ}\phi_s\#3 = 5\phi_s\#3, \quad sep. = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm}$$

Resistencia de la losa a fuerza cortante (Penetración)

$$V_{CR} = 0.5\, F_R\, b_o\, d\, \sqrt{f^*_c}$$

$$b_o = 4\,(40 + d) = 216 \text{ cm}$$

$$f^*_c = 0.8 \times f'_c = 0.8 \times 250 = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore V_{CR} = 0.5 \times 0.8 \times 216 \times 14 \sqrt{200} \simeq 17100 \text{ Kg}$$

$$V_{CR} > P \text{ (No hay falla por penetración)}$$

ϕ_s #3 @ 10 cm

ϕ_s #3 @ 32 cm

ϕ_s #3 @ 20 cm

$a_1/4 = 1.00$ m

$a_1 = 4.00$ m

ϕ #3 @ 32 cm

ϕ_s #3 @ 10 cm

Columna

2.16 m

ϕ_s #3 @ 20 cm

(a)

$b_o = 2.16$ m

$a_2 = 5.60$ m

Fig. 15.13. Losa vista en planta, (a).

En el área limitada por el perímetro de la sección crítica (b_o), se recomienda colocar refuerzo de acero a la mitad de la separación obtenida para las franjas centrales, en ambos sentidos.

Téngase presente que los coeficientes dados en la tabla 14.1 son únicamente para las franjas centrales; para las franjas extremas será necesario multiplicar dichos coeficientes por 0.60.

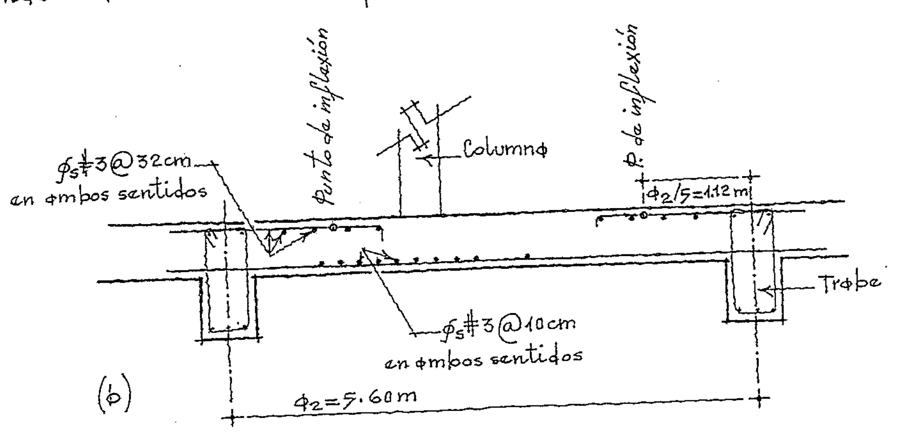


Fig. 15.14. Corte transversal, claro a_2 (b).

Para los puntos de inflexión el Reglamento dice: "A 1/5 desde los bordes del tablero para momento negativo y a 1/6 para momento positivo."

Referencias bibliográficas

Capítulo 15

"*Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado*" (ACI 318-83).

Jirsa, J. O., Sozen, M.A., y Siess, C. P., "*Test of a Flat Slab Reinforced with Welded Wire Fabric*," Proceedings, ASCE, 1966.

"*Normas técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el D. F.*," México, 1988.

Corley, W. G., y Jirsa, J.O., "*Equivalent Frame Analysis for Slab Design*," ACI Journal, Proceedings, 1970.

Newmark, N. M., y C.P. Siess, "*Proposed Design Specifications for Two-Way Floor Slabs*." Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 1950.

Park, R., y Paulay, T., "*Estructuras de Concreto Reforzado*," Limusa, México, 1979.

Lin, T. Y., Stotesbury, S. D., "*Conceptos y Sistemas Estructurales para Arquitectos e Ingenieros*," Limusa, México, 1991.

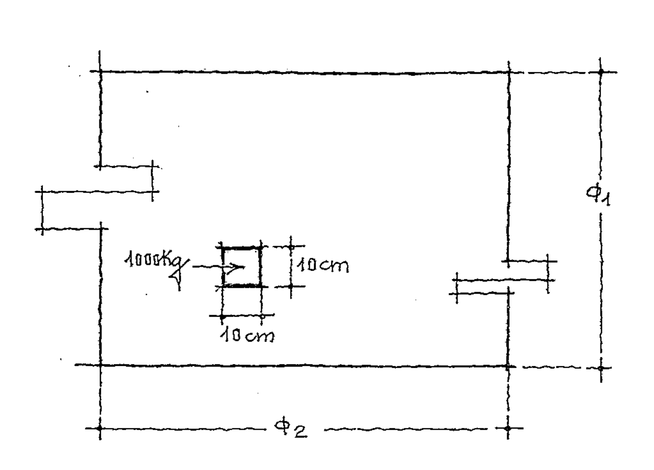
16

LOSAS NERVADAS

16.1. Generalidades

Una losa nervada se forma con una serie de nervaduras en uno o dos sentidos, separadas uniformemente en combinación con una capa de concreto colada arriba de ellas formando pequeñas vigas "T". Esta capa tendrá un espesor de 5 cm mínimo y será parte integral de la losa. La capa mencionada será capaz de soportar, como mínimo, una carga de 1000 Kg en una área de 10x10 cm, fig. 16.1.

Fig. 16.1. Losa mostrando el área capaz de soportar una carga de 1000 Kg.

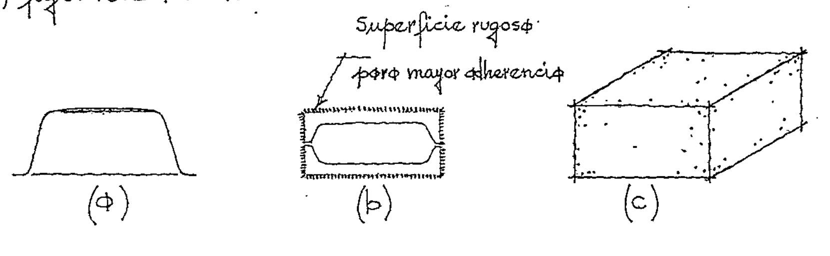


Entre nervaduras o retículas se pueden utilizar cimbras recuperables de madera, plástico, acero, etcétera, dejando libres los espacios entre nervaduras, o bien colocando casetones de barro, bloc precolado o casetones de poliestireno (este último de mayor empleo por su ligereza), figs. 16.2 a 16.4.

Fig. 16.2. Molde de plástico cimbra recuperable, (a).

Fig. 16.3. Block hueco precolado, (b).

Fig. 16.4. Casetón de poliestireno, (c).

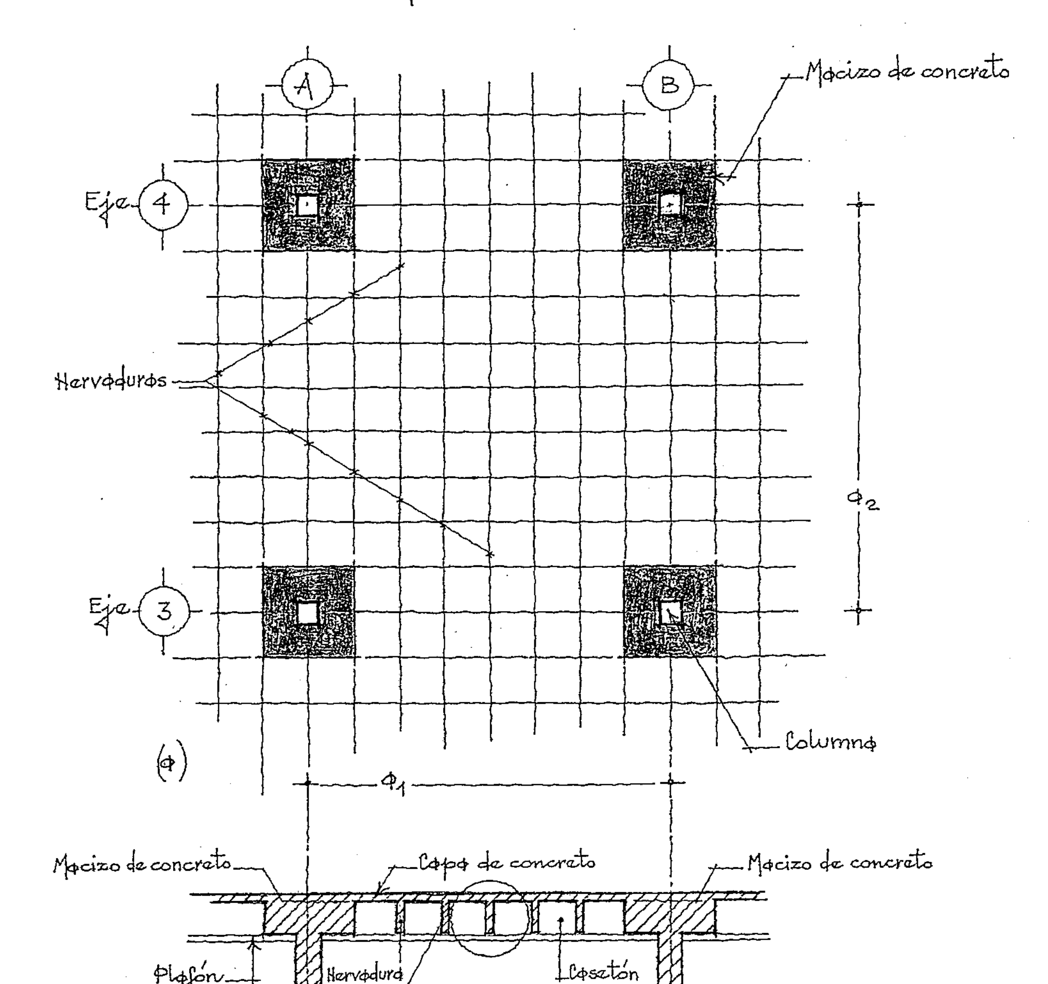


El Reglamento ACI especifica que la distancia libre entre nervaduras no excederá de 75 cm. El autor considera que una separación de 1.20 m entre nervaduras, la losa trabajará en excelentes condiciones.

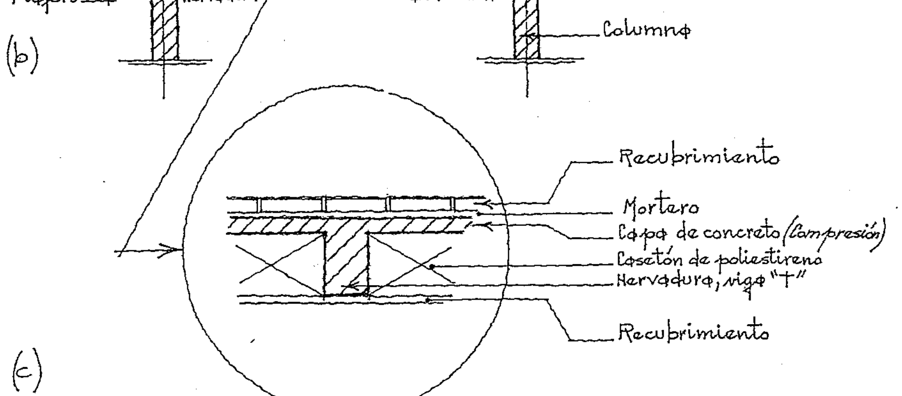
[illegible]

mica entre mayor sea la separación entre nervaduras.

En ambos sentidos de la losa deberá haber, por lo menos, seis hileras de casetones, figs. 16.5 a 16.7.



[illegible].5. Losa nervada. [illegible], (a).



[illegible]. Losa nervada. [illegible] (b).

[illegible].7. Viga "T". Deta[illegible] (c).

Contarán con una zona maciza adyacente a cada columna, como mínimo una distancia 2.5 h desde el paño de la columna o desde el borde del capitel, figs. 16.8 a 16.12.

zona de concreto adyacente a la columna
Columna
2.5 h
(a)
Zona de concreto adyacente al capitel
2.5 h
Capitel
Columna
(c)
zona maciza de concreto
Columna
(b)
Capitel
90°
45°
Zona maciza de concreto
Columna
(d)

Fig. 16.8. Zona maciza de concreto alrededor de la columna, (a). Planta.

Fig. 16.9. Vista en corte, (b).

Fig. 16.10. Macizo de concreto alrededor del capitel, (c). Planta.

Fig. 16.11. Vista en corte, (d).

Las nervaduras en los ejes de columas tendrán un ancho no menor de 25 cm; las adyacentes a los ejes de columnas no serán menores de 20 cm y las restantes de 10 cm, fig. 16.12.

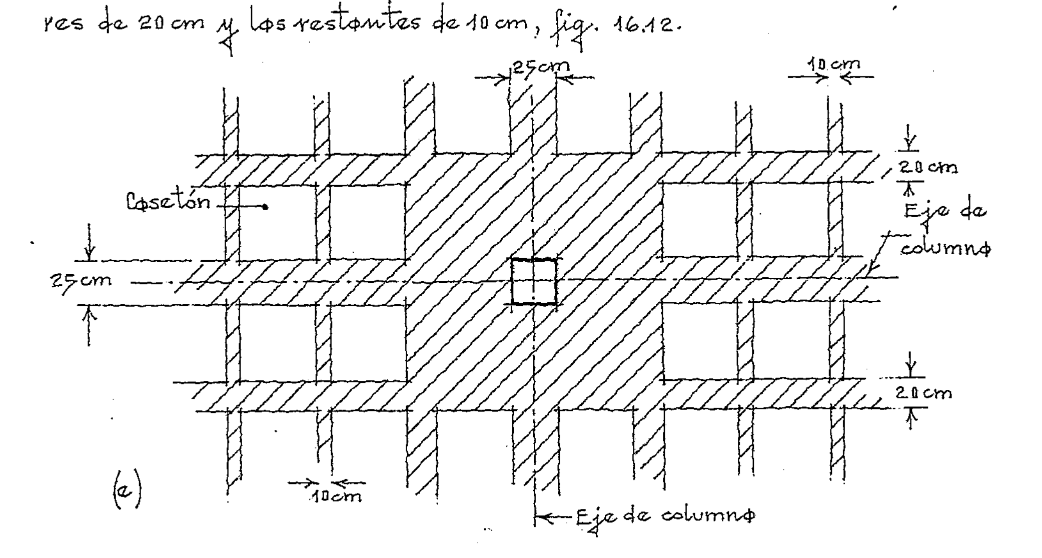
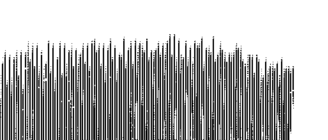


Fig. 16.12. Dimensiones de las nervaduras en la losa, (e).



La losa podrá apoyarse directamente sobre columnas o sobre ábacos, capiteles o sobre una combinación de ambos, figs. 16.13 a 16.20.

Fig. 16.13. Losa apoyada directamente sobre la columna, (a).

Fig. 16.14. Planta, (b).

Fig. 16.15. Losa apoyada sobre ábaco, (c).

Fig. 16.16. Planta, (d).

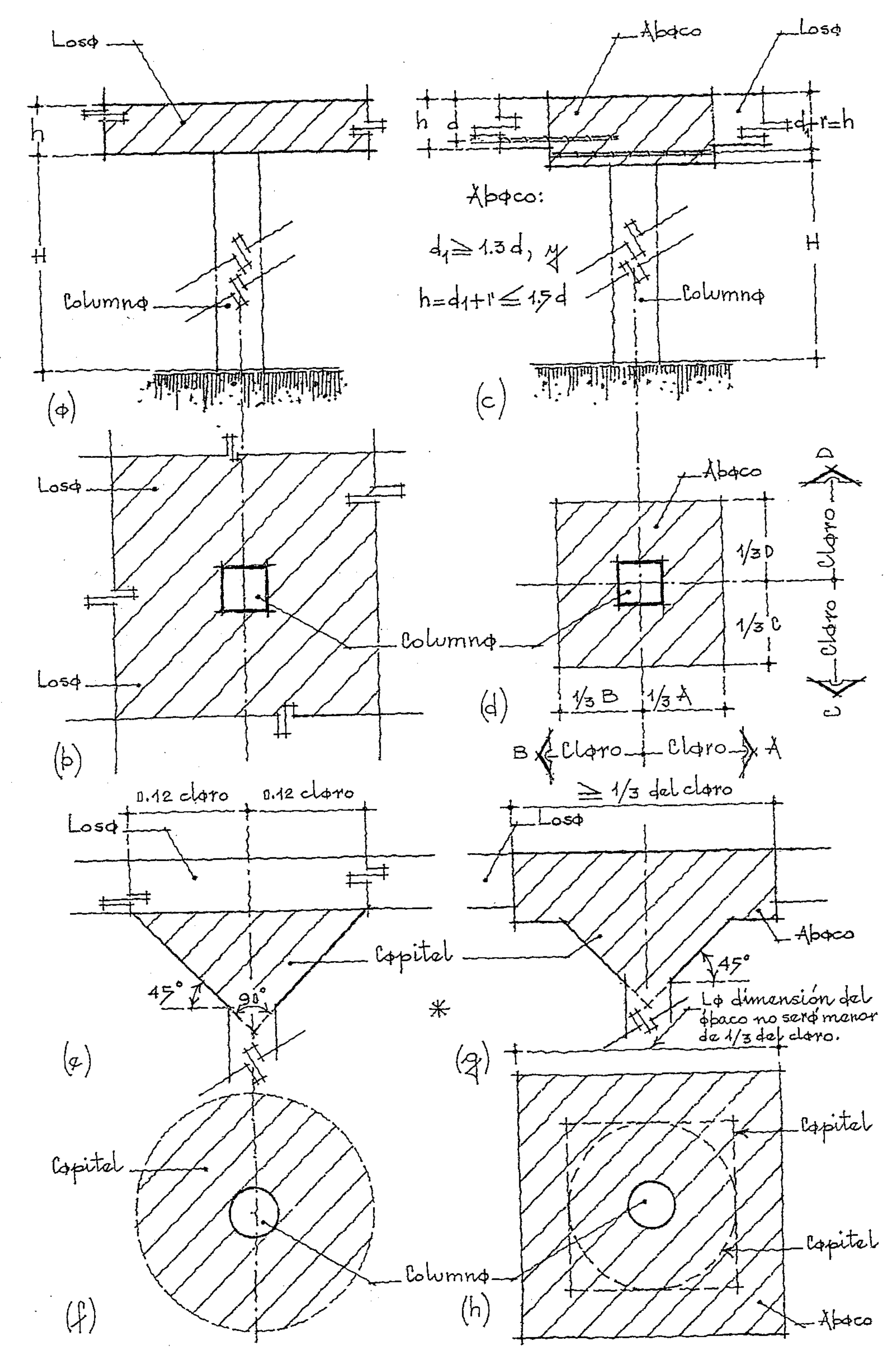
Fig. 16.17. Losa apoyada sobre capitel, (e).

Fig. 16.18. Planta, (f).

Fig. 16.19. Losa apoyada sobre ábaco y capitel, (g).

Fig. 16.20. Planta, (h).

* El ábaco, el capitel y la columna podrán tener forma cuadrada, rectangular o circular.



Para su análisis y diseño el Reglamento de Construcciones para el D.F. aplica el método de la estructura equivalente* y especifica:

"La estructura se divide en marcos ortogonales en ambos sentidos, cada uno formado en el eje de columnas y franjas de losa limitadas por las lineas medias de los tableros adyacentes al eje de columnas considerado", fig. 16.21.

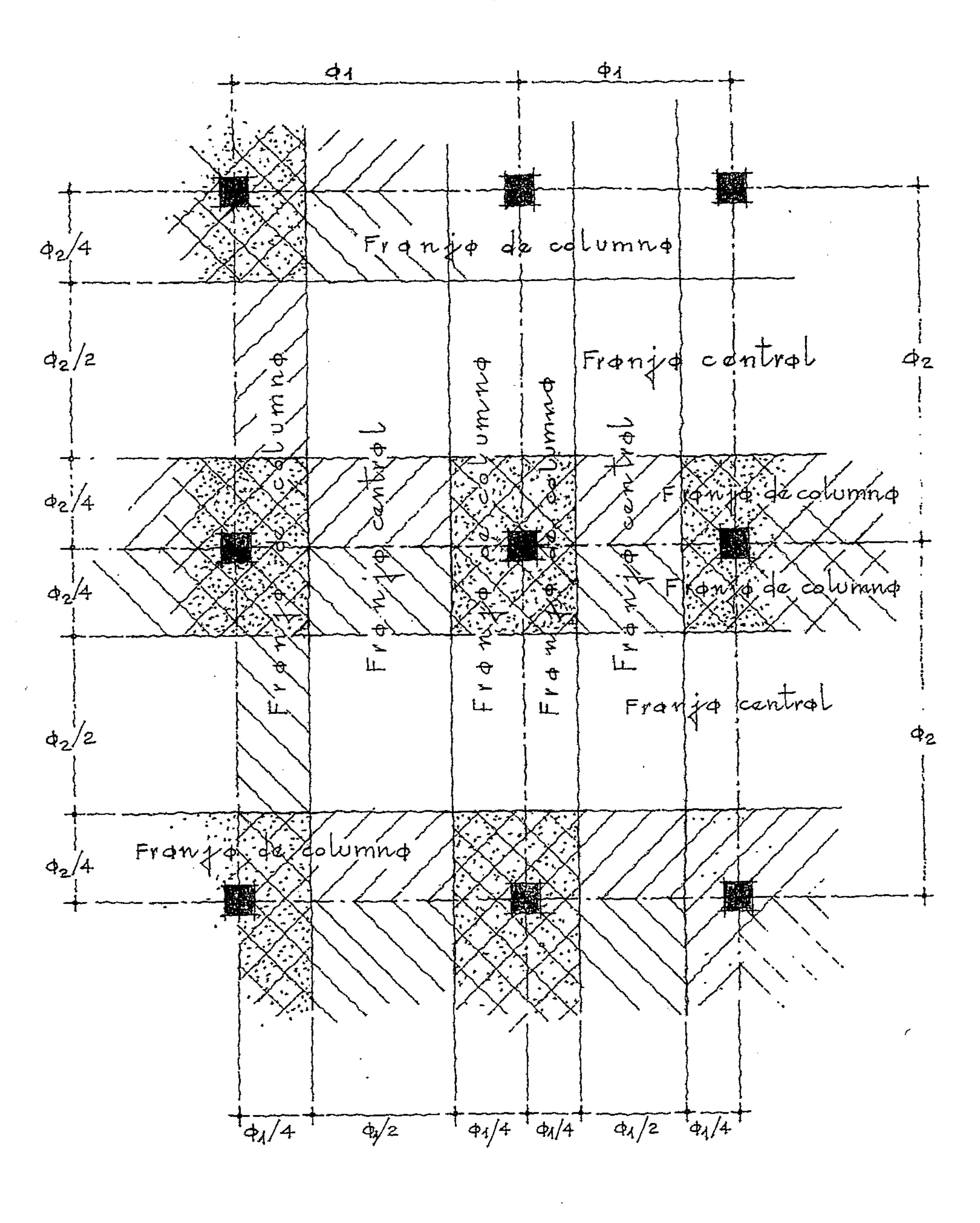


Fig. 16.21. Franjas utilizadas en el diseño de una losa plana.

---

* Para diseñar la losa por el método directo véase el libro "Diseño y Cálculo de Estructuras de Concreto Reforzado, por resistencia máxima y servicio", del autor.

Cuando la estructura se encuentre sometida al empuje de fuerzas laterales, la losa únicamente contará con un ancho efectivo igual a

$$c_2 + 3h, \text{ centrado al eje de columnas}$$

siendo

c_2, dimensión transversal de la columna perpendicular a la dirección del análisis.

h, espesor de la losa.

Para evaluar momentos de inercia de losas y columnas, se tomará la sección de concreto sin considerar el refuerzo.

Al analizar los marcos equivalentes por carga vertical, en cada dirección deberán tomarse en cuenta las cargas totales que actúan en las losas.

Estas losas deben cumplir ciertas limitaciones, veamos:

a) Los marcos que forman la estructura deberán ser sensiblemente simétricos.

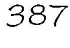
b) Los entrepisos contarán con el mismo número de crujías.

c) En una dirección, ningún claro será mayor que 1.2 veces el menor de ellos.

d) El espesor de la losa será aproximadamente igual al 5% del claro mayor del tablero mayor.

Referente al refuerzo se tendrá en cuenta lo siguiente:

1. *Como mínimo la cuarta parte del refuerzo negativo que se tenga sobre un apoyo en una franja de columna deberá continuarse a todo lo largo de los claros adyacentes.*
2. *Como mínimo la mitad del refuerzo positivo máximo se extenderá en todo el claro correspondiente.*
3. *En las franjas de columnas se colocará refuerzo positivo continuo en todo el claro en cantidad no menor que la tercera parte del*





refuerzo negativo máximo que se tenga en la franja de columna del claro considerado.

4. El refuerzo del lecho inferior que atraviesa el núcleo de una columna no será menor que la mitad del que lo cruce en el lecho superior y quedará anclado de modo que pueda fluir en las caras de la columna.

En losas aligeradas toda nervadura llevará, como mínimo, y a todo lo largo de la misma, una varilla en el lecho inferior y una en el lecho superior.

El mismo reglamento considera como secciones críticas para momento por flexión negativa en las franjas de columnas y franjas centrales aquella localizada a una distancia, c/2, del eje de columnas correspondientes, siendo

c, dimensión transversal de la columna paralela a la flexión, o el diámetro de la intersección con la losa o el ábaco, del mayor cono circular, con cono de 90° en el vértice que pueda inscribirse en el capitel.

En columnas se considerará como crítica la sección de intersección con la losa o el ábaco. Si hay capiteles, se tomará la intersección con el arranque del capitel.

Los momentos flexionantes en secciones críticas a lo largo de las losas de cada marco se distribuirán entre las franjas de columnas y las centrales, de acuerdo con la tabla 16.1.

Tabla 16.1	Franjas de columnas	Franjas centrales
	Porcentajes	
Momentos positivos	60%	40%
Momentos negativos	75%	25%

distribuido como si fuera negativo.

Referente a fuerza cortante se supone que el 75% actúa en la franja de columna y el 25% en la franja central.

En losas aligeradas también se revisará como sección crítica la situada a d/2 de la periferia de la zona maciza alrededor de las columnas.

Cuando no hay transmisión de momento entre la losa y la columna, o si el momento por transmitir, M_U, no excede de $0.2\,V_U d$, el esfuerzo cortante de diseño se calculará con

$$v_U = \frac{V_U}{b_o\, d} \qquad \text{(ec. 16.2)}$$

donde

b_o, perímetro de la sección crítica, y

V_U, fuerza cortante de diseño en dicha sección.

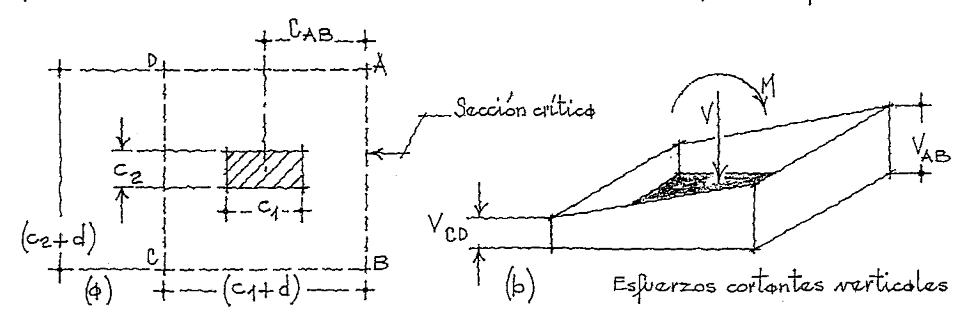
Cuando haya transferencia de momento entre la losa y la columna se supondrá que una parte del momento obtenido con la ecuación 16.3 se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total con respecto al centroide de la sección crítica

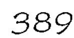
$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67\sqrt{(c_1+d) \div (c_2+d)}} \qquad \text{(ec. 13.3)}$$

α, es un factor que se multiplicará por el momento total.

El esfuerzo cortante máximo de diseño, v_U, se obtiene considerando el efecto de la carga axial y el momento, para ésto se supone que los esfuerzos cortantes varian linealmente, figs. 16.22 y 16.23.

Fig. 16.22. Transmisión de momento entre columna y losa, (a).
Fig. 16.23. Perspectiva, (b).



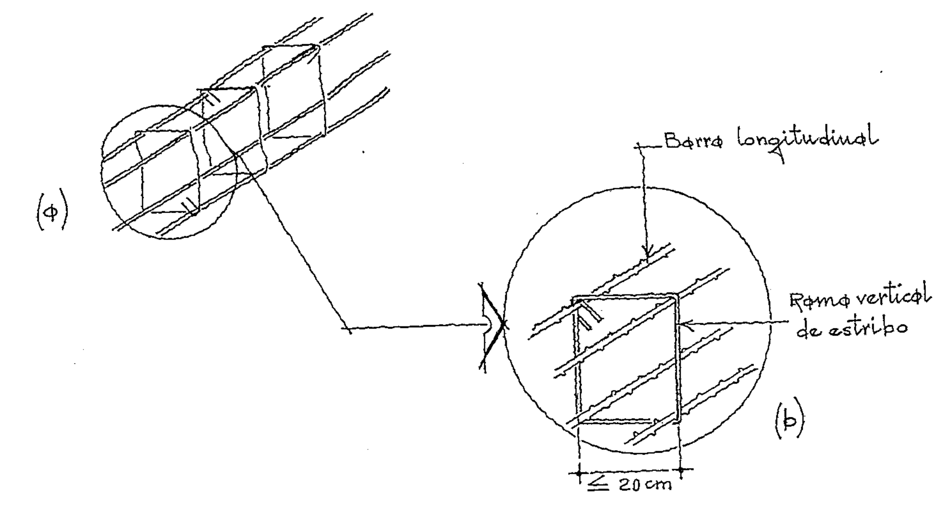


pero sin ser mayor que d/2.

Además, la separación entre ramas verticales de estribos no excederá de 20 cm, figs. 16.24 y 16.25

Fig. 16.24. Estribos verticales cerrados como refuerzo para cortante en losas, (a).

Fig. 16.25. Estribo mostrando la separación máxima entre ramas verticales, (b).



En ningún caso y bajo ninguna condición se aceptará que, v_u, sea mayor que

$$v_u \leq 1.3\, F_R \sqrt{f_c^*}$$

El refuerzo mínimo se colocará en las nervaduras de los ejes de columnas y en las adyacentes a ellas y se mantendrá hasta una longitud no menor que 1/4 del claro correspondiente.

El Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (ACI 318-83) en su sección "Procedimientos de diseño", especifica que un sistema de losas puede diseñarse mediante el

Método del marco equivalente (ya descrito), o por el Método de diseño directo, que se describe a continuación.

16.2 Método de diseño directo.- El método especifica que se deben respetar las siguientes limitaciones:

a) La losa deberá tener como mínimo tres claros continuos en cada sentido.

b) Los tableros deberán ser rectangulares cuya relación de claro mayor a menor (de centro a centro entre apoyos) no será mayor de 2.

c) Las longitudes continuas de los claros (centro a centro de los apoyos) en cada sentido no tendrán una diferencia mayor de 1/3.

d) Todas las cargas serán únicamente gravitacionales y distribuidas uniformemente.

La carga viva no excederá de tres veces la carga muerta.

e) Para una losa con vigas entre los apoyos en todos sus lados, la rigidez (α) de las vigas en ambas direcciones perpendiculares

$$\frac{\alpha_1 l_2^2}{\alpha_2 l_1^2}, \text{ no será menor que } 0.2 \text{ ni mayor de } 5.$$

f) Los apoyos podrán encontrarse desalineados, como máximo, un 10% del claro en la dirección de cualquier eje que una los centros de apoyos sucesivos.

16.3 Momento estático factorizado.- El momento estático factorizado total (M_o) para un claro de losa queda determinado por una franja limitada lateralmente por el eje central de la losa en cada lado del eje de los apoyos.

En la figura 16.26 se muestra la mencionada franja a cada lado de los ejes de apoyos.

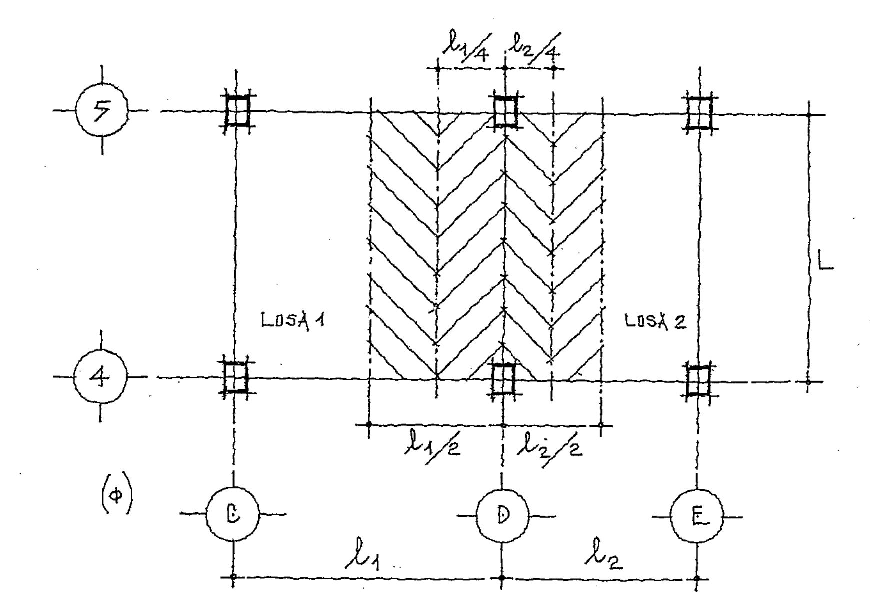


Fig. 16.26. Area para calcular los momentos estáticos, (a).

La suma absoluta de los momentos factorizados positivo y negativo en cada dirección no será menor que

$$M_o = \frac{w_u l_2 l_n^2}{8}$$

donde

l_n, longitud del claro libre medida de paño a paño de los apoyos.

Los momentos factorizados negativos se localizan en la cara de los apoyos rectangulares. Tratándose de apoyos circulares o similares se supondrán como cuadrados que representen la misma área, figs. 16.27 y 16.28.

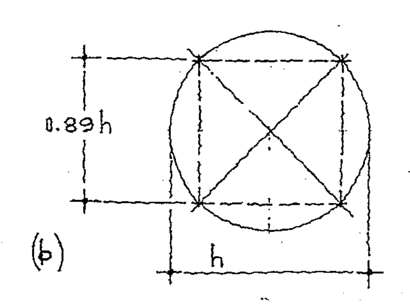


Fig. 16.27. Sección cuadrada equivalente, (b).

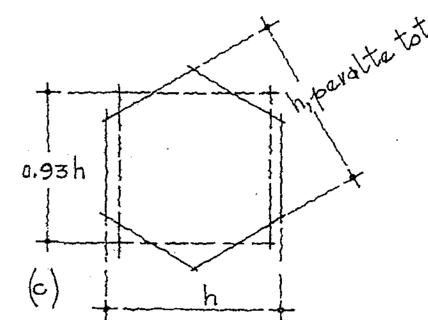


Fig. 16.28. Sección cuadrada equivalente, (c).

Cuando se trate de un claro interior, el momento estático total se distribuirá de la siguiente manera, fig. 16.29.

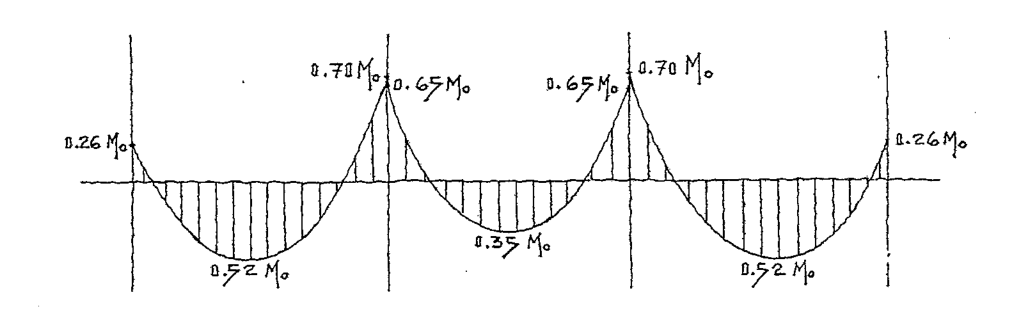


Fig. 16.29. Gráfica de distribución del momento estático total en momentos negativos y positivos.

Momento negativo . . . 0.65 M_o
Momento positivo . . . 0.35 M_o

En los tramos extremos hágase referencia al Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado (ACI 318-83).

Para diseñar la losa por el método directo véase el libro "Diseño y Cálculo de Estructuras de Concreto Reforzado, por resistencia máxima y servicio," del autor.

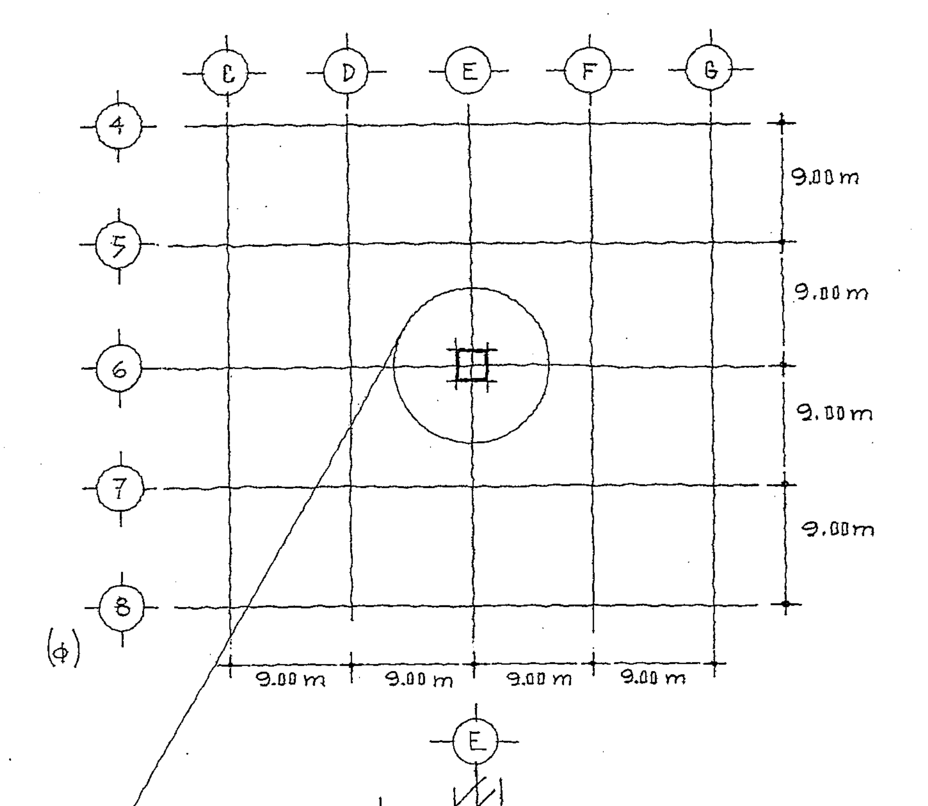
En los sistemas de losas se pueden dejar aberturas de cualquier tamaño siempre que se demuestre por medio del análisis que la resistencia de diseño sea por lo menos igual a la requerida y se cumpla también, con los límites especificados para las deflexiones.

Cuando se intersectan dos franjas de columna (intermedias) se podrán dejar aberturas de cualquier tamaño, siempre que se mantenga la totalidad del refuerzo requerido para el tablero sin abertura. Cuando el refuerzo sea interrumpido por una abertura, deberá colocarse su equivalente a los lados de ésta.

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo aplicando el método del marco equivalente empleando las especificaciones dadas por el Reglamento de Construcciones del D.F.

Se tiene una losa encasetonada [illegible]

claro de 9.00 m en ambos sentidos, sometida a cargas y condicion[es] que se muestran en las figs. 16.30 a 16.32. Losa sin ábacos.



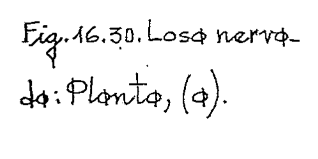

Fig. 16.30. Losa nervada: Planta, (a).

Fig. 16.31. Detalle del macizo de concreto, (b).

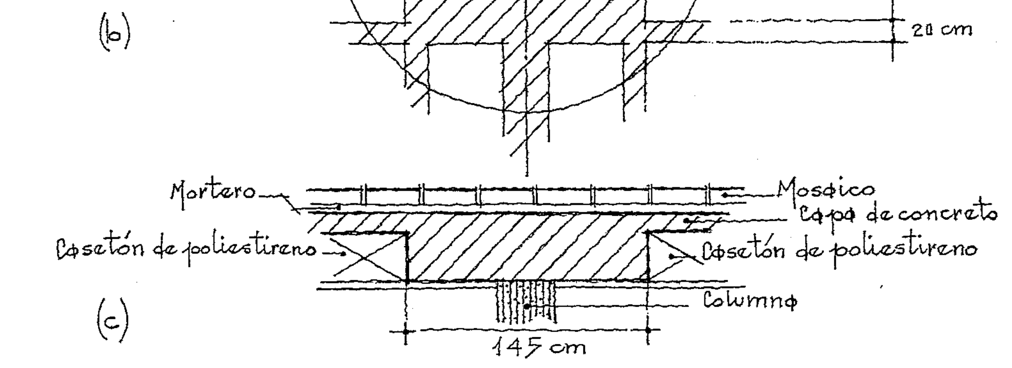
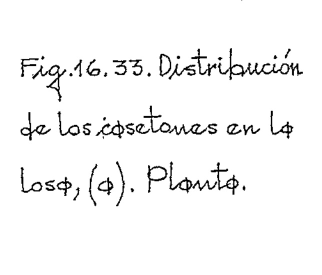


Fig. 16.32. Corte del macizo de concreto, (c).

Separación de casetones y nervaduras en el entre-eje, figs.16.33 a 16.35.


Fig.16.33. Distribución de los casetones en la Losa, (a). Planta.

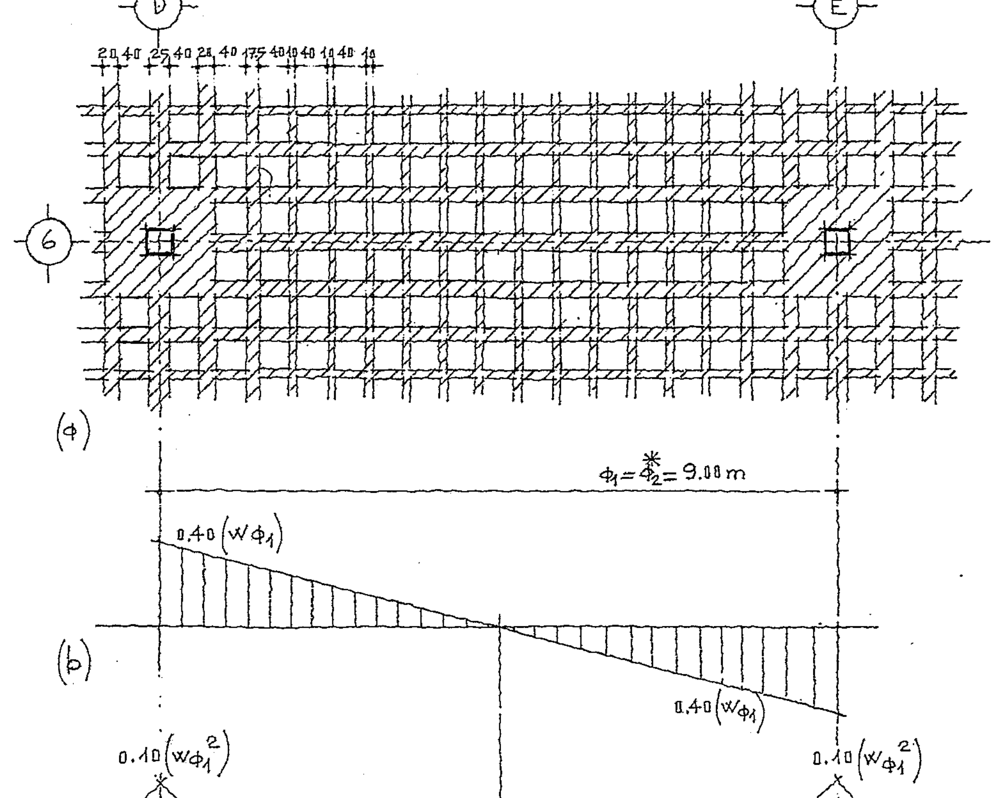


Fig.16.34. Gráfica de esfuerzo cortante, (b).

Fig.16.35. Gráfica de momento flexionante, (c).

*a_1 y a_2 representan lo mismo que l_1 y l_2 respectivamente.

El Reglamento de Construcciones para el D.F. especifica que el peralte efectivo no será menor que:

$$K l (1 - 2c/3l) \quad . \quad . \quad . \quad (ec. 16.1)$$

siendo,

K, coeficiente cuyo valor depende de:

Losas con ábacos . . . . $K = 0.0006 \sqrt[4]{f_s^* w} \geq 0.020$

Losas sin ábacos . . . . $K = 0.00075 \sqrt[4]{f_s w} \geq 0.025$

* Para f_s el autor recomienda

$f_s = 0.50 f_Y = 0.50 \times 4200 = 2100$ Kg/cm^2

$f_y = 4200\ Kg/cm^2$

Casetones de poliestireno de 40 x 40 cm (espesor del casetón, 30 cm)

Capa de concreto, 5 cm

Análisis de carga sobre la columna, E-6, fig 16.36

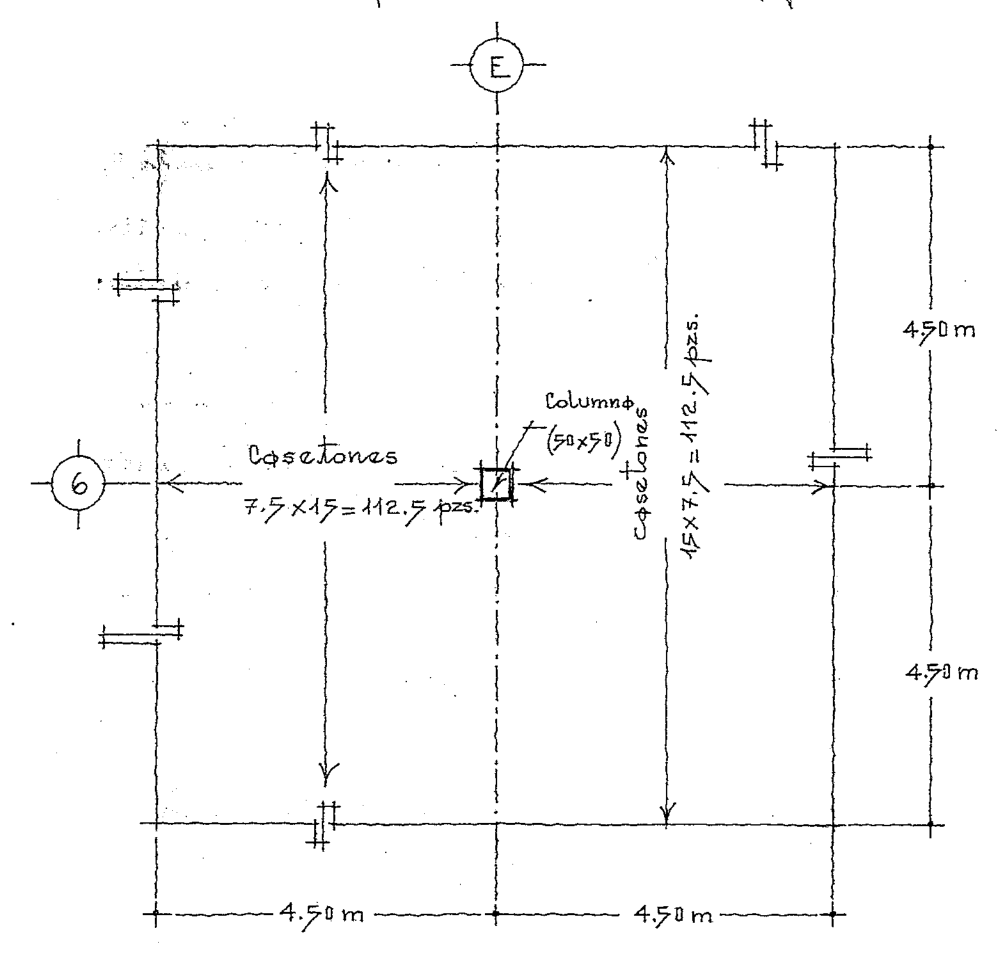


Fig. 16.36. Número de casetones en el área del tablero (81.00 m²).

Carga sobre la losa:

Mosaico = 0.02 x 9.00 x 9.00 x 2000 Kg/m³ = 3240 Kg

Capa de concreto (Compresión),

nervaduras y casetones:

9.00 x 9.00 x 0.35 x 2400 Kg/m³ = 68040 Kg

Yeso y tirol = 0.015 x 9.00 x 9.00 x 1500 Kg/m³ = 1823 Kg

Carga Muerta (C.M.) = 73103 Kg

A la carga muerta se le resta el espacio ocupado por los casetones de poliestireno cuyo peso se desprecia, por tanto:

$$73103\ Kg - (225\ pzs. \times 0.40 \times 0.40 \times 0.30 \times 2400\ Kg/m^3),\quad y$$

$$73103\ Kg - 25920\ Kg = 47183\ Kg$$

$$\text{Carga viva} = 81.00\ m^2 \times 220\ Kg/m^2 = 17820\ Kg \quad (\text{Supuesta})$$

$$C.M. + C.V. = 65003\ Kg$$

Carga en Kg/m^2

$$w = \frac{65003\ Kg}{81\ m^2} \simeq 800\ Kg/m^2$$

Aplicando el factor de carga, $F_c = 1.40$, se tiene:

$$w_U = 800 \times 1.4 \simeq 1200\ Kg/m^2 \ (\text{Carga final})$$

Verificación del peralte efectivo mínimo

$$K\ell(1 - 2c/3\ell)$$

y "K" para losas sin ábacos, vale

$$0.00075\sqrt[4]{2100 \times 800} = 0.027 > 0.025$$

Por tanto

$$d_{mín.} = 0.027 \times 900 \left(1 - \frac{2 \times 50}{3 \times 900}\right) 1.20^{*} \simeq 28\ cm < 35\ cm$$

En la fig. 16.37, se muestra el peralte supuesto

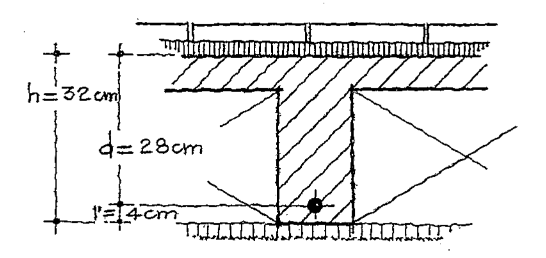


Fig. 16.37. Detalle del peralte efectivo.

El análisis completo de un sistema de losas en una estructura consiste en analizar una serie de marcos equivalentes en ambos sentidos, transversal y longitudinal.

---

* Tratándose de losas aligeradas, la ecuación que proporciona el peralte efectivo mínimo deberá aumentarse el 20%.

En la fig. 16.38 se muestran las áreas sombreadas de ambos ejes que representan la franja efectiva de columna. En nuestro ejemplo bastará con analizar un eje ya que se tiene una estructura con claros iguales en ambos sentidos.

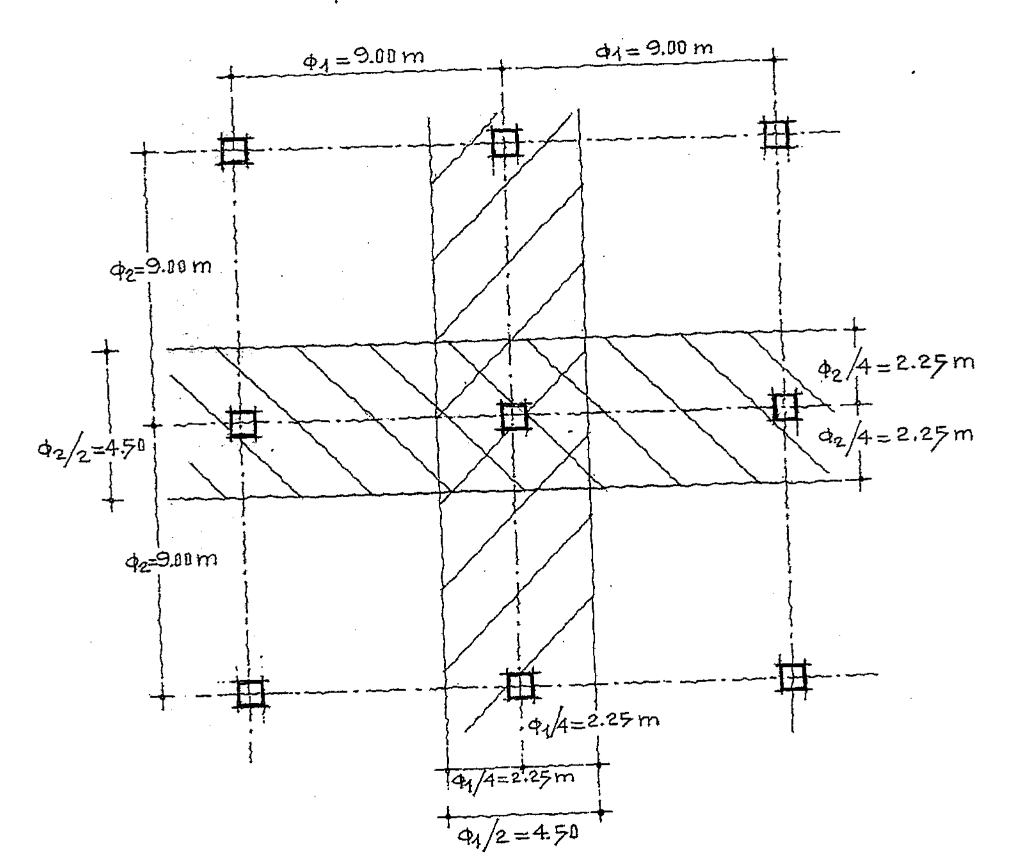


Fig. 16.38. Franjas efectivas de columnas.

Cuando los claros contiguos no difieren notoriamente en longitud y carga o bien cuando la estructura no se encuentra sometida al empuje de fuerzas horizontales y, además, no hay transmisión de momento entre la losa y la columna, el esfuerzo cortante de diseño se calculará con la ecuación

$$v_U = \frac{V_U}{b_o\, d}, \quad y \quad v_U = \frac{V_U}{b_o\, d/2^*}$$ (Esta ecuación únicamente para losas planas aligeradas)

* En losas planas aligeradas se revisará como sección crítica aquella situada a d/2 de la periferia en la zona maciza alrededor de las columnas.

Revisión a falla por penetración entre la columna y la losa, fig. 16.39.

39 cm | 39 cm

$c_2+d=78$ cm

$c_2=50$ cm

Sección crítica

Columna

$c_1+d=78$ cm

Fig. 16.39. Sección crítica entre la losa y la columna.

$$V_U = 1200\,(4.50\times 4.50 - 0.50\times 4) = 1200\,(20.25 - 2.00) = 21\,900 \text{ Kg}$$

$$\text{y,} \quad v_U = \frac{V_U}{b_o\, d} = \frac{21\,900}{4\times 78\times 28} = \frac{21\,900}{8736} = 2.50 \text{ Kg/cm}^2$$

El Reglamento de Construcciones para el D.F, determina:

$$v_U \leq F_R\sqrt{f_c^*} \quad \therefore \; 0.80\sqrt{0.8\times 250} \simeq 11.30 \text{ Kg/cm}^2 > v_U$$

(No hay falla por cortante)

No obstante que el cortante no presenta falla, será conveniente colocar el mínimo refuerzo (1ϕ#3 en cada esquina del estribo) y anillos del número 2 (1/4") a una separación del 85% del valor obtenido con la ecuación

$$s_T = \frac{F_R A_v f_y d\,(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)}{V_U - V_{CR}} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5\, b},$$

pero sin ser mayor que $d/3$.*

El refuerzo se colocará en las dos vigas perpendiculares entre sí que cruzan por el eje centroidal de las columnas y se mantendrá dicho refuerzo hasta una longitud no menor que 1/4 del

---

* Por facilidad, se tomará para la separación de los estribos la especificación, $s_T \leq d/3$.

claro correspondiente, figs 16.40 a 16.42

Fig. 16.40. Estructura mostrando la franja efectiva de columnas, (a)

$c_1+d=78cm$

Franja de columna

Franja de columna

$c_1+d=78cm$

2.25m

(a)

1/4 claro = 2.25cm

Fig. 16.41. Franja efectiva de columna visto en planta, (b).

1/4 claro = 9.00/4 = 2.25m

1/4 claro = 9.00m/4 = 2.25m

78cm

E^s 1/4" @ 14cm

(b)

d/3* = 28cm/3 ≃ 10cm

10 cm

E^s 1/4" @ 14cm

h=32.

d=28

2φ#3

2φ#3

Columna (50x50 cm)

(c)

Fig. 16.42. Corte transversal mostrando los armados y la colocación de estribos, (c).

*Se observa en la separación de estribos que la especificación no se sigue fielmente, pero no hay que olvidar que la pieza no requiere estribos por cálculo. Cuando esto ocurra, se deberá ser más estricto.



Esfuerzo cortante en la sección crítica localizada en los paños de columnas, fig 16.43 a 16.45

Fig. 16.43. Claro libre entre paños de columnas, (a).

Fig. 16.44. Diagrama de esfuerzo cortante; claro libre, (b).

$\therefore V_u = 0.40\,(1200 \times 8.50) = 4080$ Kg

$$v_u = \frac{V_u}{(b\,d)^*} = \frac{4080}{1820} = 2.24 \text{ Kg/cm}^2$$

Fig. 16.45. Hervaduras efectivas para tomar el esfuerzo cortante producido en el claro libre, (c).

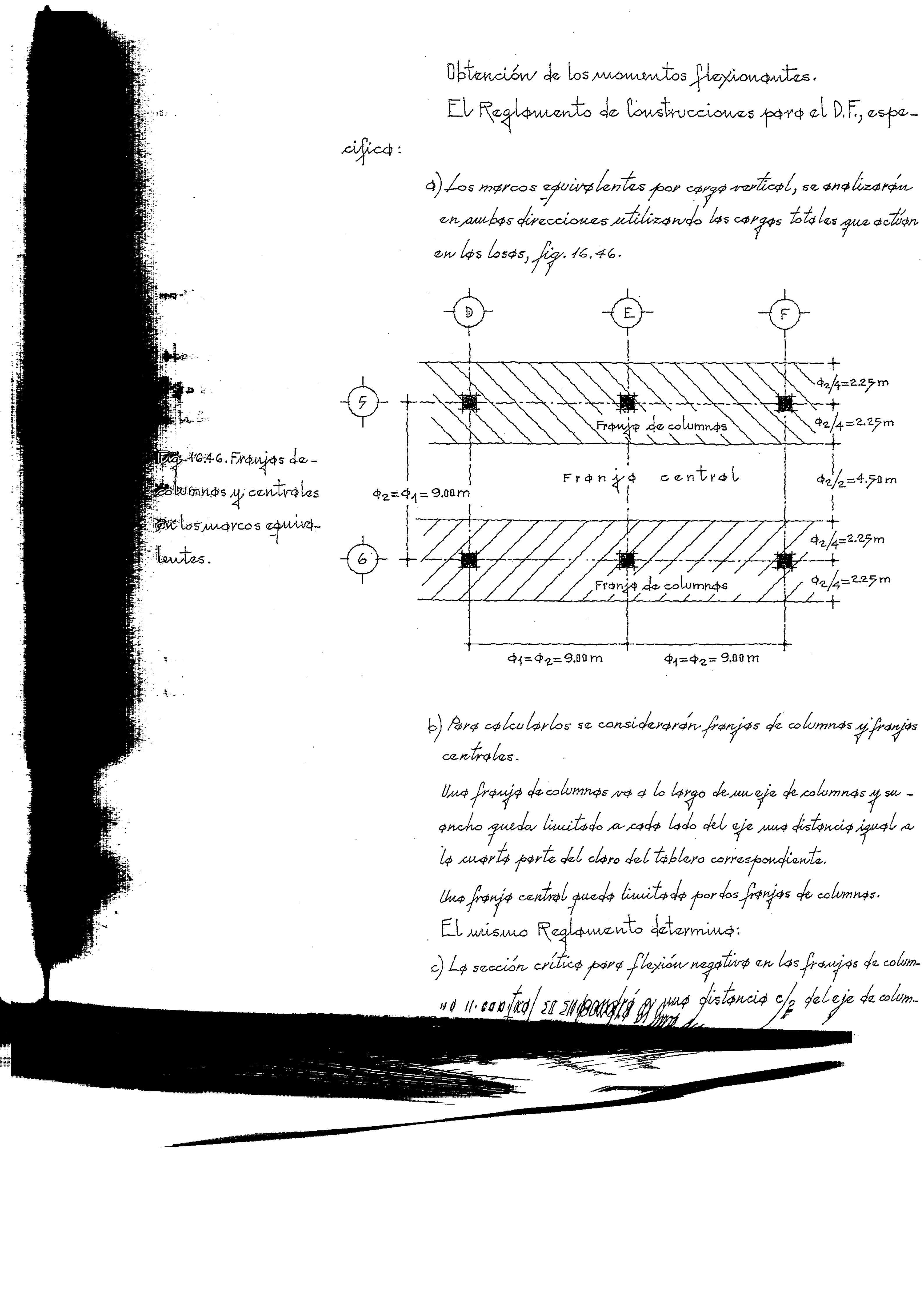
---

*

$b = 20 + 25 + 20 = 65$ cm ; $d = 28$ cm $\therefore$ $bd = 1820$ cm²

$$v_u \leq F_R \sqrt{f_c^*} = 11.30 \text{ Kg/cm}^2 > v_u \text{ (No hay falla)}$$

* Posteriormente se verá el refuerzo de acero en las nervaduras.



Obtención de los momentos flexionantes.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

a) Los marcos equivalentes por carga vertical, se analizarán en ambas direcciones utilizando las cargas totales que actúan en las losas, fig. 16.46.

Fig. 16.46. Franjas de columnas y centrales en los marcos equivalentes.

b) Para calcularlos se considerarán franjas de columnas y franjas centrales.

Una franja de columnas va a lo largo de un eje de columnas y su ancho queda limitado a cada lado del eje una distancia igual a la cuarta parte del claro del tablero correspondiente.

Una franja central queda limitada por dos franjas de columnas.

El mismo Reglamento determina:

c) La sección crítica para flexión negativa en las franjas de columnas o centrales se supondrá a una distancia c/2 del eje de colum-

donde,

c, dimensión transversal de la columna paralela a la flexión, fig. 16.47

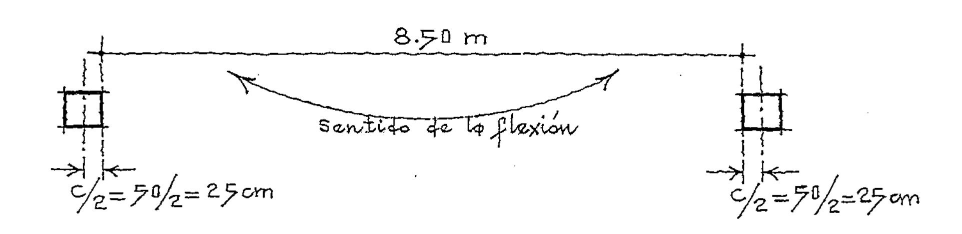


Fig. 16.47. Longitud efectiva para calcular el momento de flexión.

Los momentos flexionantes en secciones críticas de cada marco se distribuirán de acuerdo con los porcentajes indicados en la tabla 16.1, veamos:

Momento negativo (Franjas de columnas)

$$-M = 0.10\left(W_U \times 4.50 \times 8.50^2\right) = 0.10\left(1200 \times 4.50 \times 72.25\right) \simeq 39000 \text{ Kgm}$$

$$\therefore -M(75\%) = 39000 \times 0.75 = 29250 \text{ Kgm}$$

Momento negativo (Franjas centrales)

$$-M = 39000(25\%) = 9750 \text{ Kgm}$$

Cálculo de las áreas de acero:

Como la estructura no se encuentra expuesta a fuerzas sísmicas el área de acero máxima en tensión será la misma que la correspondiente a la falla balanceada

$$A_s = \frac{M_{UR}}{F_R f_Y d\,(1 - 0.59\,y)} = \frac{2925000}{0.9 \times 4200 \times 28\,(1 - 0.59\,y)}$$

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \theta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} = \frac{0.85 \times 250 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$= 0.040 \times 0.588 = 0.0235$$

donde, $y = \rho_b \dfrac{f_Y}{f'_c} = 0.0235 \dfrac{4200}{250} \simeq 0.395$

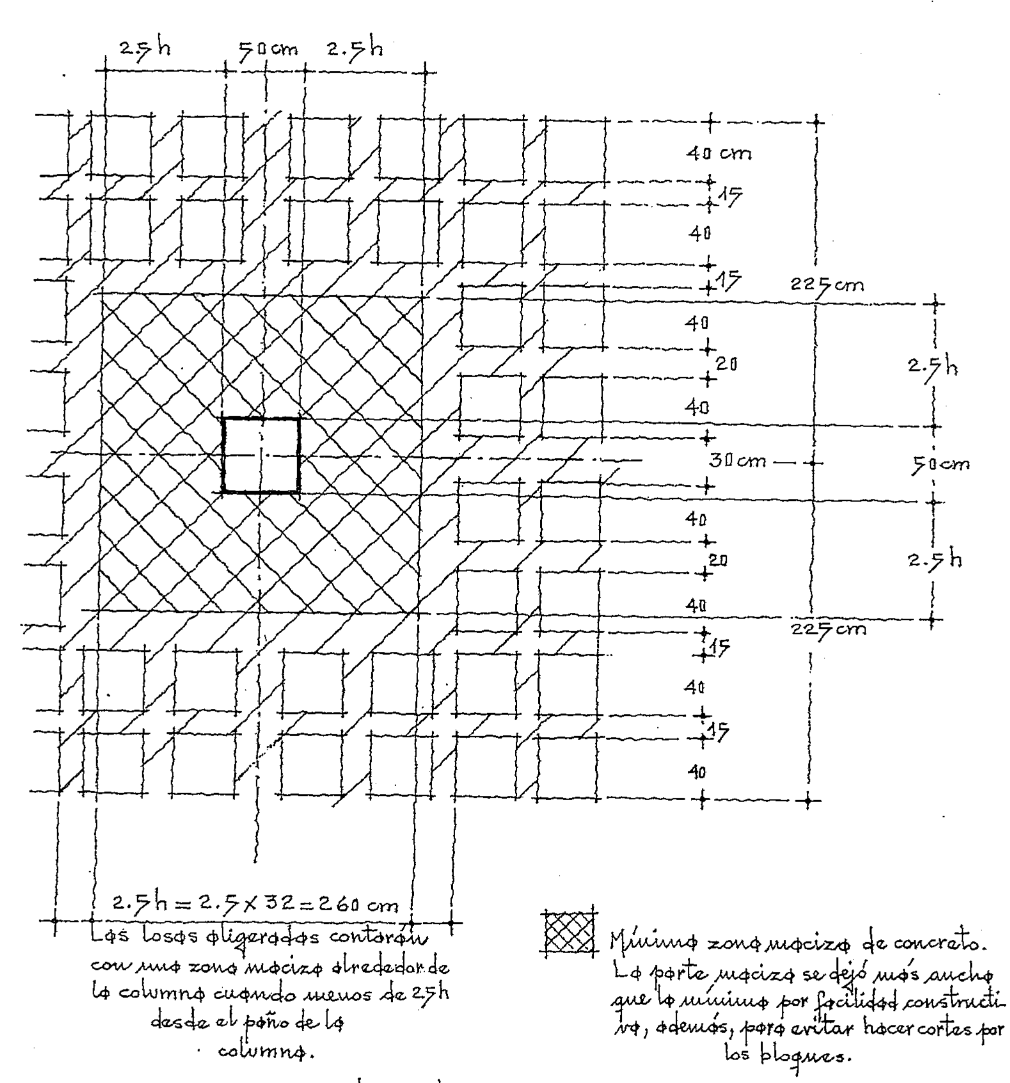
$$\therefore A_s = \frac{2925000}{105840\,(1 - 0.59 \times 0.395)} = 36 \text{ cm}^2$$

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{250}}{f_Y} = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} = 0.0026$$

Cuando la estructura tenga que resistir fuerzas sísmicas, recuérdese que el área máxima de acero en tensión será: $\rho_{máx} = (75\%)\rho_b$

El área de acero se distribuirá en la franja (450 cm) de ancho ocupada por las nervaduras de concreto que se muestran en la fig. 16.48.

Fig. 16.48. Nervaduras en la franja de columnas que tomarán el 75% del momento correspondiente.



Proporcionalmente obtenemos las áreas de acero:

130 cm . . . 36 cm^2

20 cm . . . X $\quad \therefore X = \frac{20 \times 36}{130} \simeq 5.54\ cm^2$

Con ϕ #6; $\frac{5.54}{2.87} \simeq 2\phi_s$ #6

130 cm . . . 36 cm^2

15 cm . . . X $\quad \therefore X = \frac{15 \times 36}{130} \simeq 4.16\ cm^2$

Con ϕ #5; $\frac{4.16}{1.99} \simeq 2\phi_s$ #5

Hervadura de 15 cm . . . . . 4.16 cm²

Sumando las áreas de acero de cada nervadura que interviene en la franja de columnas, se tiene:

Herv. de 20 cm . . 5.54 cm²

Hervs. de 15 cm (3) . 12.48 cm²

18.02 cm² × 2 = 36.00 cm²

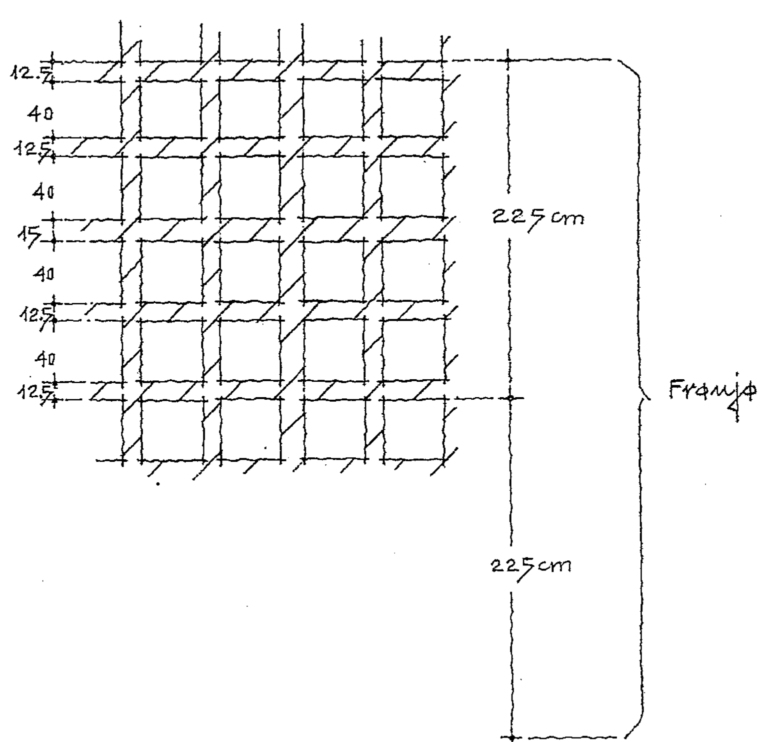


Fig. 16.49. Hervaduras en la franja central que tomarán el 25% del momento correspondiente.

Cálculo de las áreas de acero, franja central, fig. 16.49

$$A_s = \frac{975\,000}{0.9 \times 4200 \times 28\,(1 - 0.59\,y)}$$

$$\rho_b = 0.0235 \quad \therefore \quad y = 0.395$$

$$A_s = 12 \text{ cm}^2$$

Las áreas de acero se distribuyen proporcionalmente entre las nervaduras de concreto que intervienen en la franja central, veamos

8 nervaduras de 12.5 cm = 100 cm

2 nervaduras de 15 cm = 30 cm

130 cm

El área de acero se distribuirá entre los nervaduras que intervienen en la franja central.

130 . . . 12 cm^2

15 . . . X $\quad \therefore X = \frac{15 \times 12}{130} \simeq 1.39$ cm^2

Con $\phi_s \# 3 = \frac{1.39}{0.71} \simeq 2\phi_s \# 3$

130 . . . 12 cm^2

12.5 . . X $\quad \therefore X = \frac{12.5 \times 12}{130} \simeq 1.15$ cm^2

Con $\phi_s \# 4 = \frac{1.15}{1.27} \simeq 1\phi \# 4$

Sumando las áreas de acero, se tiene:

(2) Herv. de 15 cm. . 2.78 cm^2

(8) Herv. de 12.5 cm. . 9.20 cm^2

11.98 cm^2

Obtención de los momentos positivos (Franja de columnas)

$M = 0.025\left(W\phi_1^2\right) = 0.025\left(1200 \times 4.50 \times 8.50^2\right) \simeq 9754$ Kgm

$\therefore M(60\%) = 9754 \times 0.60 \simeq 5853$ Kgm

Momento positivo (Franja central)

$M(40\%) = 9754 \times 0.40 \simeq 3901$ Kgm

Obtención de las áreas de acero (Franja de columnas)

$A_s = \frac{585300}{0.9 \times 4200 \times 28\left(1 - 0.59y\right)} = \frac{585300}{81174} = 7.21$ cm^2

130 cm . . . 7.21 cm^2

20 cm . . . X $\quad \therefore X = \frac{20 \times 7.21}{130} \simeq 1.11$ cm^2

Con $\phi_s \# 4$; $\frac{1.11}{1.27} \simeq 1\phi \# 4$

130 cm . . . 7.21 cm^2

15 cm . . . X $\quad \therefore X = \frac{15 \times 7.21}{130} = 0.83$ cm^2

Sumando las áreas de acero de cada nervadura, se tiene:

(2) Herv. de 20 cm . . 2.22 cm^2

(6) Herv. de 15 cm . . 4.98 cm^2

7.20 cm^2

Obtención de las áreas de acero (*Franja central*)

$$A_s = \frac{390100}{81174} = 4.80 \text{ cm}^2$$

130 . . . . 4.80 cm²

15 . . . . X ∴ $X = \frac{15 \times 4.80}{130} \simeq 0.56 \text{ cm}^2$

Con ϕ_s #3; $\frac{0.56}{0.71} \simeq 1\phi$ #3

130 . . . . 4.80 cm²

12.5 . . . . X ∴ $X = \frac{12.5 \times 4.80}{130} \simeq 0.46 \text{ cm}^2$

Con ϕ_s #3; $\frac{0.46}{0.71} \simeq 1\phi$ #3

Armados en las nervaduras, figs. 16.50 (*Nervadura de 30 de ancho*) a 16.52.

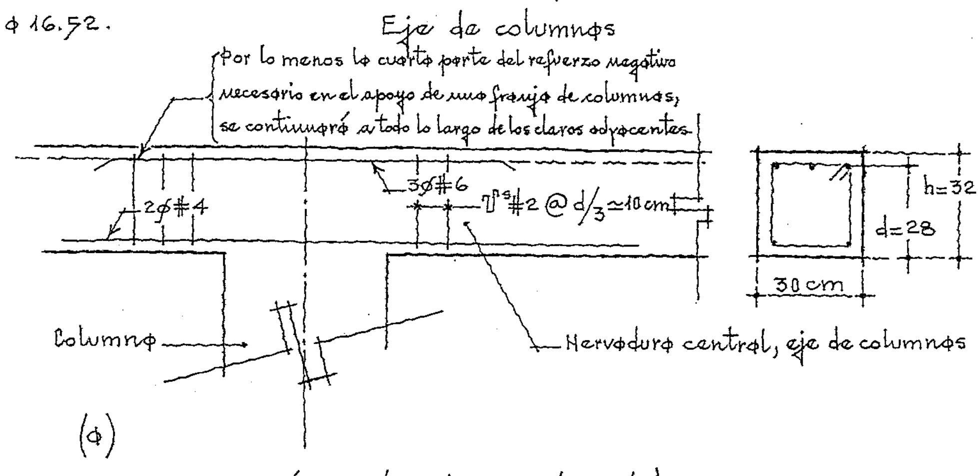


Fig. 16.50. Corte longitudinal por el eje de columnas, (a).

(*Nervadura de 20 cm de ancho*)
Adyacente al eje de columnas

2φs#6 2φs#6
2φs#3
h=32 cm
(b)

Fig. 16.51. Corte longitudinal entre dos ejes, (b).

(*Nervadura de 15 cm de ancho*)
Adyacente al eje de columnas

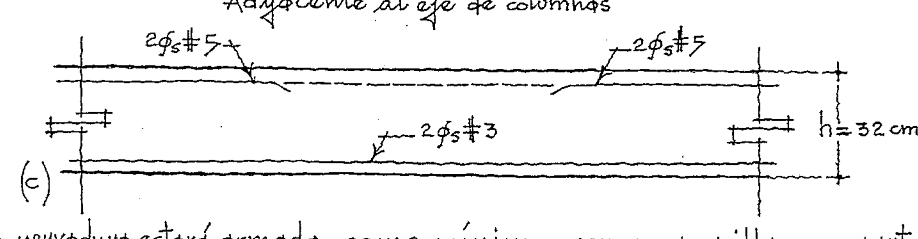


Fig. 16.52. Corte longitudinal entre dos ejes, (c).

Toda nervadura estará armada, como mínimo, con una varilla en su parte superior e inferior.

Referencias bibliográficas

Capítulo 16

Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, México, 1988.
Gamble, W. L., Sozen, M.A., y Siess, C.P., "*Test of a Two-Way Reinforced Concrete Floor Slab*, Proceedings, ASCE, 1969.
Reglamento de Construcciones de Concreto Reforzado (ACI 318-83).
Whitney, C.S., "*Ultimate Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs, Footings, and Frame Members Without Shear Reinforcement*," ACI Journal, 1957.
Vanderbilt, M. Daniel y Corley, W. Gene, "*Frame Analysis of Concrete Buildings*," Concrete International: Design and Construction, 1983.
Pérez, A. Vicente., "*Materiales y Procedimientos de Construcción: Losas, Azoteas y Cubiertas*", Trillas, México, 2000.
Ferguson, P. M., "*Concreto Reforzado*," México, 1965.
Pérez, A. Vicente, "*Diseño y Cálculo de Estructuras de Concreto Reforzado, por Resistencia Máxima y Servicio*", Trillas, México, 1999.

17

CIMIENTOS Y CIMENTACIONES

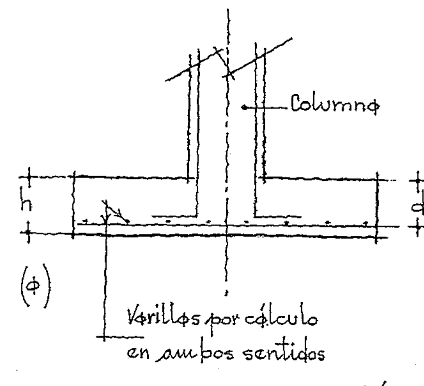
17.1. Generalidades

Un cimiento es un elemento cuya función principal consiste en recibir las cargas de una estructura para transmitirlas al suelo de sustentación.

La transmisión de la carga se realiza por medio de una ampliación de base (Cimiento) con la finalidad de distribuir, en una forma más amplia, la carga concentrada de la columna al cimiento y del cimiento al suelo.

En las figs. 17.1 a 17.4, se muestran los tipos más comunes de cimientos y la conveniencia para utilizar el más adecuado en cada construcción. El tipo de cimiento a utilizar dependerá de la carga por transmitir y de la capacidad de resistencia del suelo, veamos

Fig. 17.1. Zapata aislada. Corte.
La columna se inserta directamente con la zapata, (a).



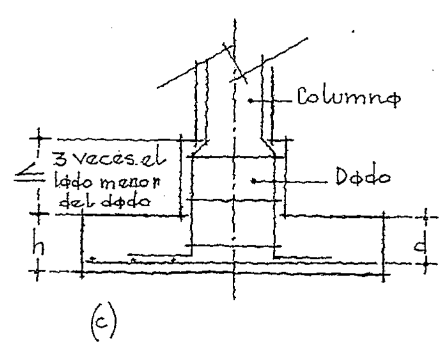
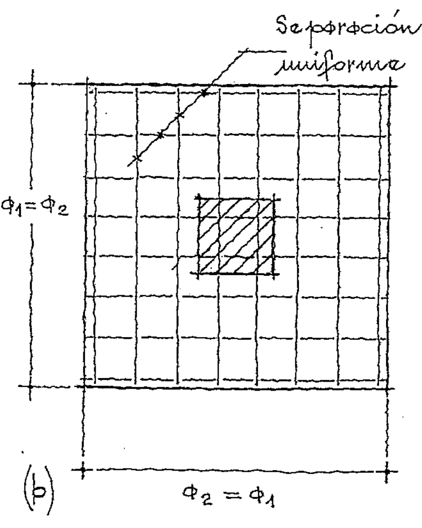
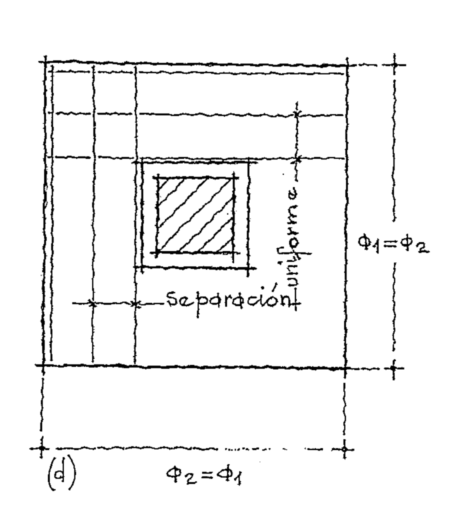


Fig. 17.2. Zapata aislada. Planta.
En zapatas aisladas cuadradas el refuerzo se colocará separado uniformemente, (b).
Figs. 17.3 y 17.4. Zapata aislada con dado, (c) y (d).





Cuando la zapata se construye con un dado de sección mayor que la columna éste proporciona una mayor área de transmisión de la carga entre ambos elementos. En efecto, a mayor sección del dado, menor posibilidad de fallo por penetración.

También se puede evitar la falla aumentando el espesor de la zapata.

En las figs. 17.5 a 17.7, se muestran otros tipos de zapatas cuadradas reforzadas para soportar momentos flexionantes y fuerzas cortantes fuertes, veamos

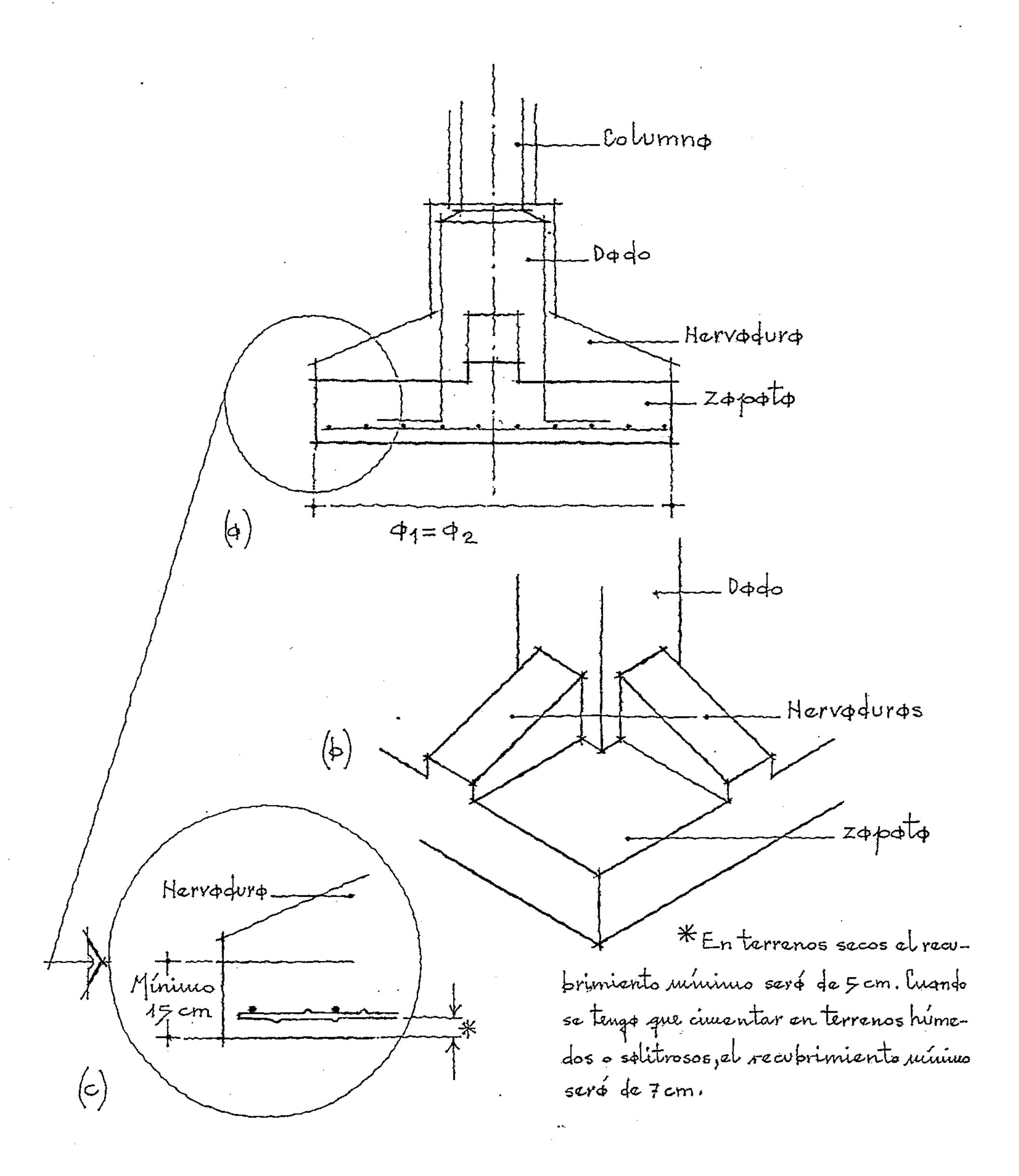


Fig. 17.5. Zapata cuadrada con dado y nervaduras, (a).

Fig. 17.6. Perspectiva de la zapata, (b).

Fig. 17.7. Recubrimientos mínimos en zapatas, (c).

17.2. Zapata aislada cuadrada.- Es ideal para soportar cargas concentradas de una columna.

Cuando el terreno donde se va a cimentar tiene buena resistencia (*Suelo de baja compresibilidad*), las dimensiones de la zapata serán pequeñas y económicas, pero para cargas fuertes y suelos de alta compresibilidad, la zapata aislada no resulta recomendable pues requerirá de dimensiones exageradas, además, será necesario ligarlas con cadenas o dalas para evitar hundimientos diferenciales, figs. 17.8 y 17.9.

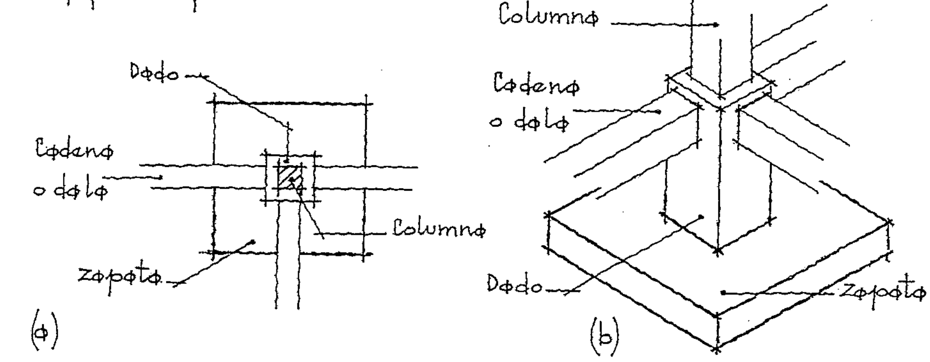


Fig. 17.8. Zapata con dado y cadenas de liga, (a).

Fig. 17.9. Detalle en perspectiva de la zapata y dalas, (b).

Para su análisis y diseño se tendrá en cuenta que una zapata aislada puede fallar por:

a) *Flexión*

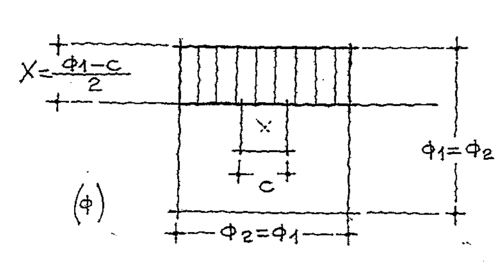
b) *Cortante de penetración, y*

c) *Falta de adherencia entre el acero y el concreto.*

El Reglamento de Construcciones para el D.F, especifica.

a) Por flexión.

La sección crítica por flexión queda determinada por un plano tangente a la cara del elemento vertical que atraviesa la zapata, figs. 17.10 y 17.11.



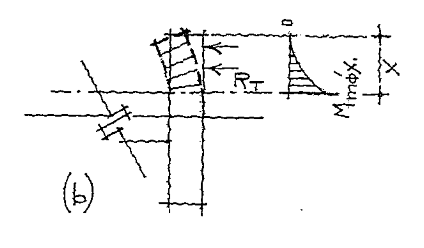


Fig. 17.10. Sección que se utiliza para diseñar la zapata por flexión, (a).

Fig. 17.11. Flexión en la zapata, (b).

b) Por cortante de penetración

La sección crítica por cortante estará localizada a una distancia d/2 de la periferia del área cargada, figs. 17.12 a 17.14

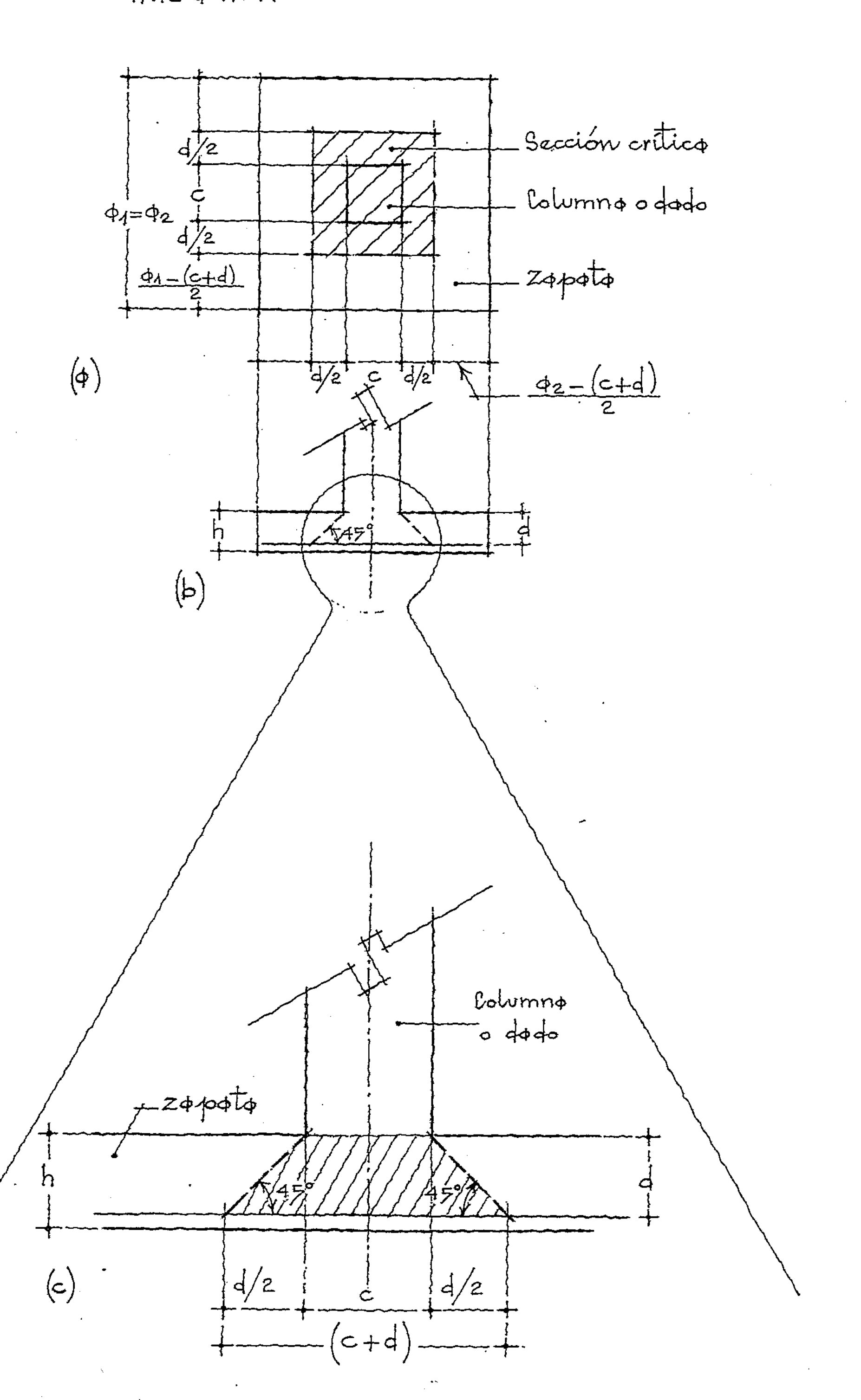


Fig.17.12. Sección crítica en una zapata aislada, (a). Planta.

Fig.17.13. Corte transversal de la zapata, (b).

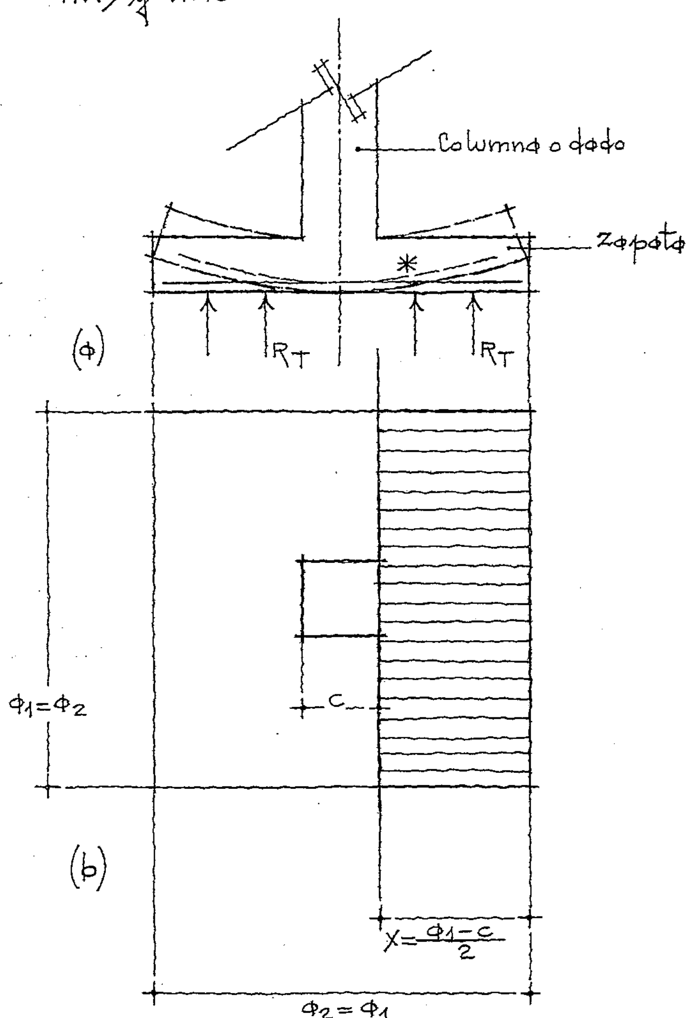
Fig.17.14. Detalle en corte de la sección crítica, (c).

c) Por adherencia o anclaje

La sección crítica es la misma que para flexión, 17.15 y 17.16.

Fig. 17.15. Flexión en la zapata y posibilidad de deslizamiento de las varillas, (a).

Fig. 17.16. Sección crítica para diseño por adherencia, (b).

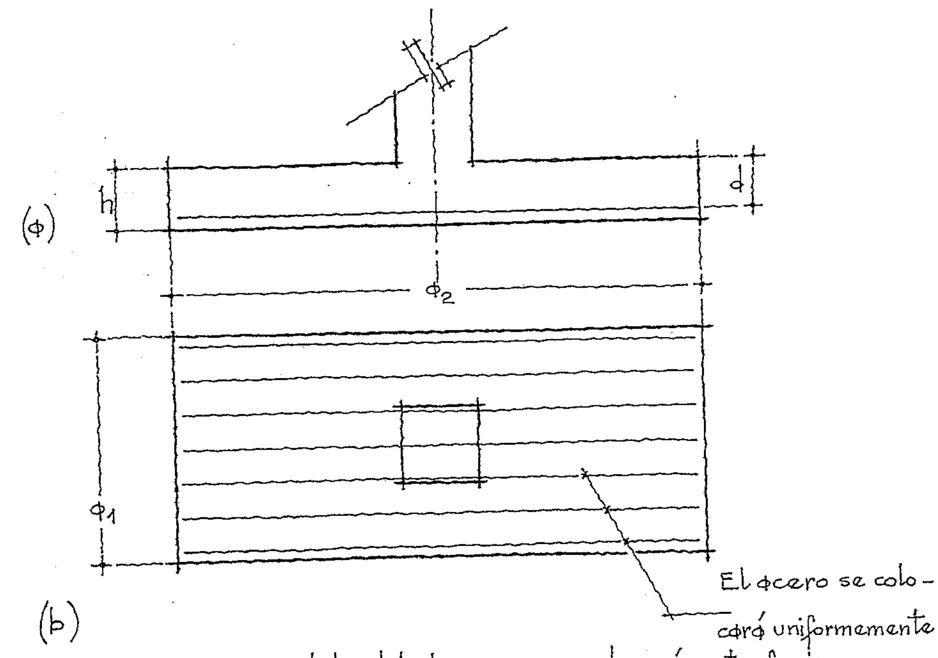


*Al flexionarse la zapata, el acero puede resbalarse dentro del concreto y fallar por falta de adherencia. Se puede evitar, dando mayor longitud de anclaje (Ganchos) o también utilizando un diámetro de varilla más delgado, con el fin de lograr más número de varillas y proporcionalmente obtener mayor número de perímetros en contacto con el concreto.

17.3. Zapata aislada rectangular.- Se utiliza cuando por cuestiones de espacio la zapata requiere tener forma rectangular. Se diseña en forma similar que la zapata cuadrada con pequeños variantes que veremos a continuación.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

1. En una zapata aislada rectangular con flexión en ambas direcciones, el refuerzo paralelo al lado mayor se colocará espaciado uniformemente, figs. 17.17 a 17.19.

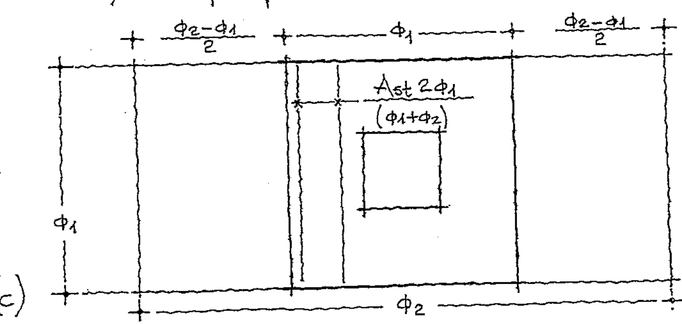


17.17. Zapata rec- ...gular vista en cor- ..., (a).

...g. 17.18. Zapata vista ... planta, (b).

2. El acero paralelo al lado menor se colocará en tres franjas:

a) En la franja central de ancho a_1 una cantidad de acero



...g. 17.19. Franja central ... la zapata rectangu- ...r, (c).



igual a la totalidad que debe colocarse en esa dirección multiplicada por $2a_1/(a_1+a_2)$.

b) El resto se distribuirá uniformemente en las dos franjas extremas.

Para su estudio se considera:

a) Por flexión.

Al ser rectangular la zapata, se presentan dos zonas críticas donde el área de acero se calculará de acuerdo a ambos momentos flexionantes, figs. 17.20 a 17.22.

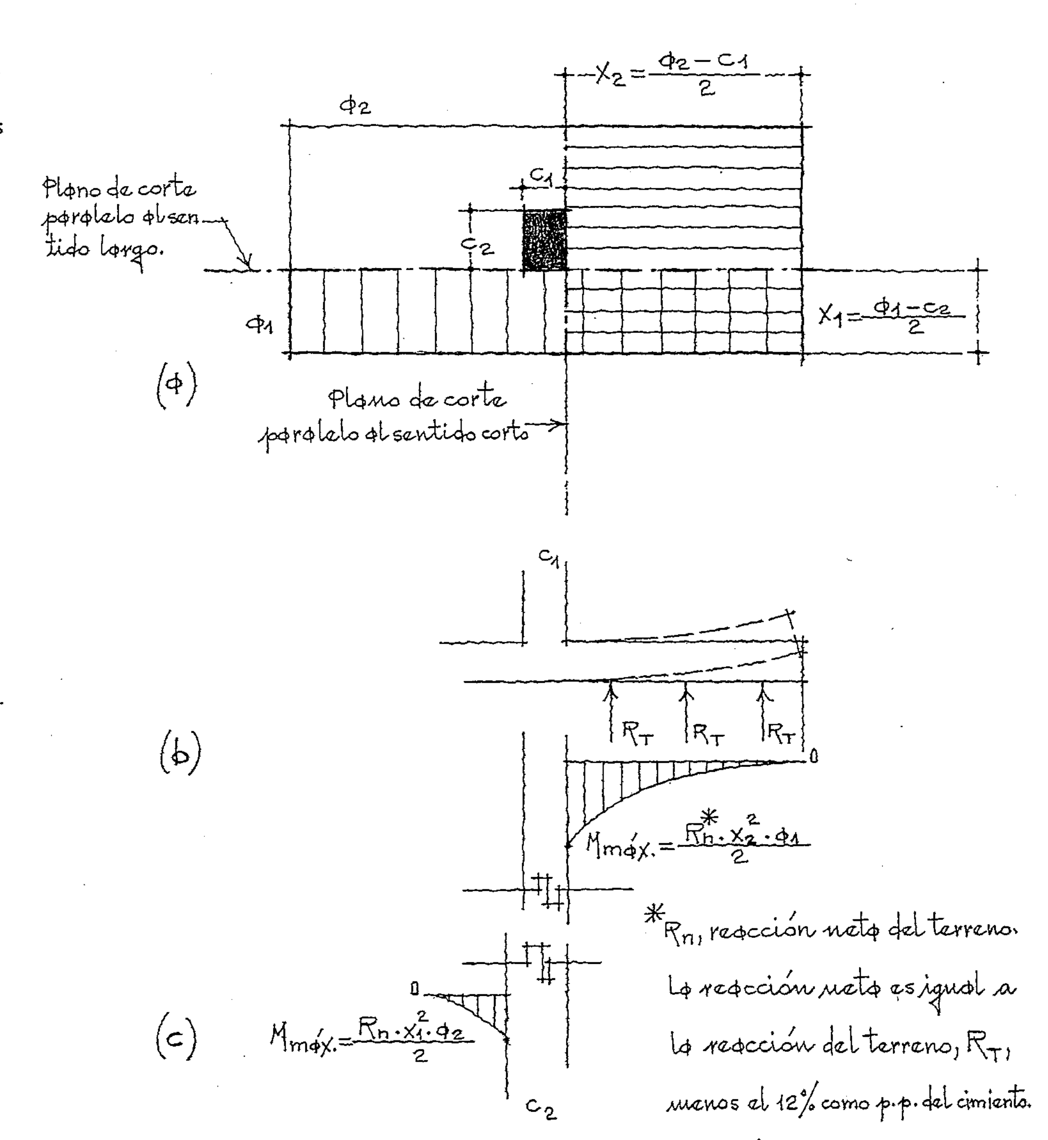


Fig. 17.20. Zapata aislada rectangular; secciones críticas, (a).

Fig. 17.21. Momento flexionante en, x_2, (b).

Fig. 17.22. Momento flexionante en, x_1, (c).

b) Por cortante de penetración

La sección crítica por cortante se localiza a una distancia d/2 de la periferia del área cargada, figs. 17.23 y 17.24.

Fig. 17.23. Sección crítica por cortante en una zapata aislada rectangular, (a).

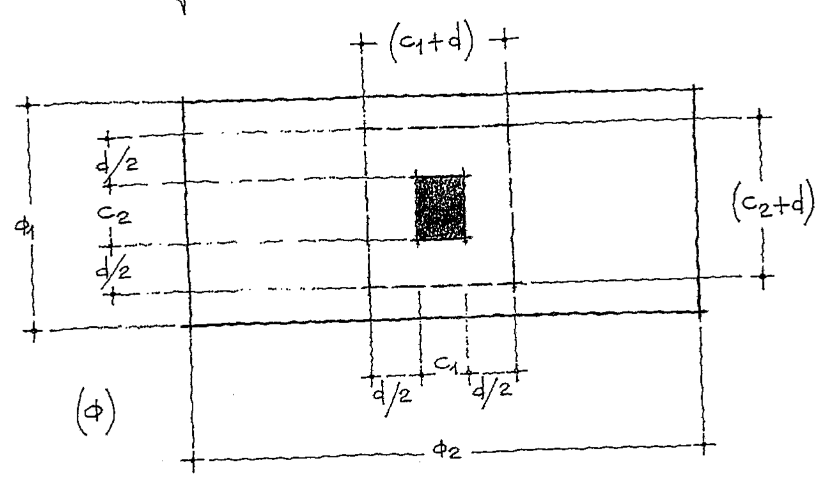
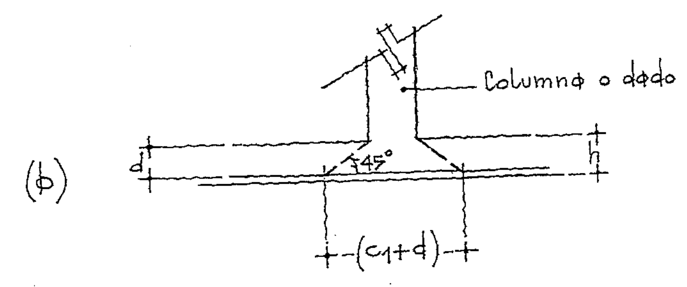


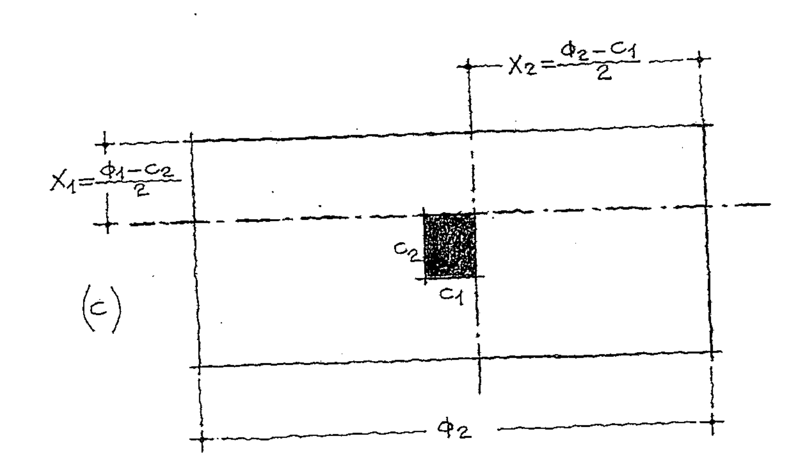
Fig. 17.24. Corte, (b).



c) Por adherencia o anclaje

Las secciones críticas serán las mismas que para flexión, fig. 17.25.

Fig. 17.25. Secciones críticas, (c).



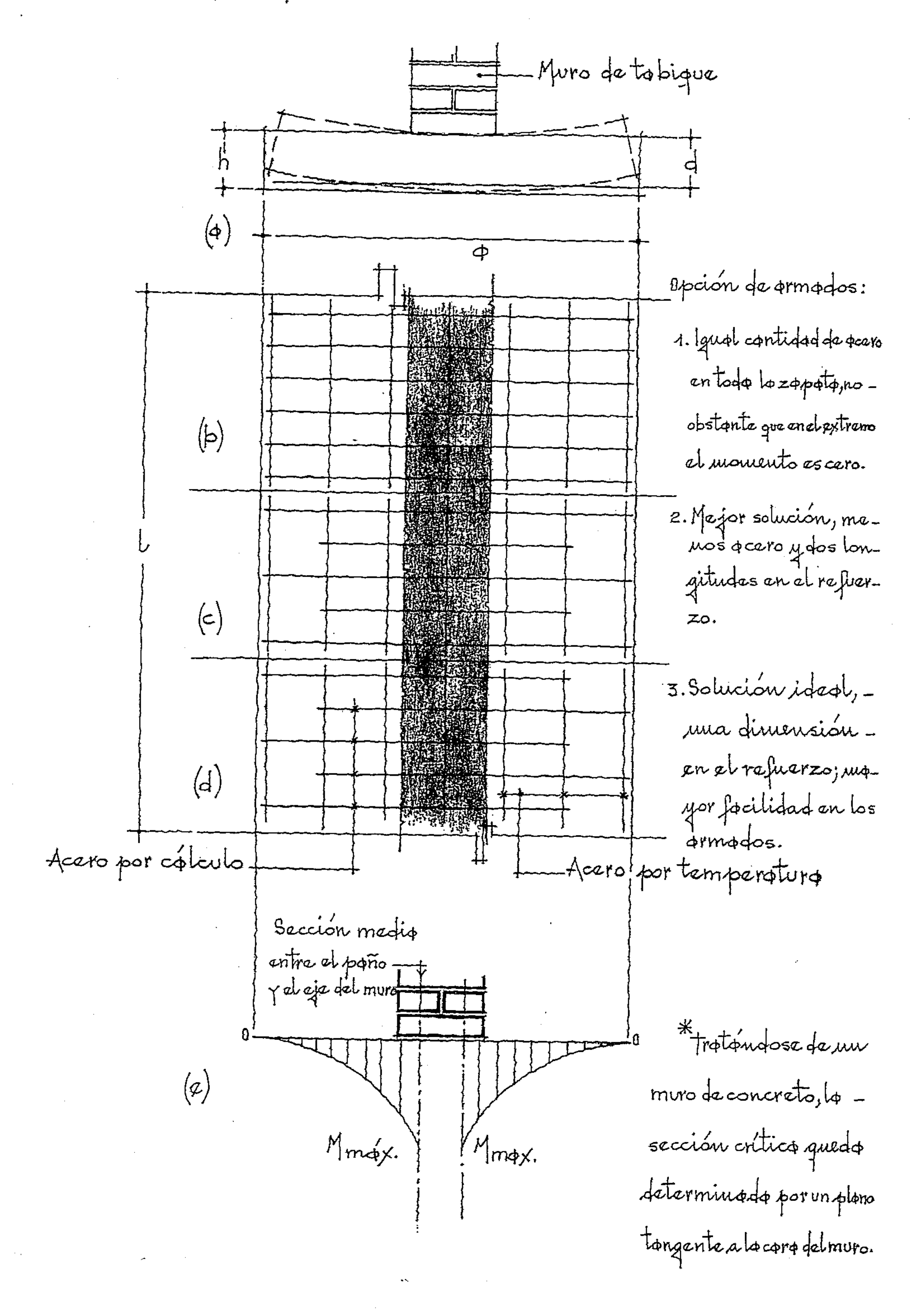
17.4. Zapata corrida para un muro de carga

Se emplean para soportar muros de todo tipo (Concreto,* piedra o tabique). Se flexionan en un solo sentido (Sentido corto perpendicular al lado largo), figs. 17.26 a 17.30.

Fig. 17.26. Flexión en la zapata, (a).

Fig. 17.27, 28 y 29, opciones de armados, (b) (c) y (d) respectivamente.

Fig. 17.30. Momento flexionante, (e).



Estos cimientos van armados con acero de tensión únicamente en un sentido (*sentido perpendicular al lado largo*); además, lleva acero por temperatura paralelo al lado largo que sirve para absorber las contracciones y cambios de temperatura.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

a) Toda estructura protegida de la intemperie, llevará un porcentaje mínimo de $p_{s\,mín.} = 0.2\,\%$.

b) Cuando la estructura se encuentra expuesta a la intemperie el porcentaje mínimo será de $p_{s\,mín.} = 0.3\,\%$.

17.5. Zapata combinada

Se utilizan cuando el cimiento tiene que soportar dos o más columnas. Si las cargas en las columnas son iguales, ambos centroides (*el de carga y el de la zapata coinciden*), figs. 17.31 a 17.33.

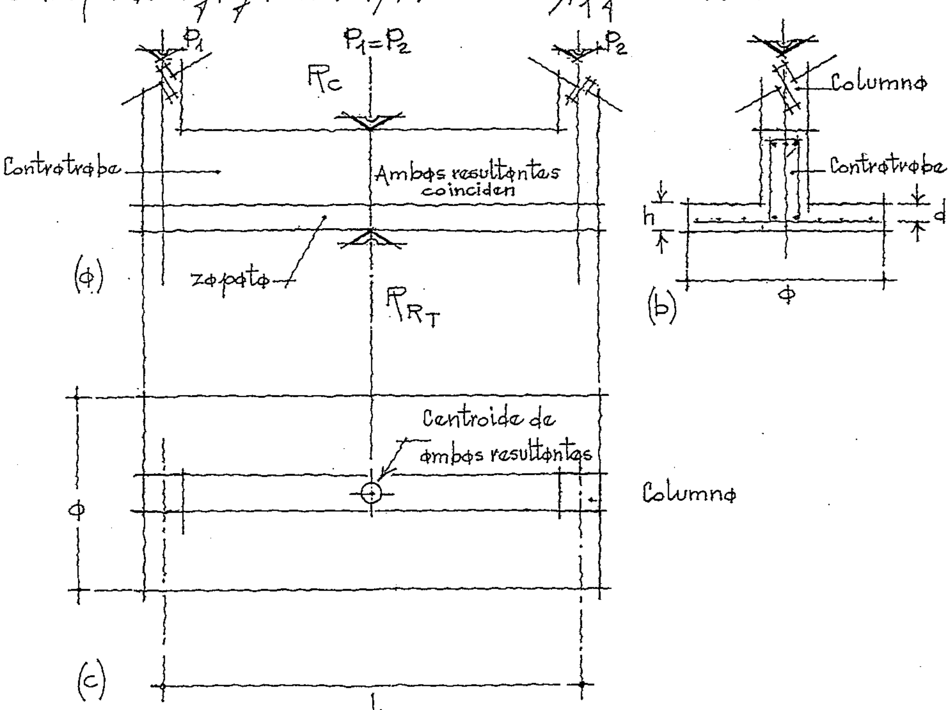


Fig. 17.31. Corte longitudinal de una zapata con contratrabe, (a).

Fig. 17.32. Corte transversal, (b).

Fig. 17.33. Planta de la zapata combinada, (c).

Una zapata combinada no es otra cosa que la unión de dos o más zapatas aisladas.

Hay ocasiones donde las cargas en las columnas son diferentes y será necesario localizar la posición de la resultante para que coincida con el centroide del área de la zapata. Cuando esto suceda, la zapata podrá tener forma trapezoidal o rectangular, figs. 1734 a 17.37.

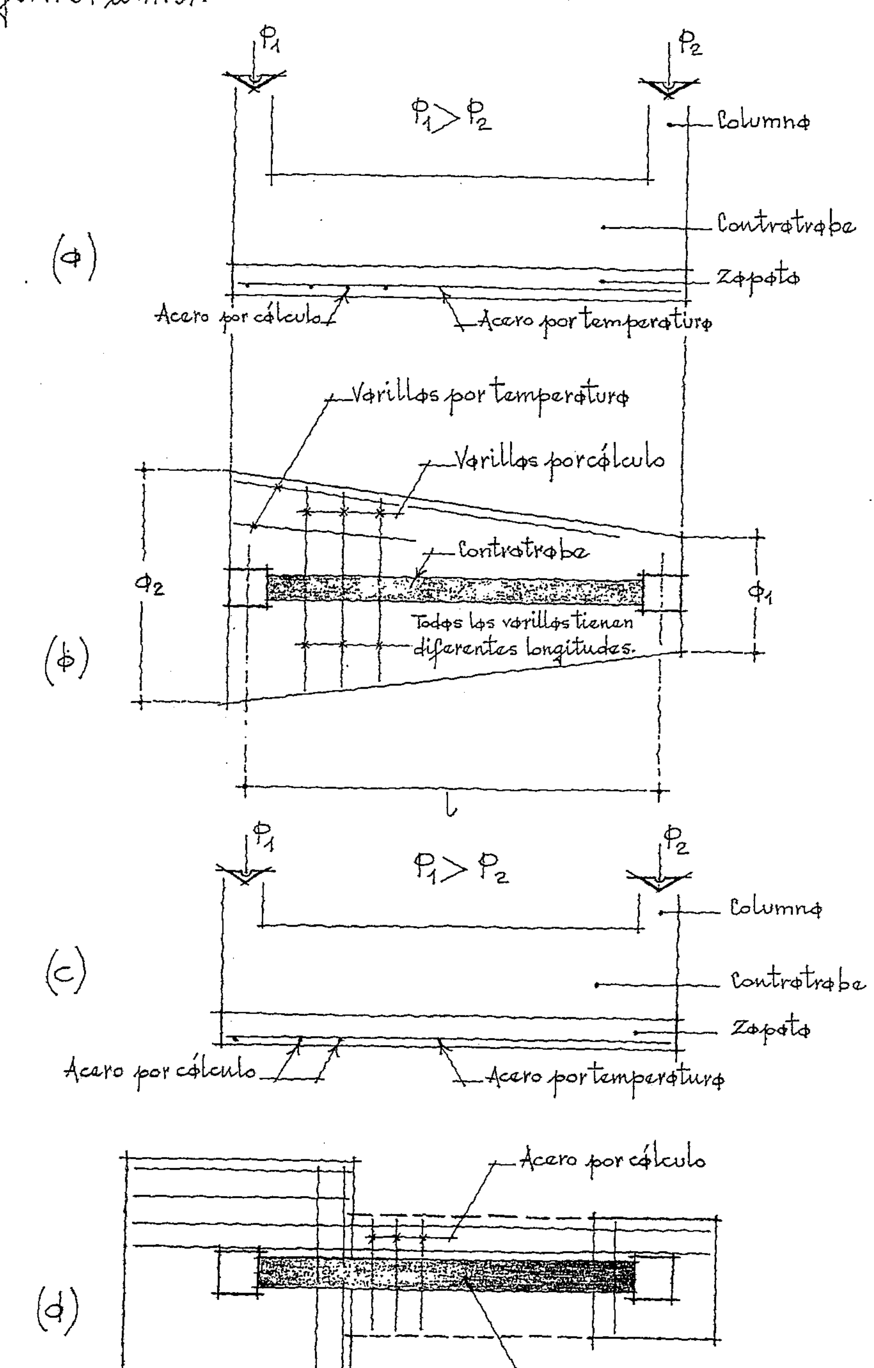


Fig. 17.34. Corte longitudinal de la zapata trapezoidal, (a).

Fig. 17.35. Zapata trapezoidal vista en planta. Armados, (b).

Fig. 17.36. Corte longitudinal de la zapata rectangular, (c).

Fig. 17.37. Unión de dos zapatas aisladas. Planta, (d).

17.6. Losa o placa de cimentación.-

Cuando se tiene un edificio alto y pesado, la cimentación más usual es la losa o placa de cimentación, no obstante, el problema no es sencillo ya que una estructura de este tipo por su altura se encontrará expuesta a empujes de viento y sismo, además de las cargas estáticas.

La losa de cimentación es recomendable cuando el peso del edificio es de tal magnitud que cubre entre 50 y 75% del área de sustentación. Por abajo de estos porcentajes, será más recomendable y económico emplear cimientos aislados o bien la combinación de aislados y corridos.

En efecto, cuando se tiene una construcción pesada en un suelo de alta compresibilidad, las zapatas aisladas y también las corridas requieren de grandes dimensiones, a tal grado, que en muchas ocasiones llegan a juntarse. Cuando esto ocurre, será más aconsejable la losa de cimentación por ser más económica y porque trabaja mejor, figs. 17.38 y 17.39.

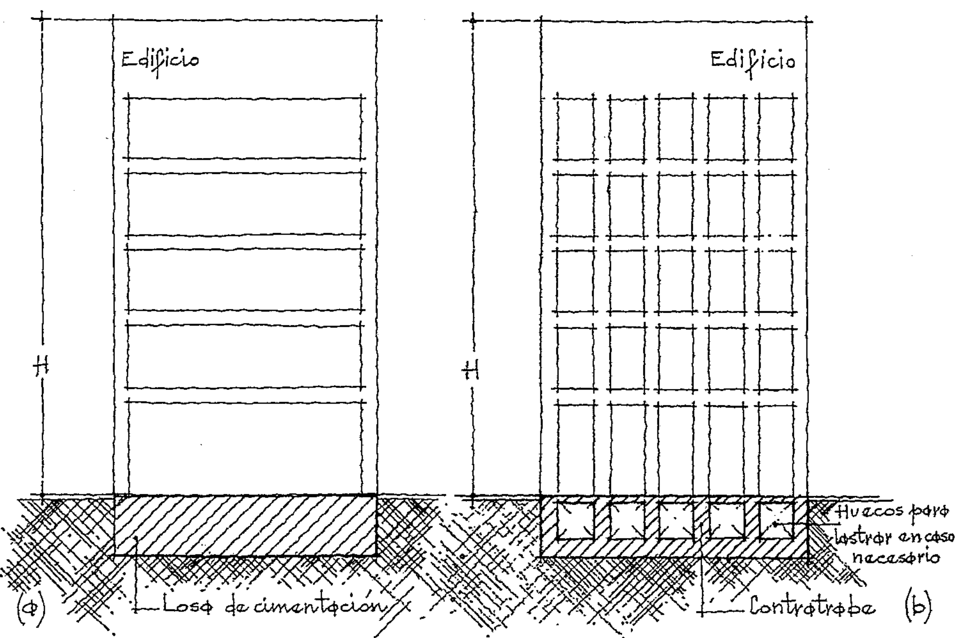
Fig. 17.38. La cimentación cambia de zapatas corridas a losa de cimentación, (a).

Fig. 17.39. Corte transversal de la losa de cimentación. Detalle, (b)

espesor [illegible] capaz de soportar todo el [illegible]
con una losa delgada, no menor de 25 cm, unida a contratrabes para reducir el espesor de la placa, figs. 17.40.

Fig. 17.40. Losa de cimentación sin contratrabes, (a).

Fig. 17.41. Losa de cimentación con contratrabes, (b).

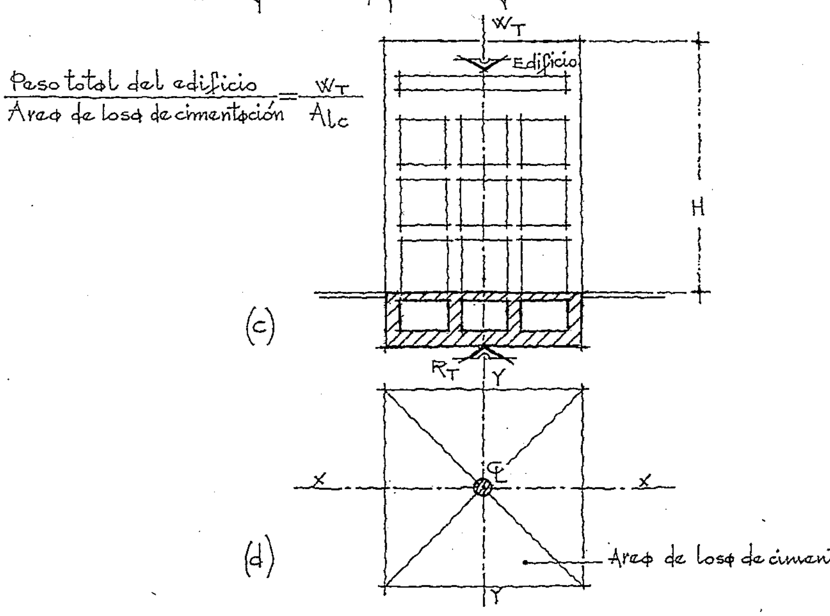


Cuando ambas resultantes coinciden (la de cargas del edificio con el centroide del área de cimentación), la presión bajo la placa o losa de cimentación será igual a, figs. 17.42 y 17.43.

$$\frac{\text{Peso total del edificio}}{\text{Area de losa de cimentación}} = \frac{W_T}{A_{lc}}$$

Fig. 17.42. Losa de cimentación con contratrabes, (c).

Fig. 17.43. Ambas resultantes coinciden, (d).



cuando hay coincidencia [illegible] el pro-
blema es más simple, pero cuando la resultante de las cargas está-
ticas no coincide con el centroide del área de cimentación o cuando sobre el edificio actúan fuerzas horizontales (viento o sismo) en el sentido, P_x o P_y, se producirá un momento cuyo efecto será el mismo que el de una excentricidad ocasionada por el peso del edificio, figs. 17.44 y 17.45

Fig. 17.44. Fuerzas horizontales sobre el edificio, (a).

Momento

P_x

H

h

(a)

L

Y

X

X

L

Y

Fig. 17.45. Planta del edificio, (b).

(b)

$$\text{Momento} = P_x \cdot h$$

$$y, \; e = \frac{M_x}{W_T} = \frac{\text{Momento}}{\text{Peso total del edificio}}$$

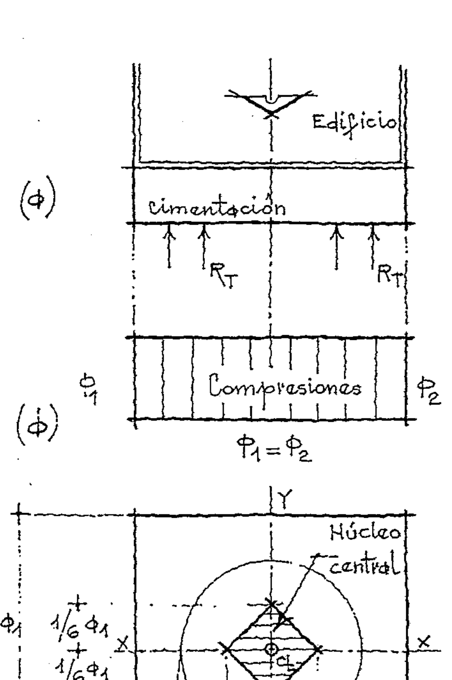
La presión sobre la cimentación se cargará más a un lado u otro dependiendo de la magnitud de la excentricidad.

En efecto, cuando hay total coincidencia entre ambas resultantes o cuando la excentricidad es muy pequeña y cae dentro del núcleo central, la cimentación se encontrará sometida únicamente a esfuerzos de compresión, figs. 17.46 a 17.49.

Fig. 17.46. Corte esquemático del edificio y la cimentación, (a).

Fig. 17.47. Cimentación sometida únicamente a esfuerzos de compresión, (b).

Fig. 17.48. Area de la cimentación mostrando el núcleo central, (c).



El núcleo central nos indica cómo una excentricidad produce coeficientes de trabajo en las fibras extremas, dando valores para la compresión y la tensión, de:

Coeficiente de compresión $= \frac{P}{A}$

y,

Coeficiente de tensión $\pm \frac{M \cdot c}{I}$

donde,

P, carga aplicada en su eje centroidal

A, área de la cimentación.

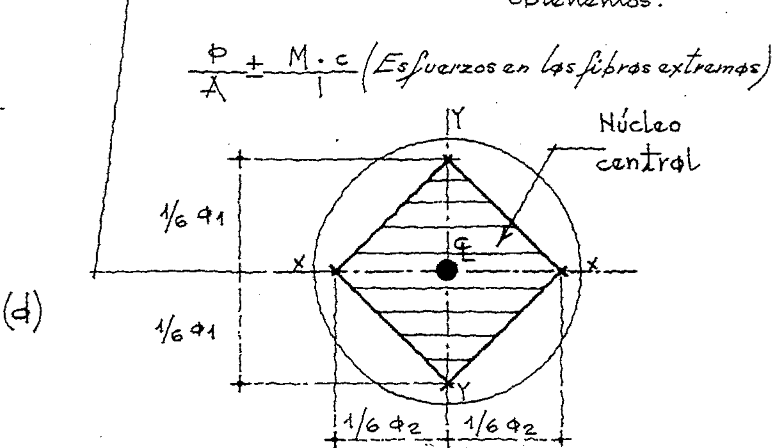
M·c, momento por distancia a la fibra más distante.

I, momento de inercia.

Juntando ambos coeficientes, obtenemos:

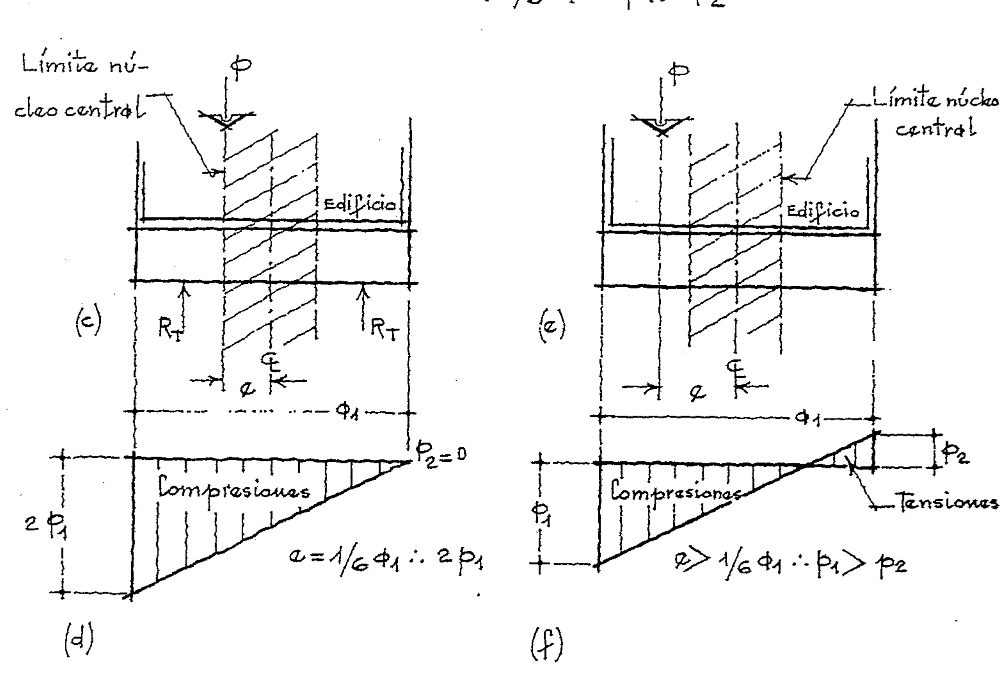
$$\frac{P}{A} \pm \frac{M \cdot c}{I} \text{ (Esfuerzos en las fibras extremas)}$$

Fig. 17.49. Núcleo central a escala mayor, (d).



En toda estructura es prácticamente imposible que no haya excentricidad en la transmisión de las cargas, por lo tanto, aceptando esta realidad analizamos los casos, cuando una carga se desplaza fuera de su eje centroidal.

Efectivamente, el mayor o menor desplazamiento de la carga respecto a su eje centroidal, nos indicará donde tenemos tensiones y donde combresiones, veamos las figs. 17.50 a 17.55.



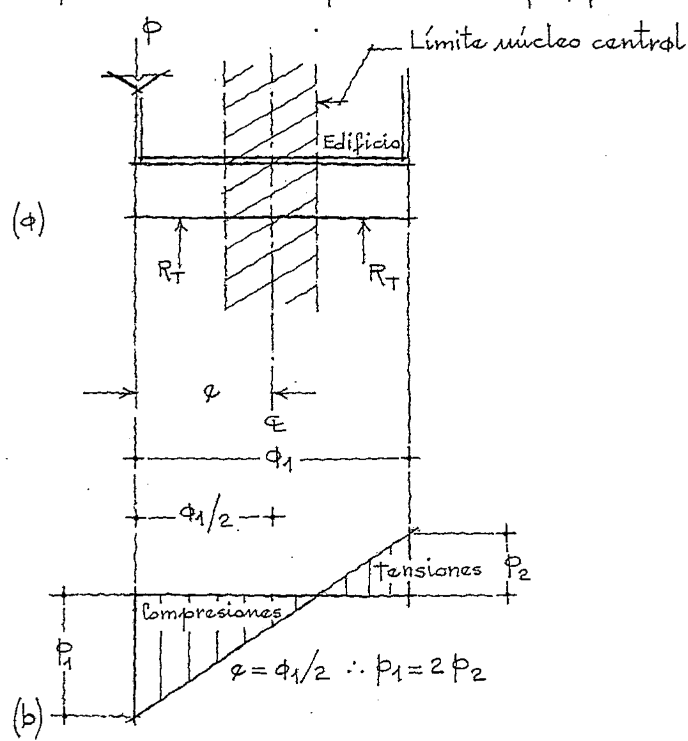
Figs. 17.50 y 51. Corte esquemático del edificio y la cimentación, (a). Gráfico de esfuerzos, (b).

Fig. 17.52. Corte esquemático del edificio y la cimentación, (c). Fig. 17.53. Gráfico de esfuerzos, (d).

Figs. 17.54 y 55. Corte esquemático del edificio y la cimentación (e). Gráfico de esfuerzos, (f).

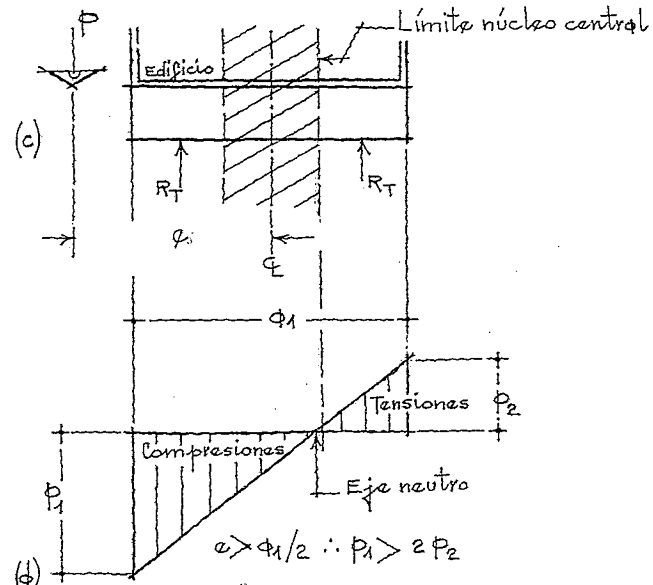
Cuando la resultante de cargas cae en el extremo de la sección (cimentación), la compresión alcanzará un valor igual que el doble de la tensión que se produce en el lado opuesto de la carga, figs. 17.56 a 17.59.

Fig. 17.56 y 57. Corte esquemático del edificio y la cimentación, (a). Gráfica de esfuerzos, (b).



Conforme la resultante de cargas se aleja más del centro de la cimentación, las tensiones aumentan del lado opuesto de la carga, y el eje neutro se acerca cada vez más al centroide de la cimentación, figs. 17.58 y 59.

Fig. 17.58 y 59. Corte esquemático del edificio y la cimentación, (c). Gráfica de esfuerzos, (d).



17.7. Cimentación de pilotes.- Se emplean cuando la resistencia del terreno es baja e incapaz de soportar el edificio. Cuando esto sucede, será necesario apoyarse en mantos de terreno más profundos y resistentes.

Los pilotes pueden trabajar por fricción o también apoyados directamente sobre un manto resistente.

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica:

Todo tipo de cimentación que se apoya sobre pilotes, el espesor mínimo será de 30 cm, figs. 17.60 y 61.

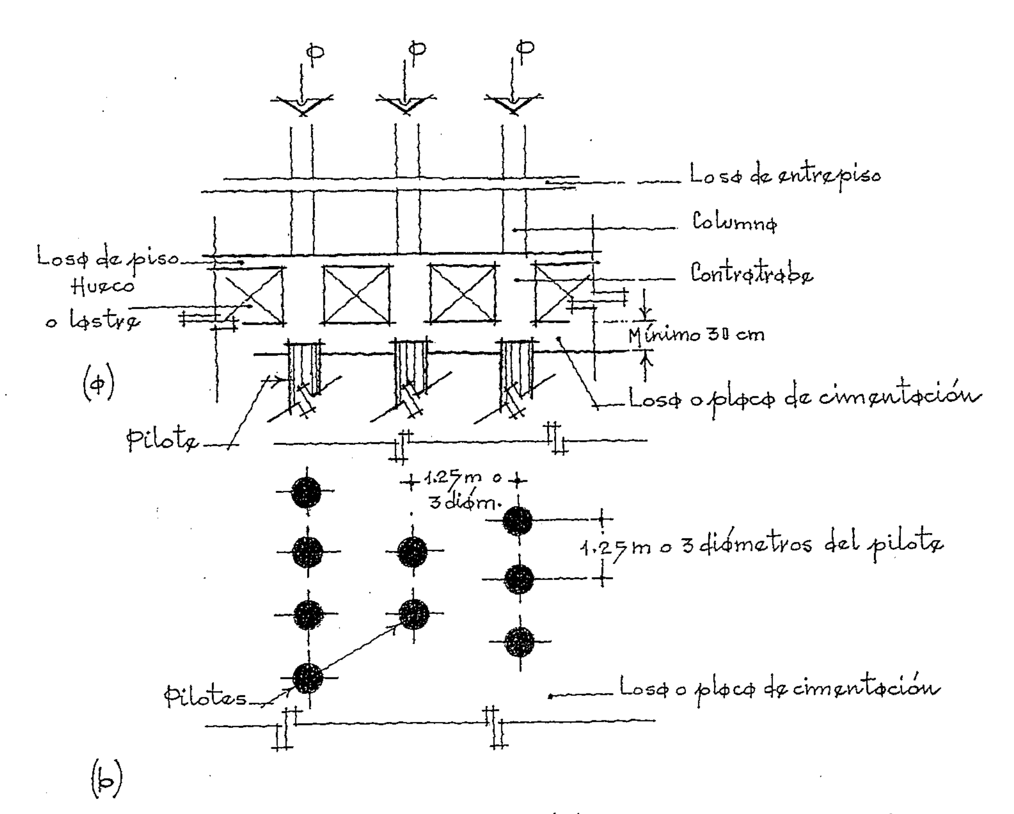


Fig. 17.60. Corte transversal mostrando la cimentación del edificio, (a).

Fig. 17.61. Diferentes posiciones de pilotes y su separación mínima, (b).

La distribución de los pilotes se aconseja que queden de tal forma, que su centroide coincida con la resultante de cargas para que el peso total se reparta igualmente entre cada pilote.

A continuación se presentan varios ejemplos ilustrativos y su solución siguiendo las especificaciones dadas por el Reglamento de Construcciones para el D.F.

Ejemplo ilustrativo (zapata aislada sin pedestal).

En las figs. 17.62 y 17.63, se muestra la zapata aislada cuadrada donde la columna recibe una carga de 70 ton. Calcular la zapata para todos los esfuerzos requeridos por el reglamento. Actúan en la estructura únicamente acciones permanentes y variables.

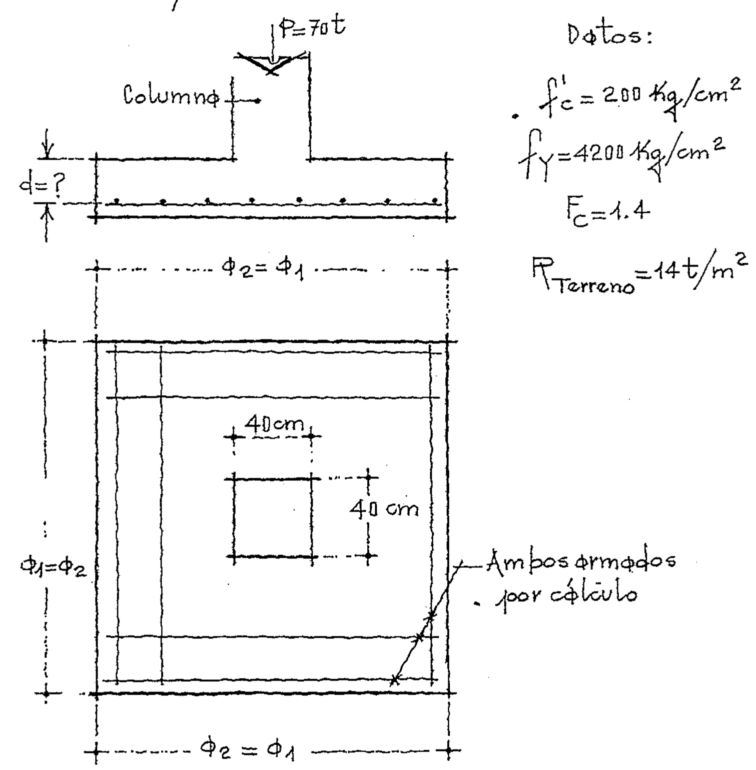


Fig. 17.62. Corte de la zapata aislada, (a).

Fig. 17.63. Zapata aislada. Planta, (b).

Aplicando el factor de carga, obtenemos:

$$P_U = 70 \times 1.4 = 98\,t$$

Cálculo del ancho de la zapata

$$A_z = \frac{P_U}{R_{neta}} = \frac{98000}{R_n = R_T - 10\%} = \frac{98000}{14000 - 1400} \simeq 7.78\ m^2$$

$$\therefore\ a_1 = a_2 = \sqrt{7.78} \simeq 2.80\ m$$

En cimientos de concreto armado se acostumbra dar como peso propio, un porcentaje comprendido entre el 10 y el 15% de la reacción del terreno (R_T) para obtener la reacción neta del terreno (R_n).

Cálculo del momento flexionante, figs. 17.64 a 17.66.

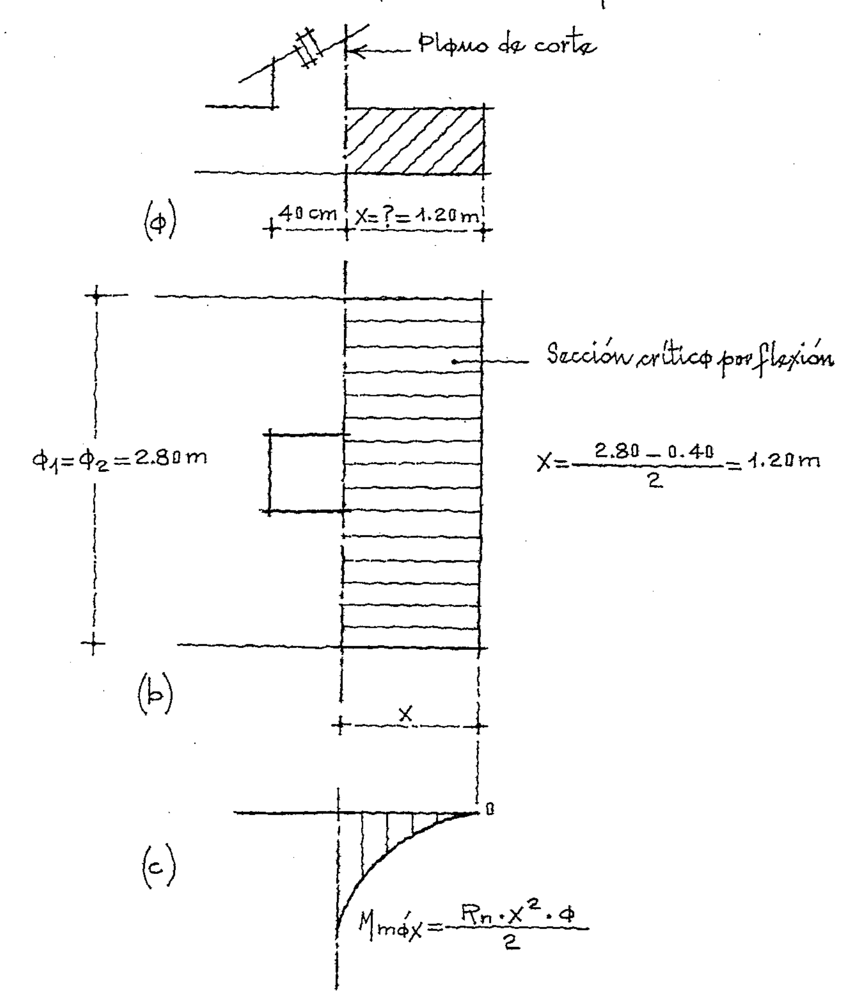


Fig. 17.64. Sección crítica para momento por flexión, (a).

Fig. 17.65. Sección crítica, planta, (b).

Fig. 17.66. Gráfica de momento flexionante, (c).

$$M_{máx.}=\frac{12\,600 \times 1.20^2 \times 2.80}{2}=\frac{50\,803}{2}\simeq 25\,400 \text{ Kgm}$$

El peralte por flexión se obtiene con la ecuación:

$$M_R = F_R\, b d^2 f'_c\, y (1-0.59\, y)$$

Primeramente obtenemos el porcentaje de acero, que deberá estar comprendido entre un mínimo y un máximo para evitar un comportamiento frágil

$$\rho_{mín.}=\frac{14}{f_Y}=\frac{14}{4200}\simeq 0.0034$$

y,

$$\rho_b=\frac{0.85 f'_c \theta}{f_Y}\cdot\frac{6000}{6000+f_Y}=\frac{0.85\times 200\times 0.80}{4200}\cdot\frac{6000}{6000+4200}=0.0188$$

Tomamos un promedio de ambos porcentajes, veamos:

$$\frac{0.0034+0.0188}{2} \simeq 0.011$$

Por tanto

$$\gamma = \rho\frac{f_Y}{f'_c} = 0.011\,\frac{4200}{200} \simeq 0.23$$

$$\therefore\ d^2 = \frac{M_R}{F_R\, b\, f'_c\, \gamma(1-0.59\,\gamma)} = \frac{2\,540\,000}{0.90\times280\times200\times0.23(1-0.59\times0.23)} \simeq 254$$

$$d = \sqrt{254} \simeq 15.9\ \text{cm}$$

Generalmente en las zapatas aisladas cuadradas, la flexión rara vez domina el diseño de la pieza; son los esfuerzos cortantes y de adherencia los que frecuentemente dominan el diseño de la sección. Véanse las figs. 17.67 y 68.

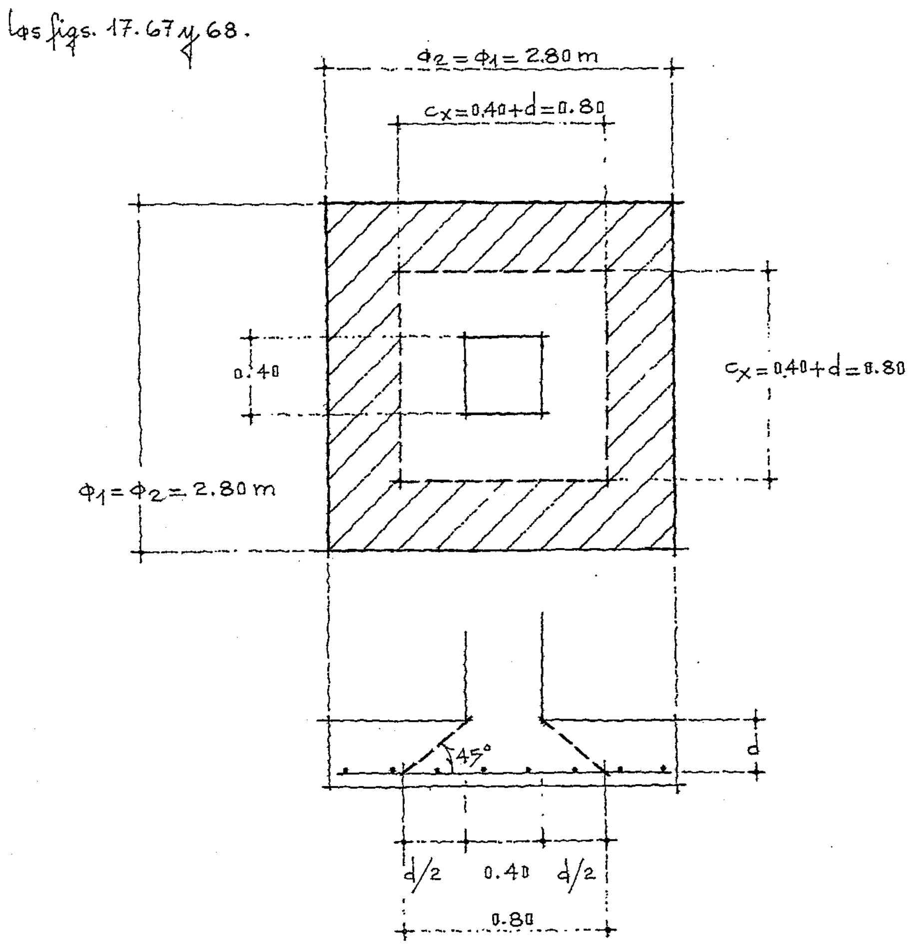
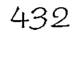


Fig. 17.67. Sección crítica para esfuerzo cortante, (a).

Fig. 17.68. Sección crítica. Corte transversal, (b).

Suponemos para cortante un peralte de 40 cm



Revisamos el cortante con el peralte supuesto

$$v_U = \frac{V_U}{b_o\, d}, \quad y \quad V_U = R_n\left[a_1^2 - c_x^2\right] = 12600\left[2.80^2 - 0.80^2\right]$$

$$V_U = 90720 \text{ Kg}$$

$$\therefore v_U = \frac{90720}{(4\times 80)40} = \frac{90720}{12800} \simeq 7.08 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_{U\,adm.} \leq F_R\sqrt{f_c^*} = 0.7\sqrt{0.8\times 200} \simeq 8.85 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore v_{U\,adm.} > v_U$$

Como se encuentra sobrado podemos intentar con un peralte de 35 cm, veamos:

$$V_U = 12600\left[2.80^2 - 0.75^2\right] \simeq 91696 \text{ Kg}$$

$$v_U = \frac{91696}{(4\times 75)35} = \frac{91696}{10500} = 8.73 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore v_{U\,adm.} > v_U$$

Cálculo del peralte por penetración

$$b_o = 4(40 + d) = 4d + 160$$

Multiplicando todos los términos de la ecuación por, d, se tiene:

$$b_o d = 4d^2 + 160d$$

y limitando, $b_o d$, al máximo cortante admisible, tendremos:

$$b_o d = \frac{P_U}{v_{U\,adm.}} = \frac{98000}{8.85} \simeq 11073 \text{ cm}^2$$

Por tanto,

$$11073 = 4d^2 + 160d$$

$$4d^2 + 160d - 11073 = 0$$

Dividiendo todo entre 4, obtenemos

$$d^2 + 40d - 2768 = 0 \quad \therefore \quad d = \frac{-40 \pm \sqrt{(40)^2 - 4(-2768)}}{2}$$

$$= \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 11073}}{2}$$

$$= \frac{-40 \pm \sqrt{12673}}{2} = \frac{-40 + 112.6}{2}$$

y finalmente,

$$d_p = \frac{72.6}{2} = 36.3 \text{ cm}$$

Dominó el peralte por penetración, por lo tanto, dejamos finalmente un peralte efectivo de 36.3 cm.

Cálculo del área de acero

$$A_s = \rho_s\, b\, d = 0.011 \times 280 \times 36.3 = 111.8\ cm^2$$

Con ϕ_s #6

$$\text{Número de } \phi_s = \frac{111.8}{2.87} \simeq 39\ \phi_s \#6$$

$$\text{separación} = \frac{280}{39} \simeq 8\ cm$$

Anclaje y longitud de desarrollo

El acero de refuerzo debe proporcionar una adherencia en una longitud suficiente de barra, o bien, por medio de algún dispositivo que le dé anclaje adecuado.

De acuerdo con las varillas obtenidas, la longitud de desarrollo valdrá:

$$L_d = 0.06\, \frac{a_{sv}\, f_Y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006\, d_b\, f_Y$$

$$\therefore 0.06\, \frac{2.87 \times 4200}{\sqrt{200}} \simeq 52\ cm$$

y

$$0.006 \times 1.91 \times 4200 \simeq 48\ cm$$

$\therefore$ 52 cm > 48 cm, *se cumple lo dispuesto por el Reglamento*

L_d, longitud de desarrollo, en cm

a_{sv}, área transversal de la varilla, en cm^2

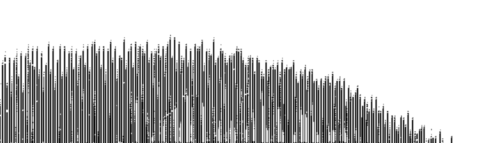
d_b, diámetro de la varilla, en cm

Para evitar espesores muy fuertes en la zapata se aconseja:

a) Aumentar la dimensión de la columna o colocar pedestal de mayor sección.

Al tener mayor área de transmisión, se tiene menos posibilidad de falla por penetración.

b) Aumentar la resistencia del concreto.



Dominó el peralte por penetración, por lo tanto, dejamos finalmente un peralte efectivo de 36.3 cm.

Cálculo del área de acero

$$A_s = \rho_s b d = 0.011 \times 280 \times 36.3 = 111.8 \text{ cm}^2$$

Con ϕ_s #6

$$\text{Número de } \phi_s = \frac{111.8}{2.87} \simeq 39 \phi_s \#6$$

$$\text{separación} = \frac{280}{39} \simeq 8 \text{ cm}$$

Anclaje y longitud de desarrollo

El acero de refuerzo debe proporcionar una adherencia en una longitud suficiente de barra, o bien, por medio de algún dispositivo que le dé anclaje adecuado.

De acuerdo con las varillas obtenidas, la longitud de desarrollo valdrá:

$$L_d = 0.06 \frac{a_{sv} f_Y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006\, d_b f_Y$$

$$\therefore 0.06 \frac{2.87 \times 4200}{\sqrt{200}} \simeq 52 \text{ cm}$$

y

$$0.006 \times 1.91 \times 4200 \simeq 48 \text{ cm}$$

$\therefore$ 52 cm > 48 cm, *se cumple lo dispuesto por el Reglamento*

L_d, longitud de desarrollo, en cm

a_{s_v}, área transversal de la varilla, en cm^2

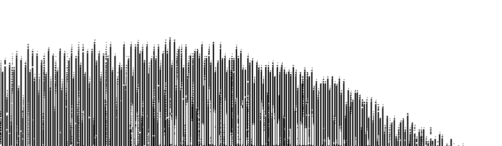
d_b, diámetro de la varilla, en cm

Para evitar espesores muy fuertes en la zapata se aconseja:

a) Aumentar la dimensión de la columna o colocar pedestal de mayor sección.

Al tener mayor área de transmisión, se tiene menos posibilidad de falla por penetración.

b) Aumentar la resistencia del concreto.



Al aumentar f'_c aumentamos también el esfuerzo cortante admisible, v_{adm}.

En las figuras 17.69 a 17.71.

Fig. 17.69. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.70. Planta de la zapata indicando armados, (b).

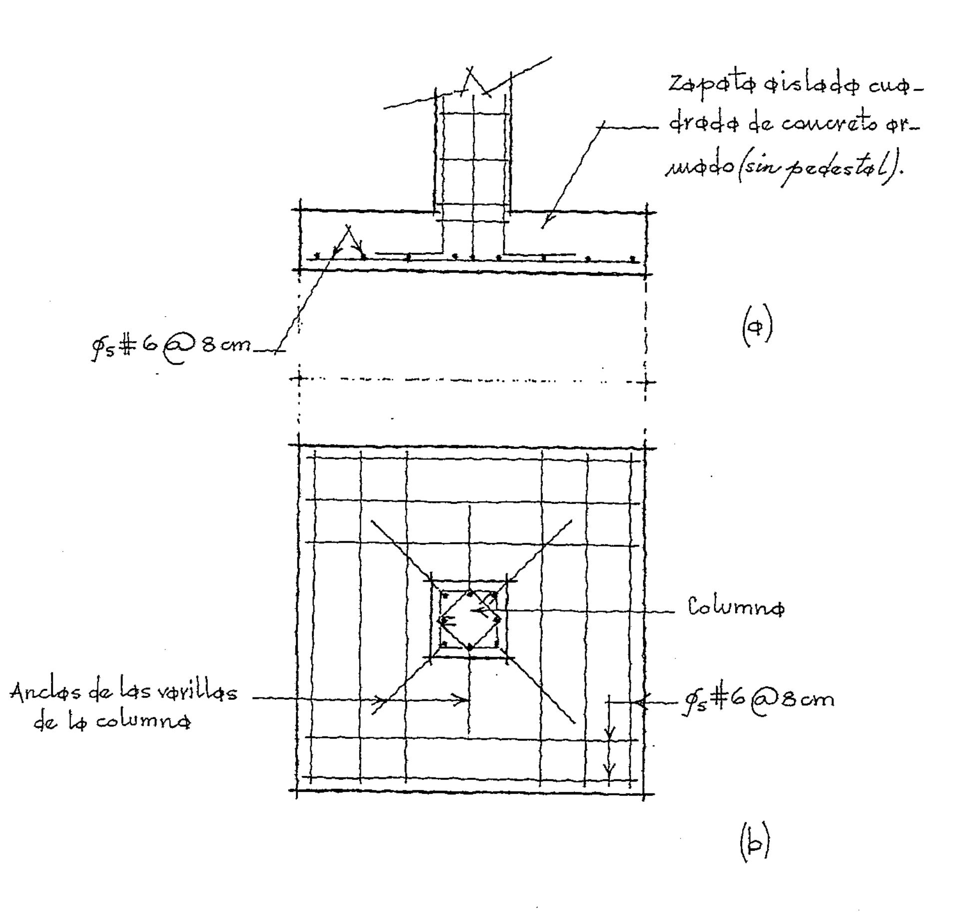
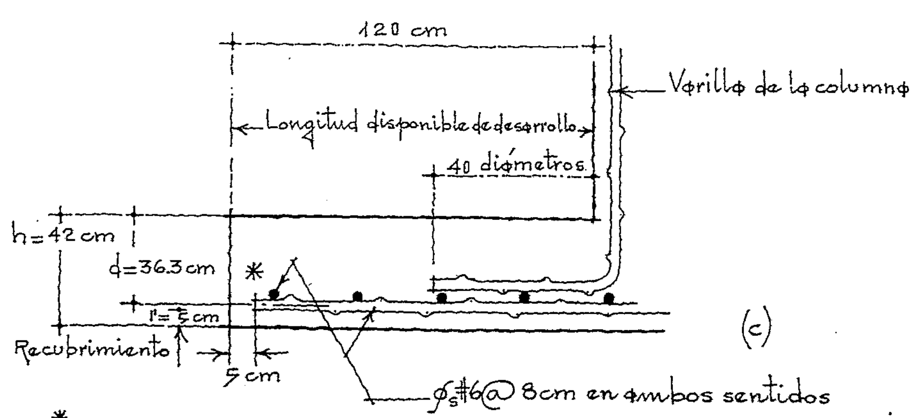


Fig. 17.71. Corte mostrando la longitud de desarrollo o anclaje de la varilla, (c).



*Las varillas de la zapata necesitan una longitud de desarrollo de 52 cm y se cuenta con 120 − 5 cm = 115 cm (se le quitaron 5 cm como recubrimiento en el borde de la zapata), por lo tanto, la longitud de desarrollo se encuentra sobrada.

Por reglamento, L_d en ningún caso será menor de 30 cm.



Ejemplo ilustrativo (zapata aislada rectangular)

La zapata que se muestra en las figs. 17.72 a 17.75, es para una estructura (Sala de espectaculos), y recibe una carga de 120 ton. Diseñar la zapata para todos los esfuerzos requeridos por reglamento.

$R_T = 26\ t/m^2$

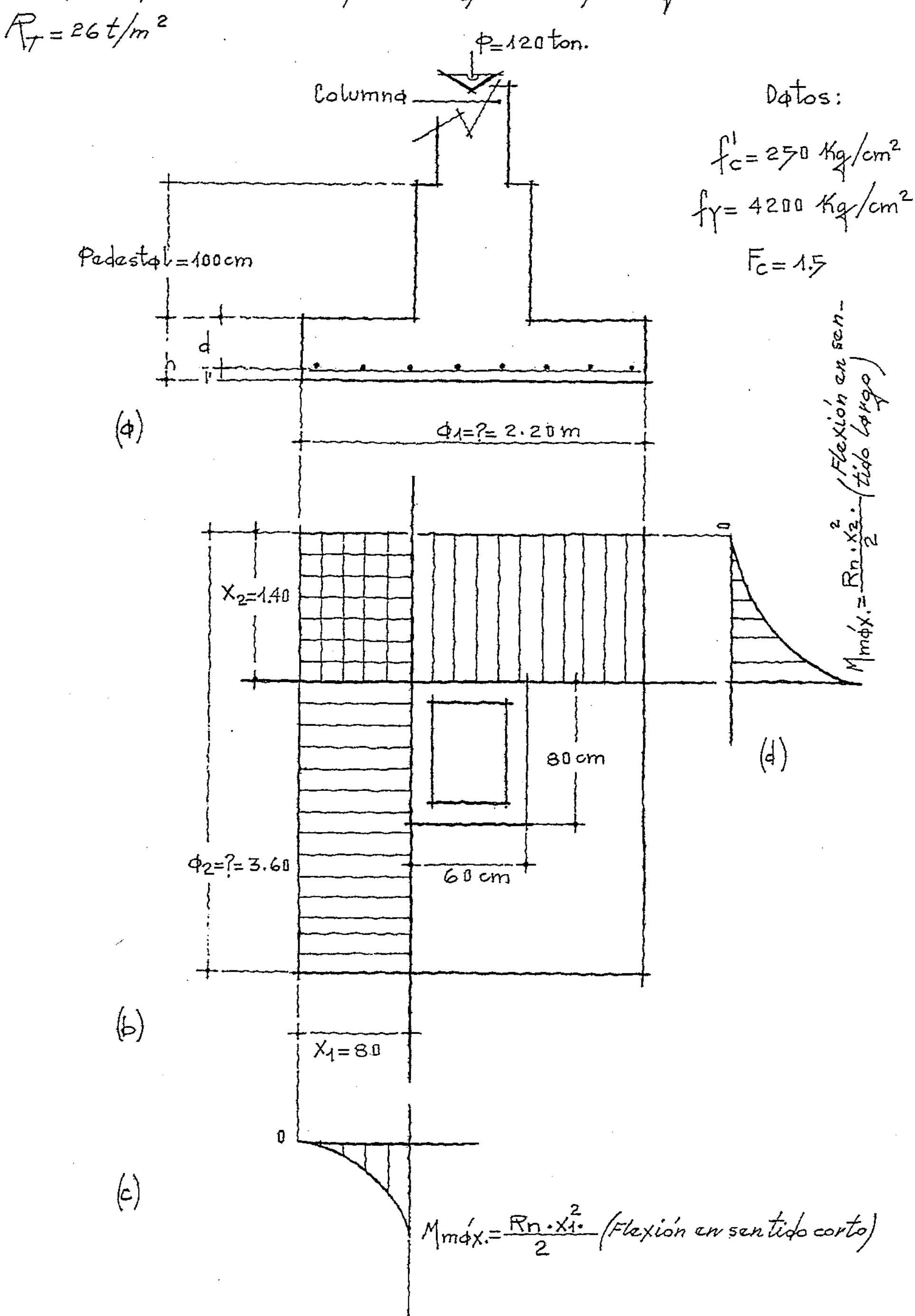


Fig. 17.72. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.73 y 74. Planta de la zapata indicando secciones críticas, (b). Gráfica de momento flexionante, (c).

Fig. 17.75. Gráfica de momento flexionante, (d).

Aplicando el factor de carga, obtenemos:

$$P_U = 120 \times 1.5 = 180 \text{ ton.}$$

Peso propio del pedestal

$$0.60 \times 0.80 \times 1.00 \times 2.40 \simeq 1.15 \text{ ton.}$$

$$\therefore 1.15 \times 1.5 \simeq 1.8 \text{ ton}$$

$$P_U = 180 + 1.8 \simeq 182 \text{ ton}$$

Cálculo del ancho de la zapata

$$A_Z = \frac{P_U}{R_n} = \frac{182}{26 - 10\,\%} = \frac{182}{23.4} \simeq 7.78\ m^2$$

Tratándose de una zapata rectangular, se le puede dar a un lado la dimensión que convenga; para nuestro caso le damos, $a_1 = 2.20$ m por tanto,

$$a_2 = \frac{7.78}{2.20} \simeq 3.60\ m$$

Cálculo del momento flexionante, figs. 17.76 y 17.77

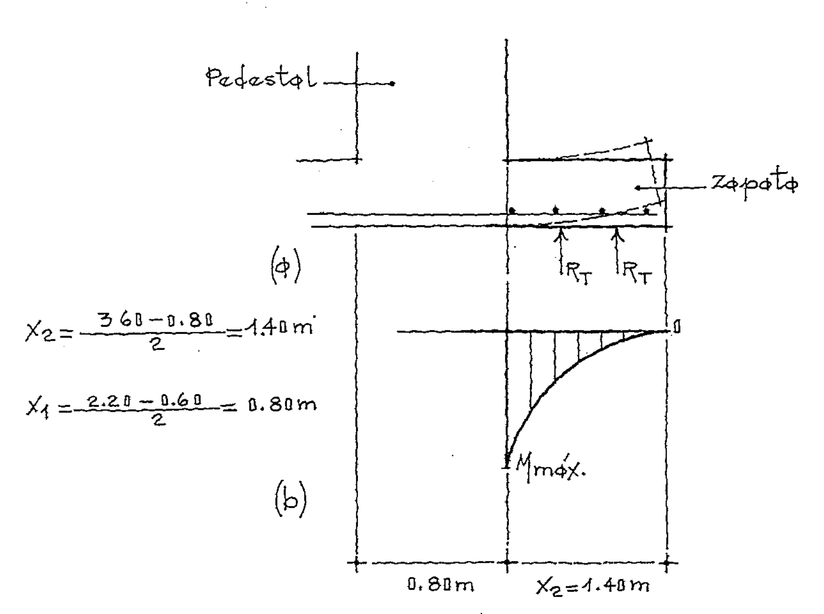


Fig. 17.76. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.77. Gráfica para momento flexionante, (b).

$$M_{máx.} \text{ (Sentido } a_2) = \frac{R_n \cdot a_2^2 \cdot a_1}{2} = \frac{23400 \times 1.40^2 \times 2.20}{2} = 50450 \text{ Kgm} = 5045000 \text{ Kgcm}$$

$$M_{máx.} \text{ (Sentido } a_1) = \frac{R_n \cdot a_1^2 \cdot a_2}{2} = \frac{23400 \times 0.80^2 \times 3.60}{2} \simeq 26960 \text{ Kgm} = 2696000 \text{ Kgcm}$$

Obtención del porcentaje de acero.

Deberá quedar siempre entre el mínimo y la condición ba-

lanceado. Veamos:

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{14}{f_Y} = \frac{14}{4200} \simeq 0.0033$$

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \beta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{10200} = \frac{0.85 \times 250 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{10200} = 0.0235$$

Tomamos el promedio: $0.0033 + 0.0235 \simeq 0.014$

Cálculo del peralte efectivo por flexión

$$d^2 = \frac{5\,045\,000}{0.90 \times 250 \times 220 \times 0.235\,(1 - 0.59 \times 0.235)} \simeq 505\ cm^2$$

$$q = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c} = 0.014\ \frac{4200}{250} = 0.235$$

$$\therefore d = \sqrt{505} \simeq 23\ cm$$

Con la seguridad de que el peralte por cortante y penetración serán mayores, aumentamos el peralte a 40 cm, véanse las figs. 17.78 a 17.80.

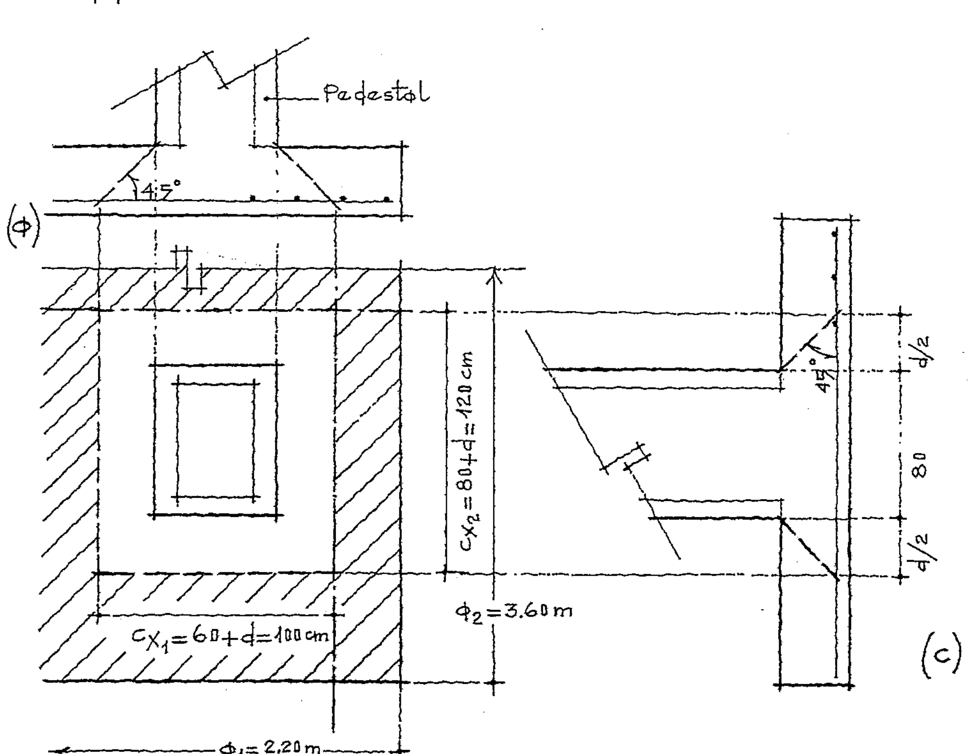


Fig. 17.78. Corte transversal, sección crítica (a).

Fig. 17.79. Planta de la zapata mostrando la sección crítica, (b).

Fig. 17.80. Corte transversal, sección crítica, (c).

Con el peralte supuesto de 40 cm revisamos el cortante

$$v_U = \frac{V_U}{b_o\, d}, \text{ y } \quad V_U = R_n\left[(a_1 \times a_2) - (c_{X_1})(c_{X_2})\right] = 23400\left[(2.20 \times 3.60) - (1.00 \times 1.20)\right]$$

$$\therefore V_U = 23\,400\,[(6.72)] = 157248\ Kg$$

$$v_{U adm.} \leq F_R \sqrt{f_c^*} = 0.7\sqrt{0.8 \times 250} \simeq 9.90 \ Kg/cm^2$$

$$d = \frac{157248}{[(2\times100)+(2\times120)]\,9.90} = 36 \text{ cm}$$

El peralte supuesto se encuentra un poco sobrado, pero no amerita ser rectificado.

Calculamos a continuación el peralte por penetración

$$b_o = 2(60+d) + 2(80+d)$$

$$b_o = 2d + 120 + 2d + 160 = 4d + 280 \; . \; . \; y,$$

multiplicando todos los términos de la ecuación por d, se tiene:

$$b_o d = 4d^2 + 280d \; . \; . \; y,$$

$$b_o d = \frac{P_U}{v_{U adm.}} = \frac{182\,000}{9.90} \simeq 18\,380 \text{ cm}^2$$

y efectuando operaciones se obtiene finalmente

$$d_P = 41 \text{ cm}$$

El peralte en la zapata deberá aumentarse a 41 cm, ya que el peralte por penetración dominó el diseño de la pieza.

Areas de acero

Sentido largo:

$$A_s = \rho_s a_1 d = 0.014 \times 220 \times 41 \simeq 126.28 \text{ cm}^2$$

con ϕ_s #8 $= \frac{126.28}{5.07} \simeq 25\phi_s$ Separación $= \frac{220}{25} \simeq 9$ cm

Sentido corto:

$$A_s = \rho_s a_2 d = 0.014 \times 360 \times 38.46^* \simeq 193.84 \text{ cm}^2$$

* Al peralte de 41 cm se le restó un diámetro por tener dos lechos de varillas por cálculo.

En el sentido paralelo al lado corto, el acero se distribuirá de acuerdo con lo especificado por el reglamento, que dice:

"En la franja central, de ancho a_1, se colocará una cantidad de acero igual a la totalidad que debe colo-

carse en esa dirección multiplicada por $\frac{2\,a_1}{a_1+a_2}$, veamos:

$$\frac{193.84\times2\times220}{220+360}=\frac{85\,290}{580}\simeq147\,cm^2$$

$$\text{Con } \phi_s\#8=\frac{147}{5.07}\simeq29\,\phi_s\#8\ \therefore\ \text{Sep.}=\frac{220}{29}\simeq8\,cm$$

El resto del acero se distribuirá uniformemente en las dos franjas extremas:

$$193.84-147=46.84\,cm^2\ \therefore\ 46.84\div5.07\simeq10\,\phi_s\#8$$

Separación en cada franja: $\frac{360-220}{2}=70$ cm, en cada franja

$$\therefore\ \frac{70\,cm}{5\phi_s}=14\,cm$$

Cálculo del anclaje y longitud de desarrollo

$$L_d=0.06\frac{a_{svr}f_Y}{\sqrt{f'_c}}\geq0.006\,d_b\,f_Y$$

Por lo tanto,

$$\frac{0.06\times5.07\times4200}{\sqrt{250}}=80.81\simeq81\,cm$$

y,

$$0.006\times2.54\times4200=64\,cm\ \therefore\ 81\,cm>64\,cm\ (correcto)$$

En las figs. 17.81 a 17.83.

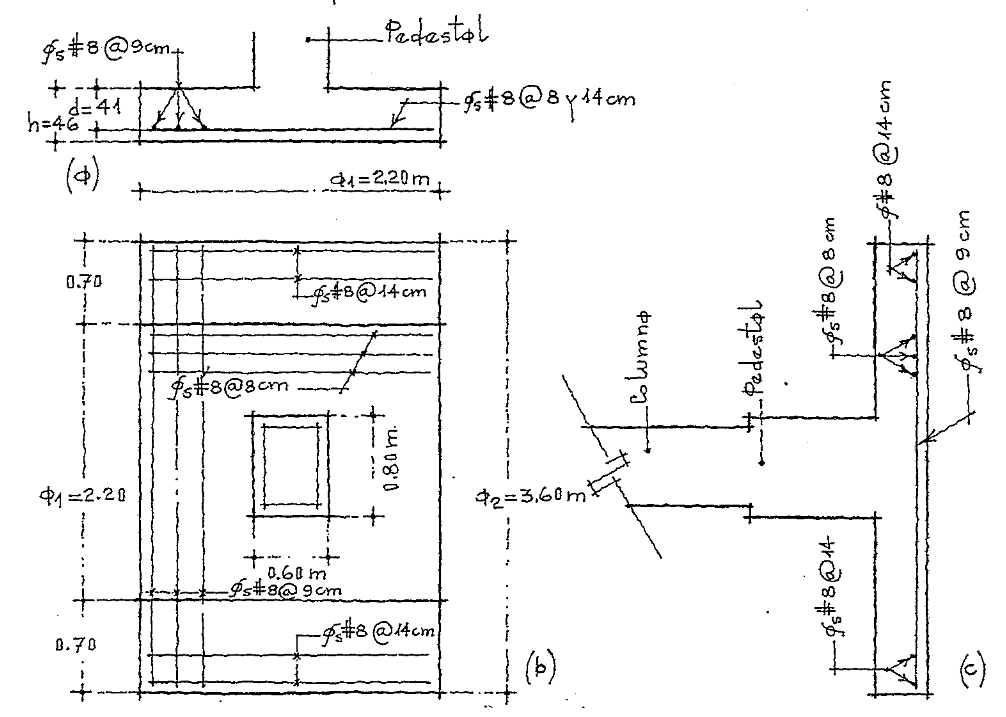


Fig. 17.81. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.82. Zapata aislada rectangular. Planta, (b).

Fig. 17.83. Corte transversal, sentido a_2, (c).

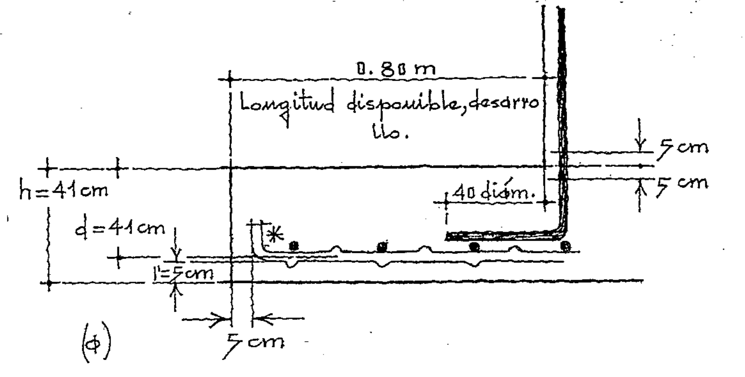


Fig. 17.84. Corte mostrando la longitud de desarrollo o anclaje de las varillas, (a).

En el pedestal se aconseja colocar un anillo arriba y otro abajo de la intersección de la columna con la zapata.

* En el sentido corto se cuenta con una longitud de desarrollo de 80 cm, menos 5 cm para protegerlas de un recubrimiento adecuado. El cálculo requiere de una longitud de 81 cm, en consecuencia, será necesario hacer un gancho para cumplir con la longitud requerida.

Sentido largo

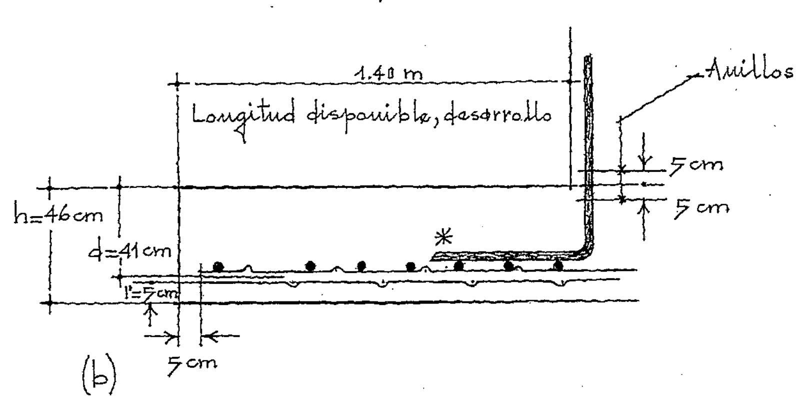


Fig. 17.85. Corte mostrando la longitud de desarrollo de las varillas, (b).

La zapata podrá descansar sobre una plantilla de tabique, concreto, o bien colocarse directamente sobre el suelo previamente consolidado.

* Las varillas de la columna deberán colocarse arriba del emparrillado que forma las varillas de la zapata.

Ejemplo ilustrativo (zapata aislada rectangular sometida a una acción accidental)

Una columna de 70x70 cm se encuentra sometida a una combinación de acciones permanentes, variables y accidentales (viento), como se muestra en las figs. 17.86 a 17.90.

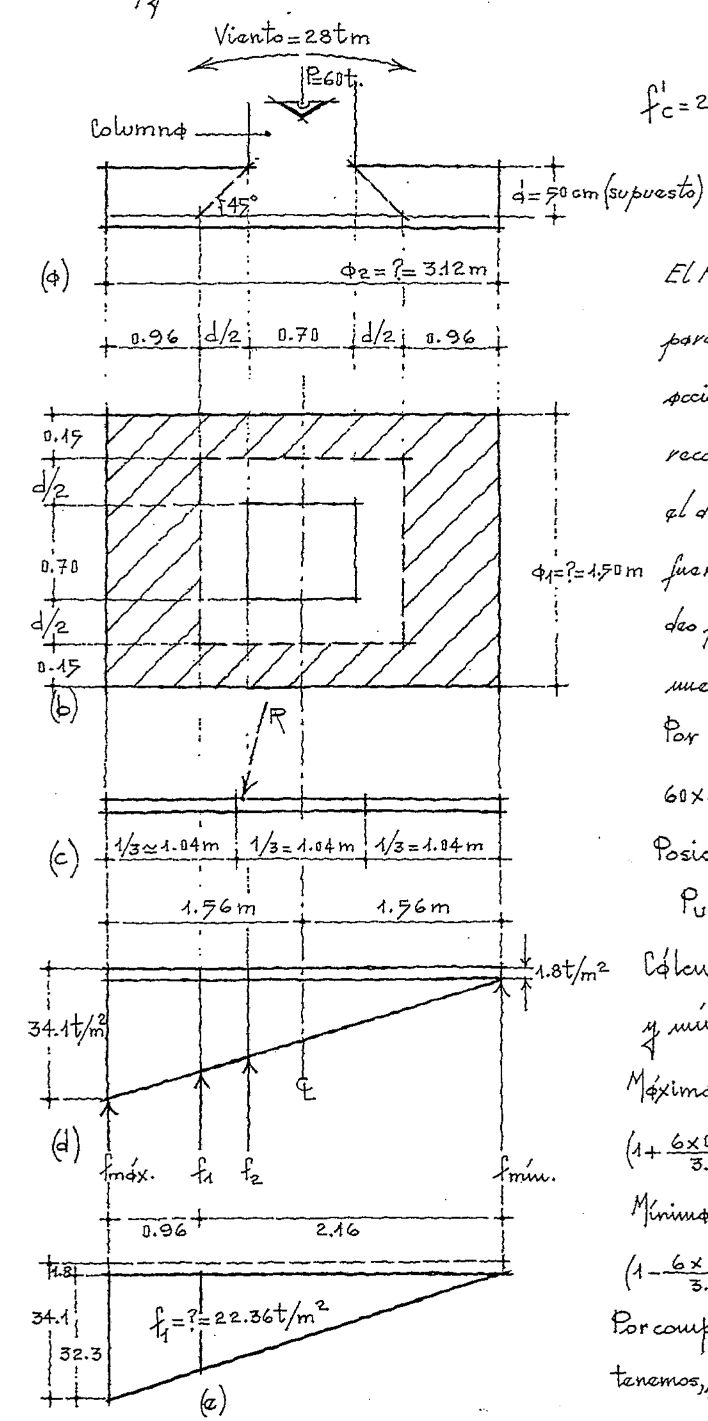


Fig. 17.86. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.87. Sección crítica para esfuerzo cortante, (b).

Fig. 17.88. Ubicación de la resultante, (c).

Fig. 17.89. Diagrama mostrando la fatiga máxima y mínima en la zapata, (d).

Fig. 17.90. Valor de la fatiga, f_1 (paño de la sección crítica, cortante), (e).

Datos:

$f'_c = 250\ Kg/cm^2$; $f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

$R_T = 20\ t/m^2$

Factor de carga, $F_c = 1.4$*

El Reglamento de Construcciones para el D.F., especifica para estas acciones un $F_c = 1.1$. Sin embargo, recomienda tomar $F_c = 1.4$ para el diseño de miembros sujetos a fuerzo cortante, tensión y pandeo por compresión axial. Para nuestro ejemplo tomamos $F_c = 1.4$

Por lo tanto, se tiene:

$60 \times 1.4 = 84t$; $28 \times 1.4 = 39.2tm$

Posición de la resultante:

$P_u \cdot e = M \therefore e = \frac{39.2}{84} \simeq 0.47m$

Cálculo de las fatigas máxima y mínima:

$$Máxima = \frac{P_u}{A_z}\left(1 \pm \frac{6e}{\Phi_2}\right) = \frac{84}{1.50 \times 3.12}\left(1 + \frac{6 \times 0.47}{3.12}\right) = 17.95(1+0.9) \simeq 34.10t/m^2$$

$$Mínima = \frac{P_u}{A_z}\left(1 - \frac{6e}{\Phi_2}\right) = \frac{84}{1.50 \times 3.12}\left(1 - \frac{6 \times 0.47}{3.12}\right) = 17.95(1-0.9) \simeq 1.80t/m^2$$

Por comparación de triángulos, obtenemos, f_1: $\frac{32.3}{f_1} = \frac{3.12}{2.16} \therefore f_1 = 22.36$

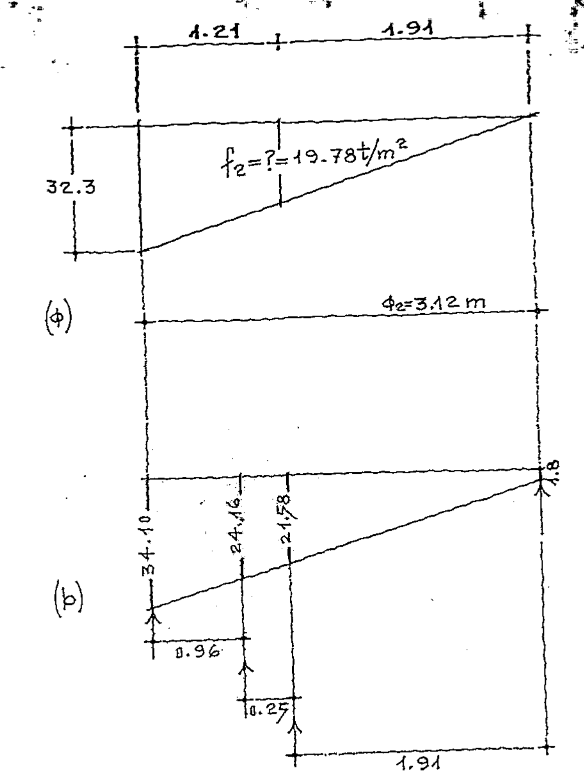


Fig. 17.91. Obtención de las fatigas en diferentes puntos, (a).

Fig. 17.92. Valor de las fatigas en:
a) Extremo de la zapata.
b) Plano crítico.
c) Plano tangente a la columna. (b).

$\frac{32.3}{3.12} = \frac{f_2}{1.91}$; $f_2 = \frac{32.3 \times 1.91}{3.12}$

$\therefore f_2 \simeq 19.78 t/m^2$

Esfuerzo cortante, fig. 17.92

El Reglamento dice:

"Al tomar en cuenta la combinación de acciones permanentes, variables y accidentales, el esfuerzo cortante no excederá de $F_R \sqrt{f_c^*}$. Además, el factor F_R se tomará igual a 0.7."

Por tanto

$v_{u\,adm.} \leq F_R \sqrt{f_c^*} = 0.7 \sqrt{0.8 \times 250}$

$\simeq 9.90$ Kg/cm²

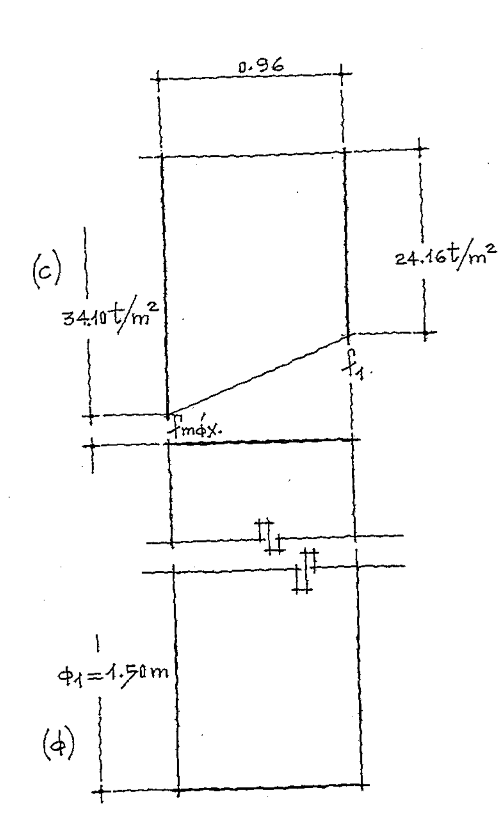


Fig. 17.93. Obtención de cortantes máximos, (c).

Fig. 17.94. Planta que comprende el área de $f_{máx.}$ y f_1, (d).

Cortante máximo, figs. 17.93 y 94.

$\frac{34.10 + 24.16}{2} \simeq 29.13 t/m^2$

Area correspondiente:

$0.96 \times 1.50 = 1.44 m^2$

$\therefore 29.13 \times 1.44 \simeq 41.95$ ton.

Fig. 17.95. Cortantes máximos, (a).

Fig. 17.96. Planta que comprende el área de f_1 y f_2, (b).

0.25

24.16 t/m²

21.58 t/m²

(a)

f_1

f_2

Plano tangente a la columna

1.20 m

$a_1 = 1.50$ m

(b)

Cortante máximo, figs. 17.95 y 96.

$$\frac{24.16 + 21.58}{2} = 22.87 \text{ t/m}^2$$

Área correspondiente:

$$\frac{1.50 + 1.20}{2}(0.25) \simeq 0.34 \text{ m}^2$$

$$\therefore 22.87 \times 0.34 \simeq 7.78 \text{ ton.}$$

Cortante máximo:

$$41.95 + 7.78 = 49.73 \text{ ton.}$$

$$\therefore v_U = \frac{V_U}{F_R(120)d} = \frac{49730}{0.7(120)50} = 11.84$$

$$11.84 \text{ Kg/cm}^2 > 9.90 \text{ Kg/cm}^2$$

La zapata falla a cortante.

Aumentamos el peralte a 60 cm

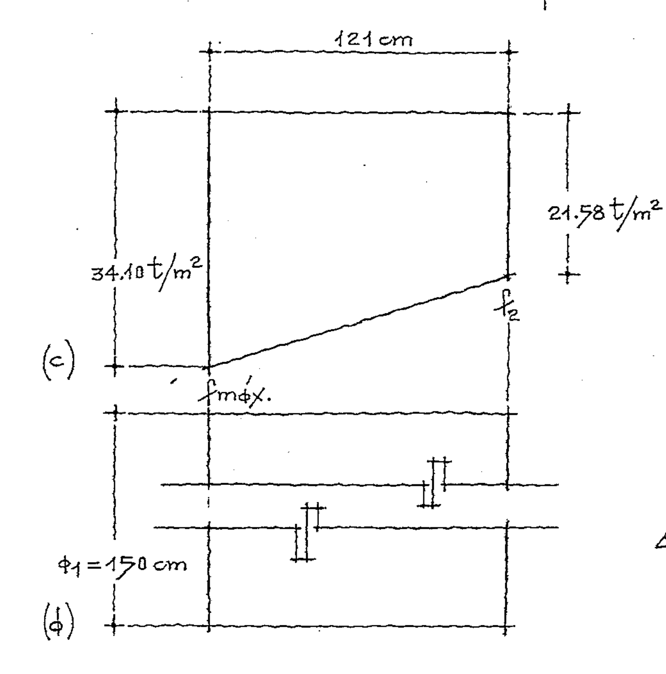
$$v_U = \frac{49730}{0.7(130)60} = \frac{49730}{5460} \simeq 9.11 \text{ Kg/cm}^2 < v_{Uadm}. \quad \textit{(No hay falla)}$$

Se deberán corregir las distancias que aparecen en las figs. 17.89 a 17.96. En el ejemplo no se hizo tal corrección.

Cortante en el plano tangente a la columna, figs. 17.97 y 98.

Fig. 17.97. Cortantes máximos, (c).

Fig. 17.98. Planta que comprende el área de $f_{máx.}$ y f_2, (d).



$$\frac{34.10 + 21.58}{2} = 27.84 \text{ t/m}^2$$

Área correspondiente:

$$1.21 \times 1.50 = 1.815 \text{ m}^2$$

$$\therefore 27.84 \times 1.815 \simeq 50.6 \text{ ton}$$

$$v_U = \frac{50600}{F_R(150)60} = \frac{50600}{6300} \simeq 8.04 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore v_U < v_{Uadm}.$$

En este plano no hay falla.

Cálculo del momento flexionante, figs. 17.99 a 102.

*Se dejó el peralte de 50 cm para facilitar la solución del problema, pero se tendrá presente la necesidad de cambiar el peralte a 60 cm.

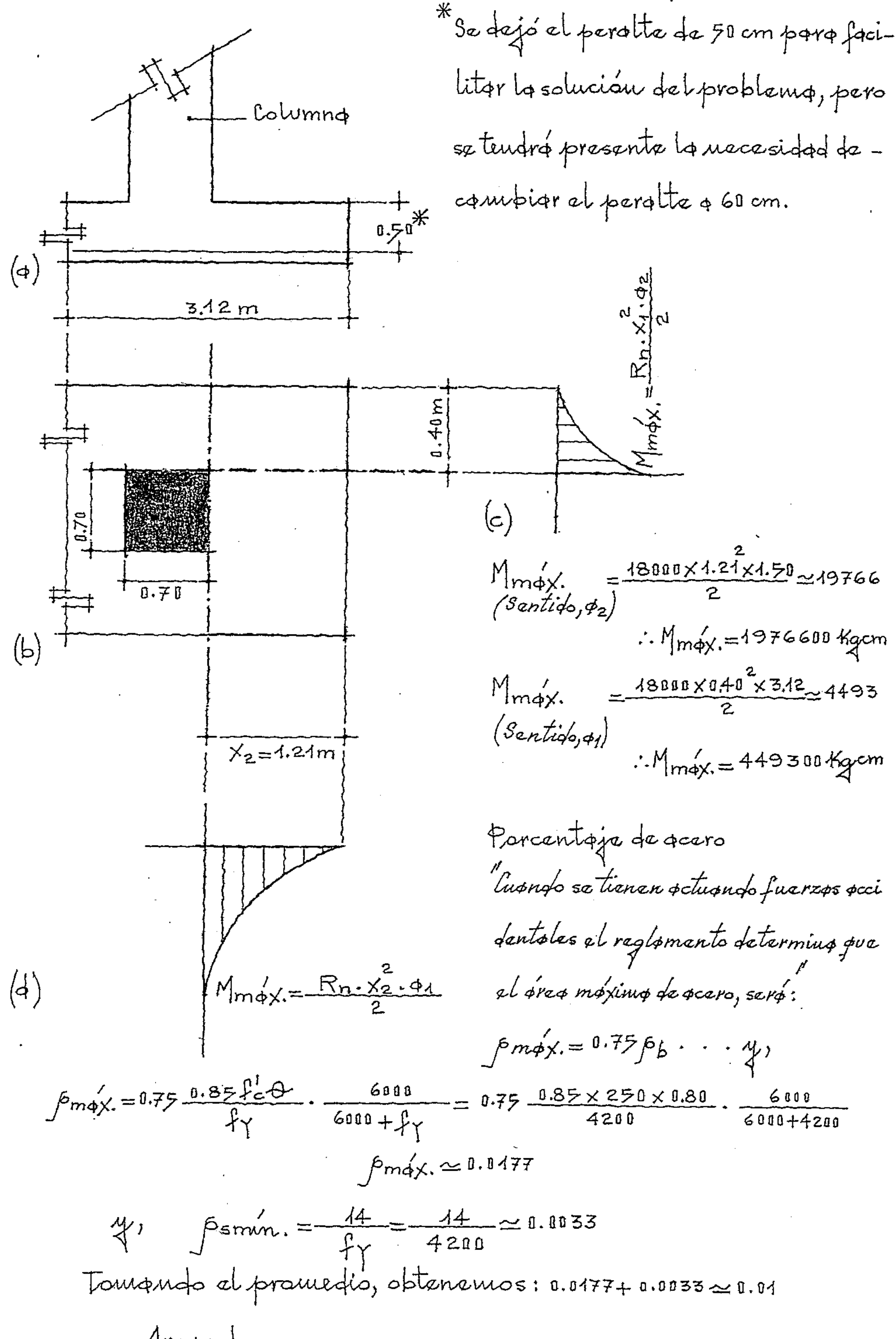


Fig. 17.99. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.100. Sección crítica para flexión, (b).

Fig. 17.101. Gráfica de momento flexionante. Sentido largo, (c).

Fig. 17.102. Gráfica de momento flexionante Sentido corto, (d).

$$M_{máx.}\ (\text{Sentido}, a_2) = \frac{18000 \times 1.21^2 \times 1.50}{2} \simeq 19766$$

$$\therefore M_{máx.} = 1976600\ \text{Kgcm}$$

$$M_{máx.}\ (\text{Sentido}, a_1) = \frac{18000 \times 0.40^2 \times 3.12}{2} \simeq 4493$$

$$\therefore M_{máx.} = 449300\ \text{Kgcm}$$

Porcentaje de acero

"Cuando se tienen actuando fuerzas accidentales el reglamento determina que el área máxima de acero, será:

$$\rho_{máx.} = 0.75\rho_b \quad \ldots \text{ y,}$$

$$\rho_{máx.} = 0.75\,\frac{0.85 f'_c \beta}{f_Y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_Y} = 0.75\,\frac{0.85 \times 250 \times 0.80}{4200} \cdot \frac{6000}{6000+4200}$$

$$\rho_{máx.} \simeq 0.0177$$

y, $\rho_{s\,mín.} = \frac{14}{f_Y} = \frac{14}{4200} \simeq 0.0033$

Tomando el promedio, obtenemos: $0.0177 + 0.0033 \simeq 0.01$

Areas de acero

Sentido largo

$A_s = \rho_s a_1 d = 0.01 \times 150 \times 60 = 90\ cm^2$; con $\phi_s\#8 = \frac{90}{5.07} \simeq 18\phi_s\#8$ @ 8 cm

Sentido corto

$$A_s = \rho_s\, a_2\, d_1 = 0.01 \times 312\,(60 - 1\phi) = 179\ cm^2$$

Con ϕ_s #8

$$N^{\circ}\phi = \frac{179}{5.07} \simeq 36\,\phi\ \#8$$

Por lo tanto

$$\frac{179 \times 150 \times 2}{150 + 312} = 116\ cm^2;\ con\ \phi\#8 = \frac{116}{5.07} \simeq 23\phi_s\ @\ 7cm$$

El resto del acero se distribuirá uniformemente en las dos franjas extremas:

$$179\ cm^2 - 116\ cm^2 = 63\ cm^2\ \therefore\ con\ \phi\#8 = \frac{63}{5.07} \simeq 12\phi_s\#8$$

$$\therefore\ \frac{12\,\phi_s}{2\ franjas} = 6\phi_s\#8;\ Separación = 312 - 150 = 81\ cm$$

$$y,\ \frac{81\ cm}{6\phi_s} \simeq 14\ cm$$

En las figs. 17.103 a 17.10

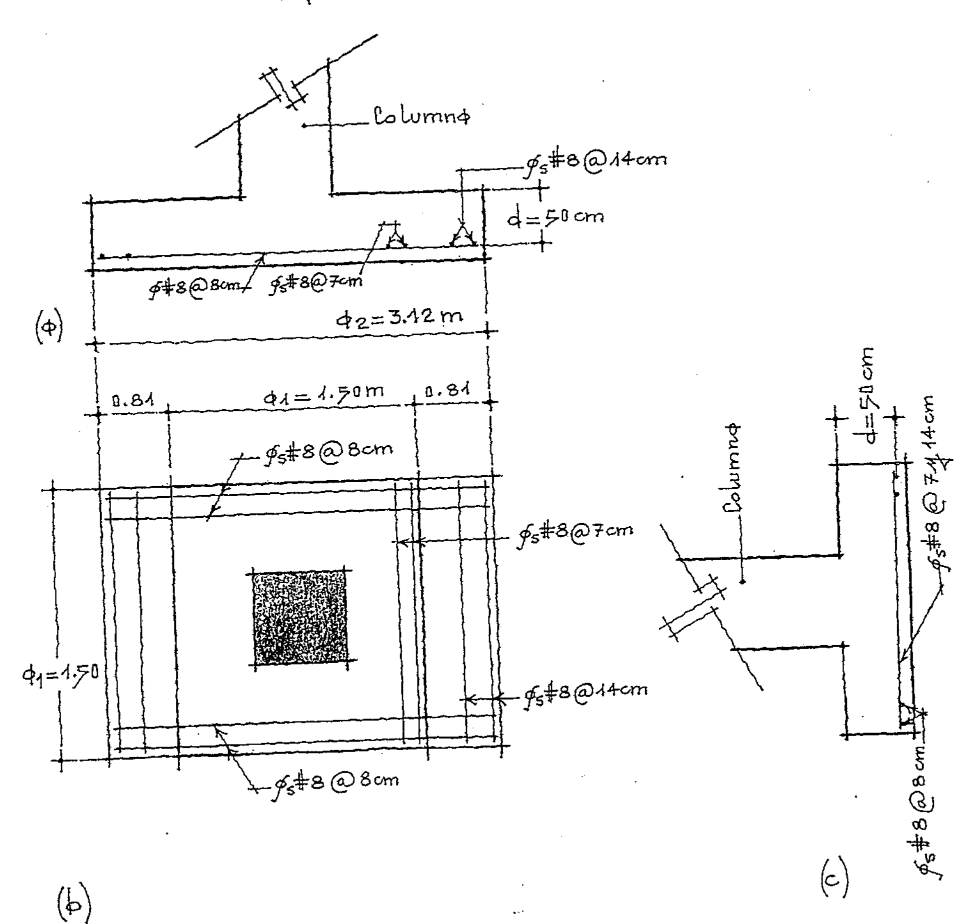


Fig. 17.103. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.104. Planta de la zapata mostrando armados, (b).

Fig. 17.105. Corte transversal de la zapata, (c).

En las figs. 17.106 y 107, se presentan los detalles de arma-

dos, veamos:

Sentido corto

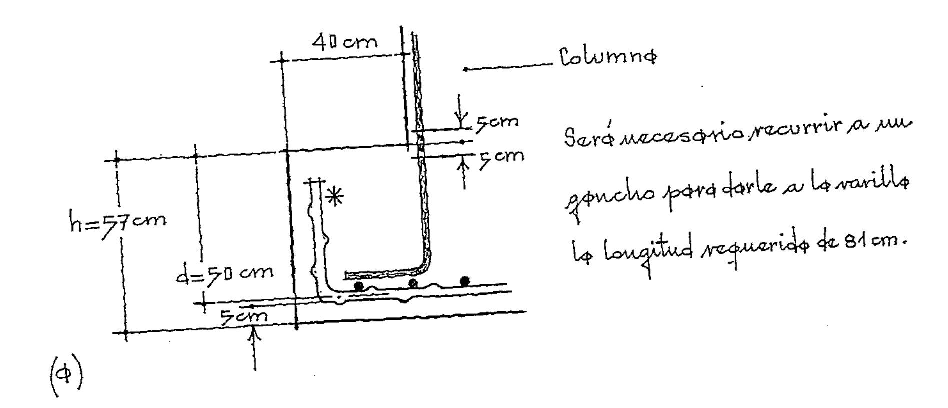


Fig. 17.106. Corte mostrando la longitud de desarrollo y anclaje de las varillas, (a).

Será necesario recurrir a un gancho para darle a la varilla la longitud requerida de 81 cm.

Cálculo del anclaje y longitud de desarrollo

$$L_d = 0.06 \frac{A_{sv} f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006\, d_b f_y \quad \therefore \quad 0.06 \frac{5.07 \times 4200}{\sqrt{250}} \simeq 81 \text{ cm}$$

y,

$$0.006 \times 2.54 \times 4200 = 64 \text{ cm} \therefore 81 \text{ cm} > 64 \text{ cm (Correcto)}$$

Sentido largo

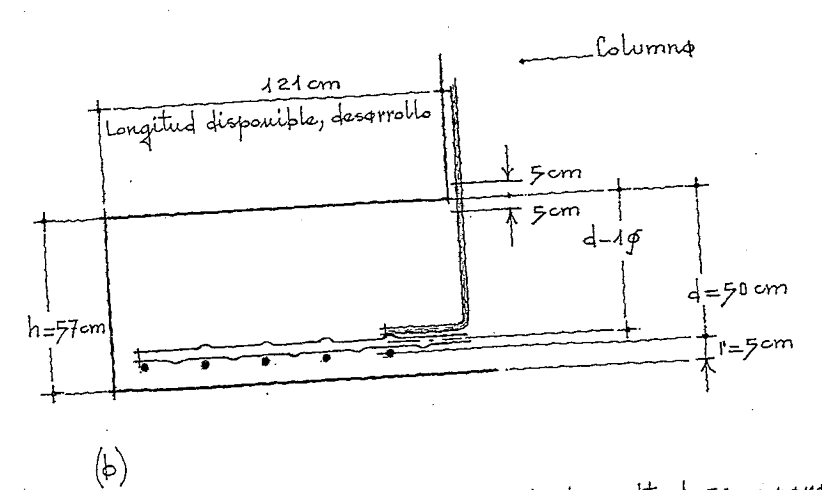


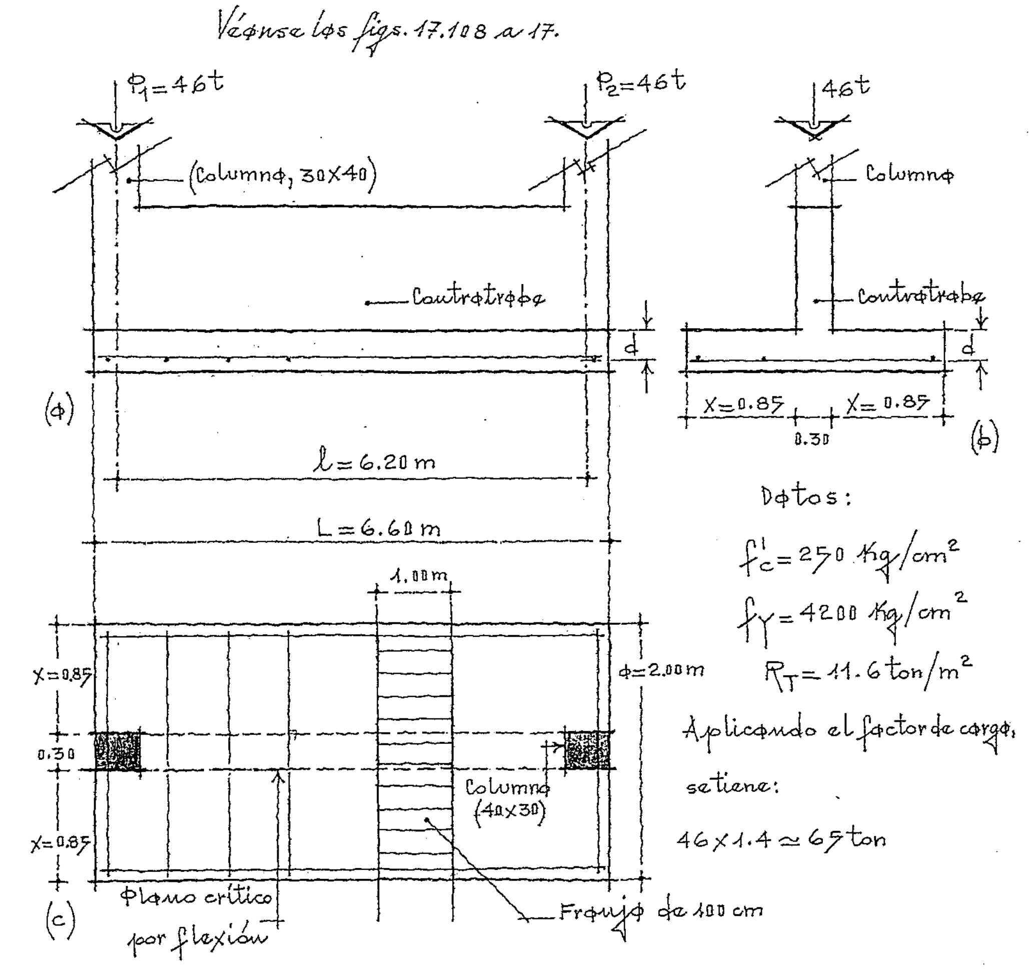
Fig. 17.107. Corte donde se muestra la longitud de desarrollo y anclaje - de las varillas, (b).

Se terminó el ejemplo respetando el peralte de 50 cm para no alargar más la solución al problema, pero no hay que olvidar que falló a cortante y deberá corregirse, (ilustraciones).

Ejemplo ilustrativo (zapata corrida con contratrabe)

El entre-eje de un edificio recibe una carga de 46 ton cada columna. Calcular la zapata corrida considerando un factor de carga igual a 1.4.

Véanse las figs. 17.108 a 17.



Figs. 17.108 y 109. Cortes longitudinal y transversal respectivamente de la zapata corrida, (a) y (b).

Fig. 17.110. Zapata corrida. Planta, (c).

Datos:

$f'_c = 250$ Kg/cm^2

$f_Y = 4200$ Kg/cm^2

$R_T = 11.6$ ton/m^2

Aplicando el factor de carga, se tiene:

$46 \times 1.4 \simeq 65$ ton

Ancho de la zapata

$$A_z = \frac{P_1 + P_2}{R_{neta}} = \frac{65 \times 2}{11.6 - 10\%} = \frac{130}{10.44} \simeq 12.45 \text{ m}^2$$

$$\text{ancho} = \frac{12.45}{6.20} \simeq 2.00 \text{ m}$$

Cálculo del momento flexionante

$$M_u = \frac{R_n^* \cdot x^2}{2} = \frac{10500 \times 0.85^2}{2} \simeq 3794 \text{ Kgm} = 379400 \text{ Kgcm}$$

---

* La nueva reacción neta, se obtiene:

$$\frac{65 \times 2}{a \cdot l} = \frac{130}{2 \times 6.2} = \frac{130 \text{ t}}{12.4 \text{ m}^2}$$

Nueva reacción neta $\simeq 10.5$ t/m^2

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{14}{f_Y} = \frac{14}{4200} \simeq 0.0033$$

Suponemos un porcentaje de

$$\rho_s \simeq 1.1\% = 0.011$$

Obtención del peralte por flexión

$$y = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c} = 0.011 \frac{4200}{250} \simeq 0.185$$

$$\therefore d^2 = \frac{M_U}{F_R\, b\, f'_c\, y(1-0.59\, y)} = \frac{379400}{0.90 \times 100 \times 250 \times 0.185(1-0.59 \times 0.185)}$$

$$y, \quad d = \sqrt{102.4} \simeq 11\ \text{cm}$$ (el peralte mínimo será de 15 cm)

Peralte efectivo por cortante, figs. 17.111 y 112.

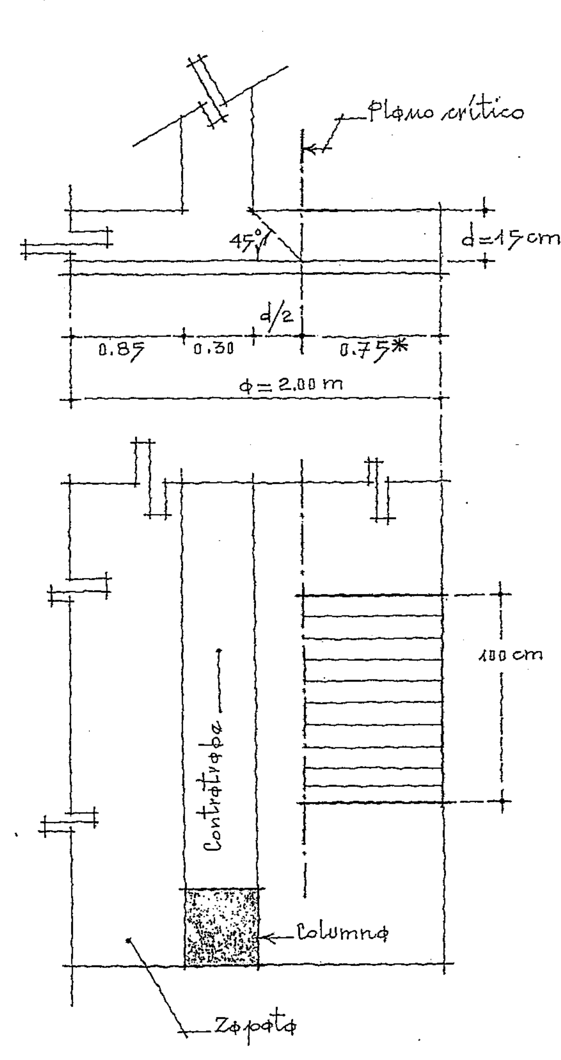


Fig. 17.111. Corte transversal mostrando el plano crítico para cortante, (a).

Fig. 17.112. Sección crítica. Planta, (b).

$$\text{Area} = 0.75 \times 1.00 = 0.75\ m^2$$

$$\therefore V_U = R_n \cdot A = 10.5 \times 0.75 = 7.875\ t$$

$$\therefore V_U = 7875\ Kg$$

$$v_{Uadm.} \leq F_R \sqrt{f_c^*} = 0.70\sqrt{0.8 \times 250}$$

$$v_{Uadm.} \simeq 9.90\ Kg/cm^2$$

$$\therefore d_v = \frac{V_U}{F_R \cdot b \cdot v_{Uadm.}}$$

$$= \frac{7875}{0.7 \times 100 \times 9.90}$$

$$\simeq 11.4\ cm < d_{mín.}$$

El peralte efectivo se aumentará al mínimo por especificación, es decir, d=15 cm.

*Para obtener la dimensión de la sección crítica para cortante, se supuso un peralte de 20 cm, por lo tanto:

$$X = \frac{20}{2} = 10\ cm\ ;\ 85\ cm - 10 = 75\ cm$$

Cálculo del área de acero, figs. 17.113 a 17.115.

$$A_s = \rho_s bd = 0.011 \times 100 \times 15 = 16.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Con } \phi_s\#5 = \frac{16.5}{1.99} \simeq 9\ \phi_s\#5$$

$$\text{Separación} = \frac{100}{9} \simeq 11 \text{ cm}$$

Longitud de desarrollo

$$L_d = 0.06 \frac{A_{sv} f_Y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006\, d_b f_Y$$

$$\therefore 0.06 \frac{1.99 \times 4200}{\sqrt{250}} \simeq 32 \text{ cm} \quad . \quad . \quad . \quad y,$$

$$0.006 \times 1.59 \times 4200 = 40 \text{ cm}$$

(Se tomará la longitud de 40 cm)

Fig. 17.113. Corte transversal de la zapata mostrando armados, (a).

Fig. 17.114. Zapata corrida. Planta y armados, (b).

Fig. 17.115. Detalle de la longitud de desarrollo y anclaje, (c).

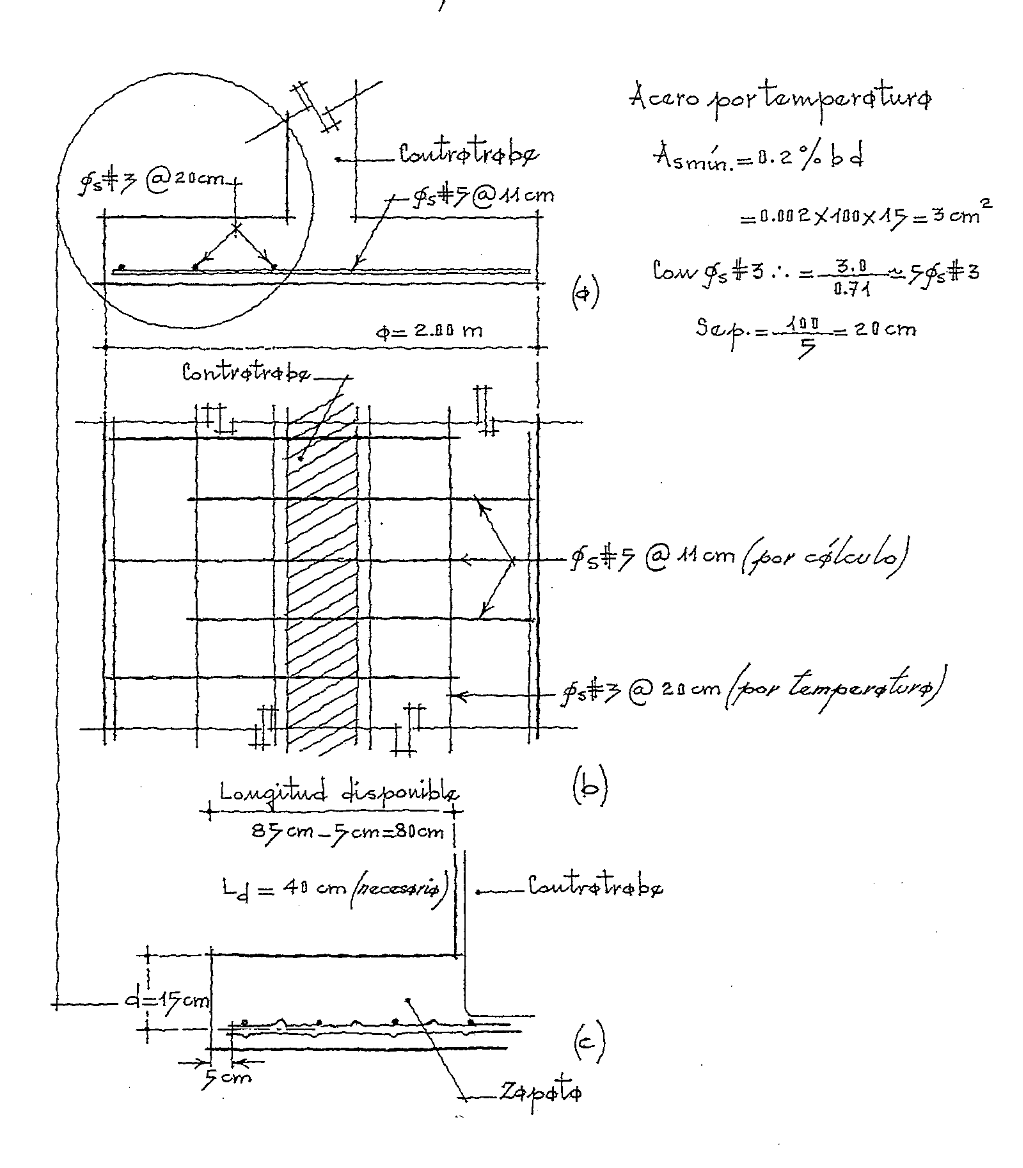
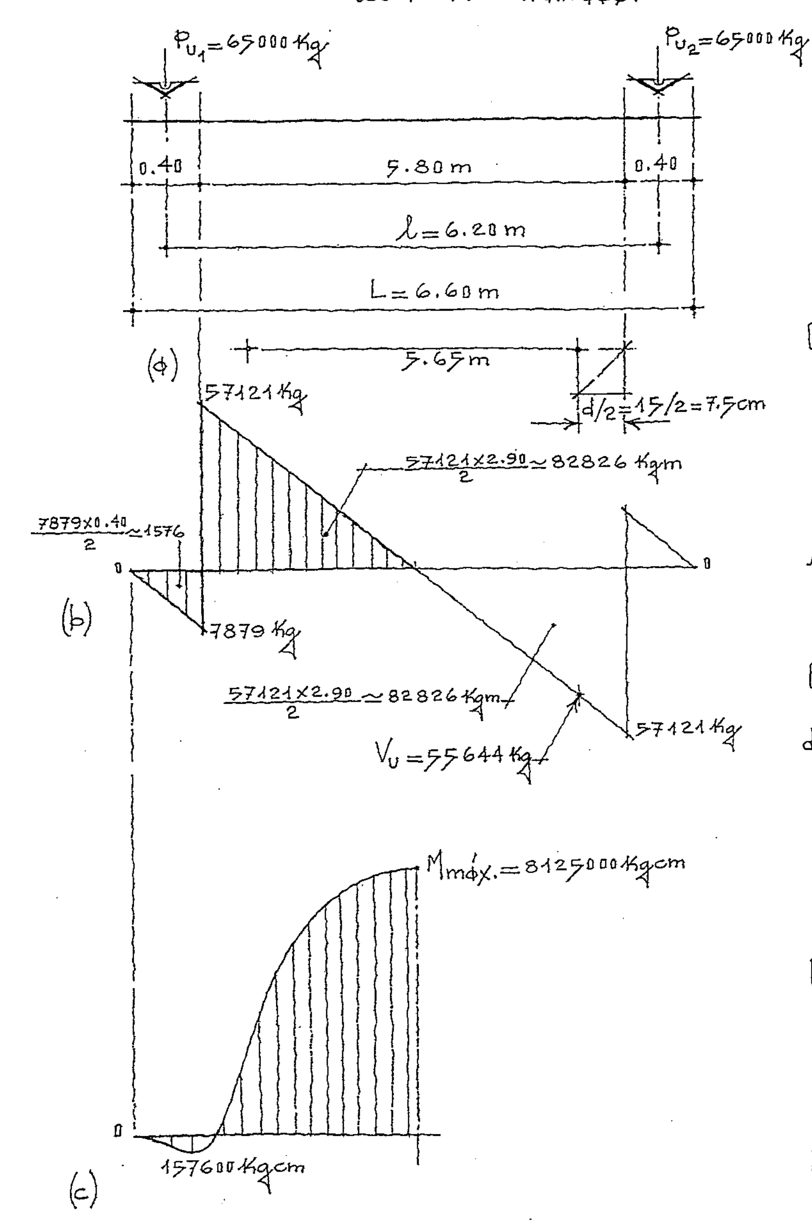


Fig. 17.116. Cargas sobre la zapata, (a).

En las figs. 17.116 a 17.118, se presentan los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flexionantes en los principales puntos de la contratrabe.



Figs. 17.117 y 118. Gráficas de cortantes y momento flexionante respectivamente, (b) y (c).

Carga por metro lineal

$$\frac{65000\times 2}{6.60}=\frac{130000}{6.60}\simeq 19697\ Kg/ml$$

$$19697\times 0.40\simeq 7879\ Kg$$

$$19697\times 2.90\simeq 57121\ Kg$$

Cálculo del porcentaje de acero

$$\rho_{s\,mín.}=\frac{14}{f_Y}=\frac{14}{4200}=0.0033$$

y

$$\rho_b=\frac{0.85\times 250\times 0.8}{4200}\cdot\frac{6000}{6000+4200}\simeq 0.0235$$

Tomamos, $\rho_s\simeq 0.02$

Cálculo del peralte efectivo

$$d^2=\frac{8125000}{0.9\times 30\times 250\times 0.336\,(1-0.59\times 0.336)}$$

$$y=\frac{f_Y}{f'_c}\rho_s=\frac{4200}{250}0.02=0.336$$

$$\therefore\ d=\sqrt{4478}\simeq 67\ cm$$

Cálculo del peralte por cortante

$$v_{u\,adm.}\leq 9.90\ Kg/cm^2$$

$$v_U=\frac{55644}{0.7\times 30\times 67}\simeq 39\ Kg/cm^2\ (Falla)$$

El Reglamento especifica:

En ningún caso se aceptará que v_U sea mayor que $1.3\,F_R\sqrt{f_c^*}$. por lo tanto

$$1.3\times 0.7\sqrt{0.8\times 250}=12.87\ Kg/cm^2<39\ Kg/cm^2$$

La sección de la contratrabe debe ser modificada, (*Espesor, b=50 cm*)

$$v_U=\frac{55644}{0.7\times 50\times 12.87}\simeq 124\,cm$$ (*La sección queda de 50 x 124 cm*)

La diferencia entre el esfuerzo cortante que toma el concreto y el máximo permitido, se absorberá con estribos de 3/8" a 90°.

$$0.7\times 2.97\times 50\times 124 \simeq 12890 \text{ Kg}$$

Separación de estribos:

$$s_{\pi} = \frac{F_R A_v f_y d(\text{sen }90^\circ + \cos 90^\circ)}{V_U - (\text{Diferencia})} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} \quad \text{. . por tanto}$$

$$s_{\pi} = \frac{0.7\times 2\times 0.71\times 4200\times 124}{55644 - 12890} = \frac{517675}{42754} \simeq 12 \text{ cm} \quad . . . . \text{ y,}$$

$$\frac{0.7\times 2\times 0.71\times 4200}{3.5\times 50} = \frac{4175}{175} \simeq 24 \text{ cm}$$

$$\therefore 12 \text{ cm} < 24 \text{ cm}$$

Los estribos del #3 se colocarán a cada 12cm

Área de acero en la contratrabe

$$A_s = \rho_s bd = 0.02\times 50\times 124 = 124 \text{ cm}^2$$

Con varillas #12, se tiene: $\frac{124}{11.40} \simeq 11 \phi_s \#12$

En las figs. 17.119 a 17.122, se muestran los armados

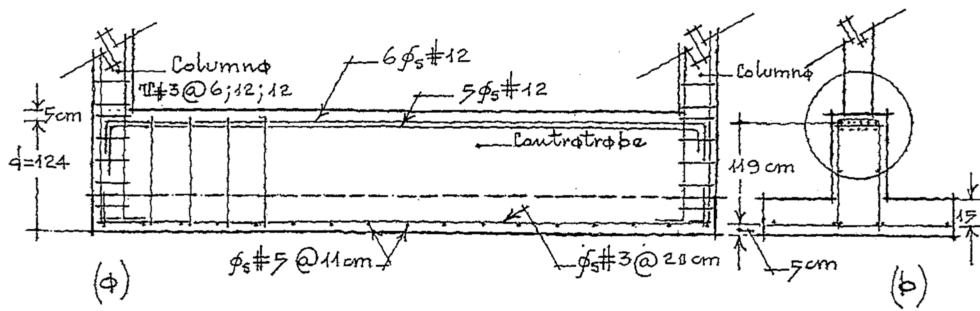


Fig. 17.119. Corte longitudinal y armados en la contratrabe, (a).

Figs. 17.120 y 121. Corte transversal de la contratrabe y armados. Detalle, (b) y (c).

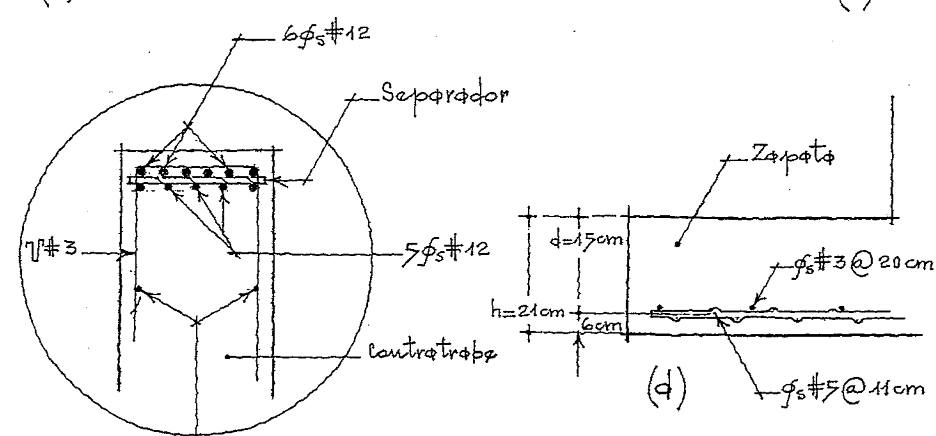


Fig. 17.122. Detalle de la zapata, (d).

Cuando el peralte de la contratrabe es de 1.00m o más, es aconsejable colocar a la mitad 2φs#4.

Ejemplo ilustrativo (Zapata combinada en colindancia)

Se tiene una zapata en colindancia sometida a dos cargas desiguales unidas por una contratrabe.

Diseñar la zapata, figs. 17.123 a 17.125

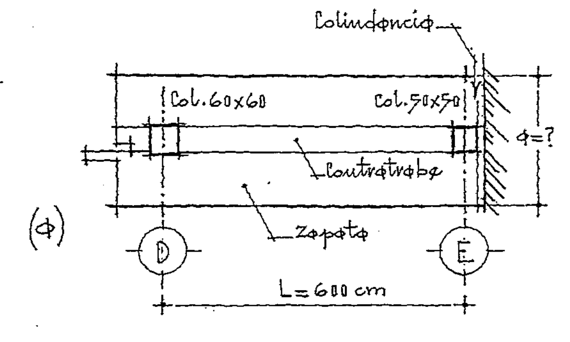


Fig. 17.123. Zapata combinada. Planta, (a).

Datos:

$f'_c = 200\ kg/cm^2$; $f_s = 4200\ kg/cm^2$

$F_c = 1.5$

Fig. 17.124. Ubicación de las resultantes, (b).

$P_1 = 56t$ R cargas $P_2 = 40t$

6.00 m.   0.25 m   R terreno   3.75 m   (b)

Fig. 17.125. Localización del centroide de ambas resultantes, (c).

zapata   ℄   Contratrabe   a=0.97m   L=7.50m   (c)

Aplicando el factor de carga

$P_1 = 56 \times 1.5 = 84$ ton

$P_2 = 40 \times 1.5 = 60$ ton

Area de la zapata:

$$A_z = \frac{P_1 + P_2}{R_n} = \frac{84+60}{22-10\%} \simeq 7.28\ m^2$$

Haciendo momentos en el eje centroidal del punto E, obtenemos:

$$144x = 84 \times 6.00$$

$$x = \frac{84 \times 6.00}{144} = 3.50\ m$$

Por lo tanto

$$7.28\ m^2 = (2 \times 3.75)\, a$$

$$\therefore\ a = \frac{7.28}{2 \times 3.75} = 0.97\ m$$

Longitud de la zapata

$$2 \times 3.75 = 7.50\ m$$

La continuación del problema es una repetición del anterior, por lo tanto, se le deja al lector para que ejercite y lo resuelva siguiendo los mismos pasos que se aplicaron en el ejemplo anterior.

La solución es simple e interesante.

Ejemplo ilustrativo *(Edificio: Losa o placa de cimentación)*

Se tiene un edificio formado por Planta baja más siete niveles. Se considera que cada nivel tiene un peso de 320 ton incluido el factor de carga, figs. 17.126 y 17.127.

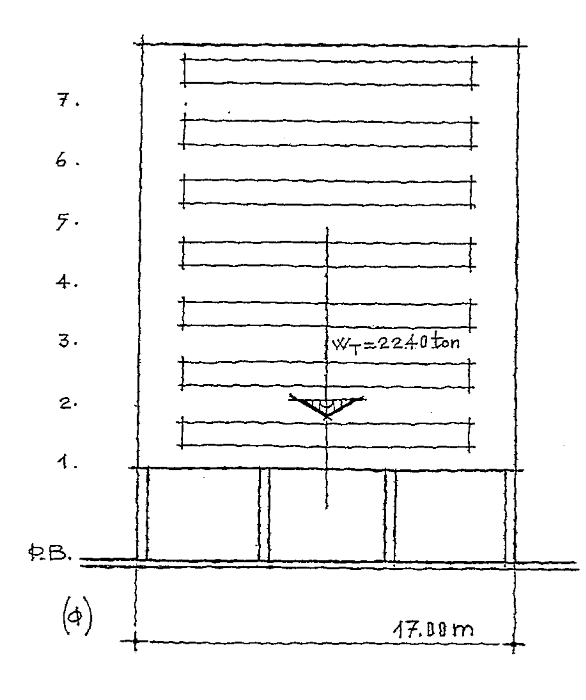


Fig. 17.126. Edificio, vista frontal, (a).

Datos:

$f'_c = 250$ Kg/cm^2; $f_y = 4200$ Kg/cm^2

$R_T = 14$ ton/m^2

Peso total del edificio

$W_T = 320 \times 7 = 2240$ ton

Peso por metro cuadrado

$$\frac{W_T}{A} = \frac{2240}{17 \times 17} = \frac{2240}{289} \simeq 7.75 \text{ t/m}^2$$

$R_n = R_T - 10\% = 12.60$ t/m^2

El peso unitario de la estructura se encuentra entre el 50 y 75% (61.5%), de la resistencia del terreno indicando la conveniencia de emplear la losa o placa de cimentación

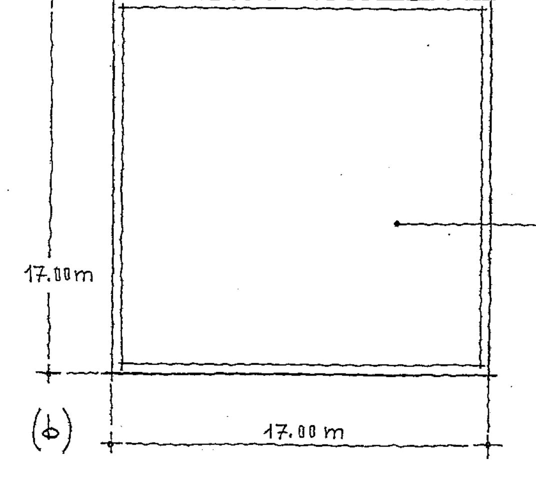


Fig. 17.127. Superficie ocupada por el edificio, (b).

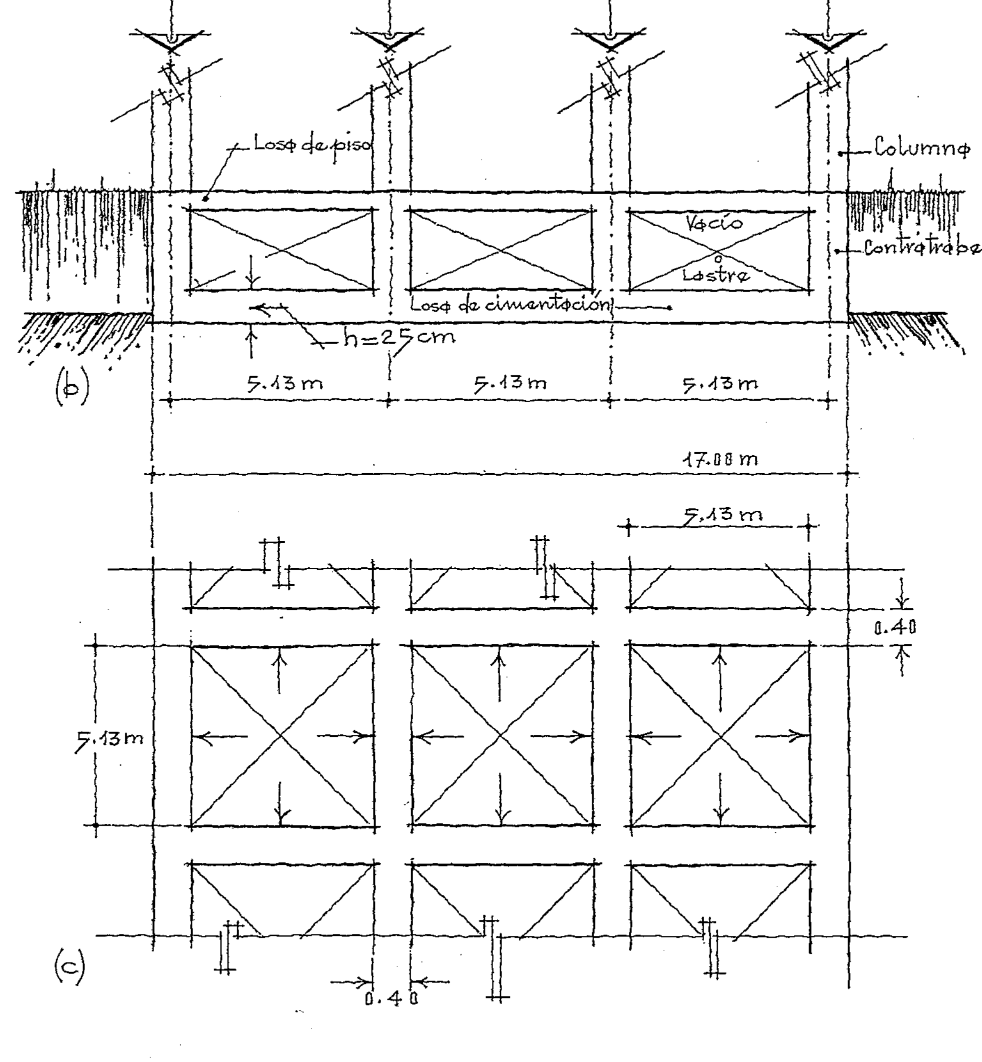
La losa o placa de cimentación es ideal para edificios de 8 a 12 niveles y, se aconseja dividir la losa en nervaduras *(contra-trabes)* para evitar fuertes espesores.

En la figs. 17.128 a 17.130, se muestra la distribución de las contratrabes.

Fig. 17.128. Planta del edificio y repartición de cargas en las contratrabes, (a).

Fig. 17.129. Corte longitudinal de la losa de cimentación, (b).

Fig. 17.130. Detalle de las losas perimetrales, (c).



A continuación se calculará la presión útil sobre la cimentación suponiendo que ésta se encuentra a diferentes profundidades:

A) Losa de cimentación a profundidad superficial del terreno.

Al restarle a la reacción del terreno el 10% se considera que en ese peso se encuentra incluido el peso de las contratrabes, la placa de cimentación y la losa de piso, veamos:

Placa de cimentación = 0.25 × 17.00 × 17.00 × 2400 = 173400 Kg

Contratrabes = 5.53 × 1.20* × 0.40 × 2400 (24 pzs.) = 152893 Kg

Losa de piso = 0.10 × 17.00 × 17.00 × 2400 . . . = 69360 Kg

395653 Kg

El peso correspondiente al 10%, vale:

14000 − 10% = 1400 Kg/m² ∴ 1400 × 17 × 17 . . . . = 404600 Kg

∴ 404600 > 395653 (El 10% resultó correcto)

Repartición de cargas en la losa de cimentación, fig. 17.131.

Carga sobre cada tablero

$$5.13 \times 5.13 \simeq 26.32 \quad \therefore \quad 26.32 \times 7.75 \simeq 204 \text{ ton}$$

$$\frac{204}{4} = 51 \text{ t por c/triángulo}$$

$$\frac{204}{(5.13 \times 4)} = \frac{204}{20.52} \simeq 9.94 \text{ ton/ml, en contratrabe}$$

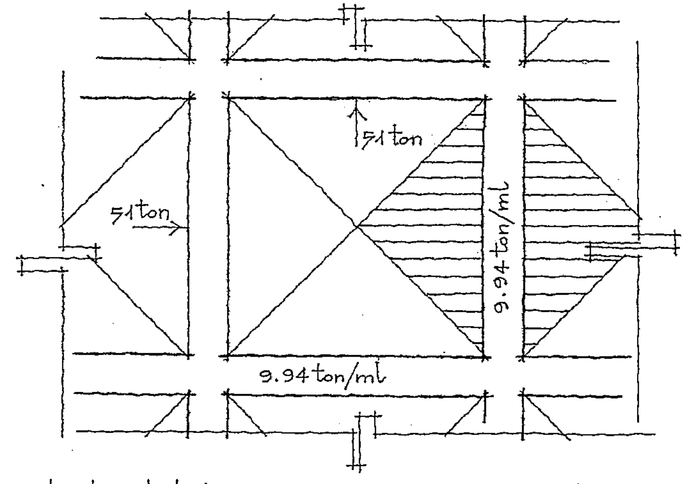


Fig. 17.131. Cargas sobre tablero y contratrabes.

* Altura supuesta a la contratrabe.

Fig. 17.132. Corte longitudinal, (a).

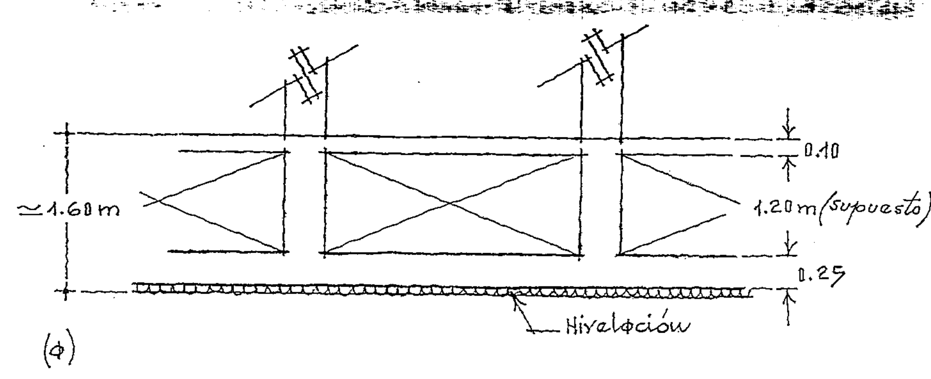
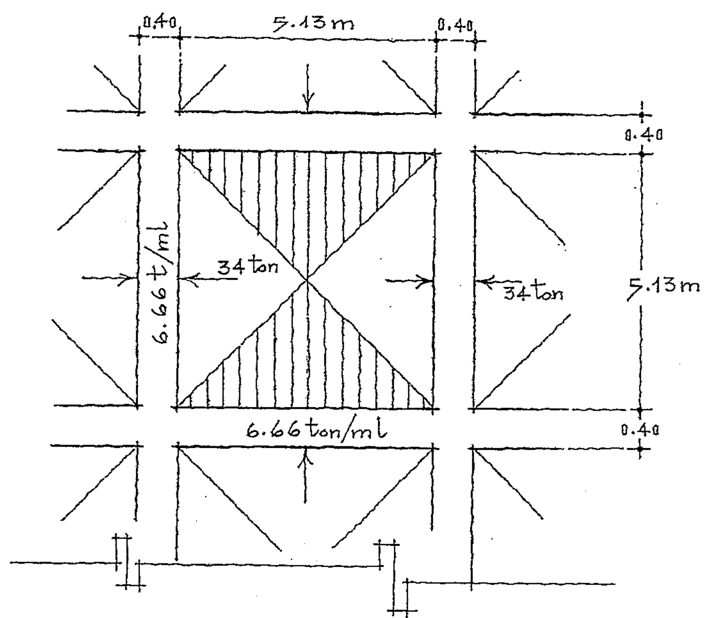


Fig. 17.133. Cargas sobre tablero y contratrabes, (b).



Peso del edificio = 2240 ton

Peso de la tierra $= 1.60 \times 17.00 \times 17.00 = 462.4\ m^3$

$\therefore 462.4\ m^3 \times 1.6\ ton/m^3 \simeq 740\ ton$

y, $2240 - 740 = 1500\ ton$

Presión útil $= \frac{1500}{17 \times 17} = \frac{1500}{289} = 5.19\ ton/m^2$

Carga en cada tablero

$5.13 \times 5.13 \simeq 26.32\ m^2 \therefore 26.32 \times 5.19 = 136.6\ t$

En cada triángulo $= \frac{136.6}{4} \simeq 34\ ton$

En contratrabe $= \frac{136.6}{5.13 \times 4} = \frac{136.6}{20.52} \simeq 6.66\ t/ml$

C) Diga que profundidad de desplante tendrá la cimentación para la compensación total, fig 17.134.

$$\text{Presión útil} = \frac{2240}{289} = 7.75\ \text{ton/m}^2$$

Profundidad de desplante:

$$R_T = 14\ \text{ton/m}^2$$

$$\therefore\ 10\%\ \text{de}\ R_T = 1.4\ \text{ton/m}^2$$

Por tanto

$$7.75 - 1.4 = 6.35\ \therefore\ \frac{6.35}{1.60} \simeq 3.97\ \text{m (Compensación total)}$$

Una compensación total requiere de excavaciones profundas y la necesidad, en muchas ocasiones, de emplear ataguías, ademes y atroquelamientos, dando como resultado, cimentaciones muy costosas. Cuando ésto ocurra, será mejor cimentar empleando pilotes o cajones.

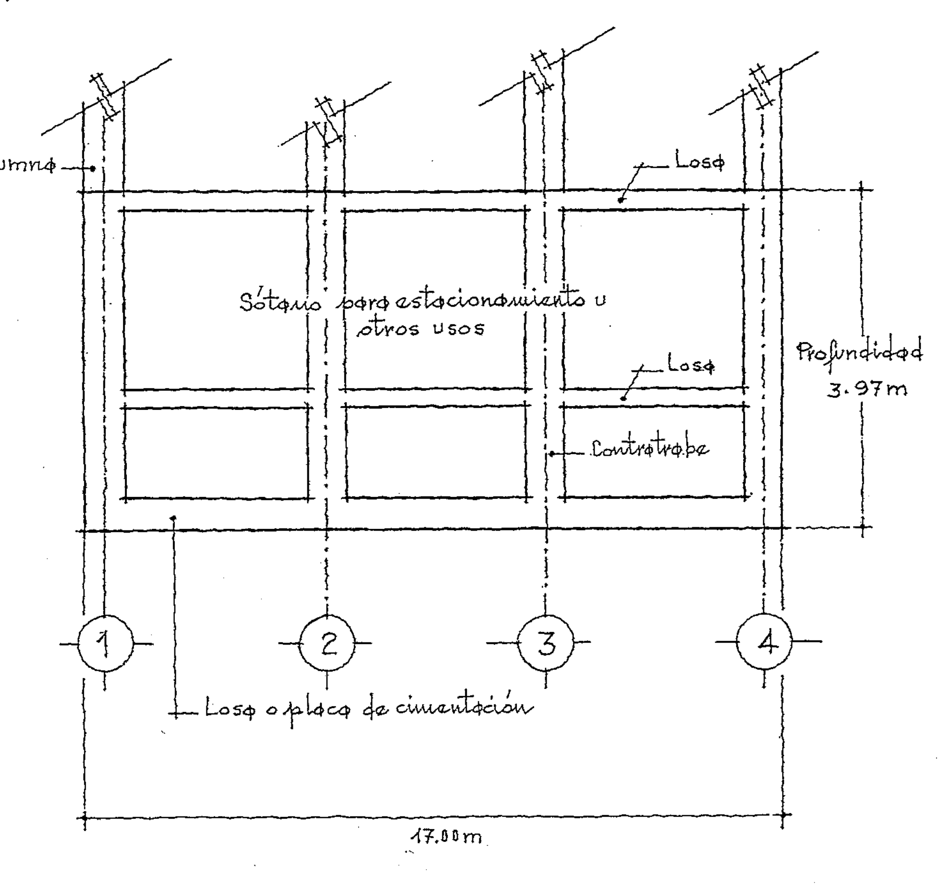


Fig. 17.134. Corte longitudinal de la cimentación por compensación total. Cimentación profunda.

Pilotes

Cuando el terreno o suelo superficial no tiene capacidad para resistir el peso del edificio o, cuando la capa resistente se encuentra a gran profundidad o, también cuando el suelo está saturado de agua y dificulta los trabajos de excavación, el empleo de pilotes resulta necesario y adecuado. Sin duda, los pilotes evitan excavaciones costosas y grandes volúmenes de tierra.

Los pilotes se consideran columnas esbeltas con capacidad para recibir y transmitir cargas a estratos más profundos y resistentes.

Cuando los pilotes reciben fuerzas longitudinales de compresión trabajan óptimamente, sin embargo, cuando se someten a cargas horizontales de viento y sismo se producen deformaciones con alto grado de peligrosidad. Por tanto, la capacidad portante de cada pilote dependerá de la resistencia desarrollada entre ellos y el subsuelo.

De acuerdo con su función de trabajo se clasifican:

a) Pilotes de punta apoyados en manto resistente.

b) Pilotes trabajando por fricción del fuste con el subsuelo.

c) Una combinación de ambos, es decir, apoyados en manto resistente y rozamiento de su longitud empotrada en el subsuelo.

No es recomendable apoyar el elemento de carga sobre un solo pilote, ya que durante su hincado se puede desplazar de su posición original y producir flexiones por excentricidad de la carga. Asimismo, se aconseja que la resultante de cargas coincida con la resultante de los pilotes, procurando siempre que entre ellos se tenga una separación no menor de 1.25 m o tres diámetros entre sus centros para que trabajen adecuadamente.

La capacidad de carga de un pilote depende de muchos factores tales como propiedades del subsuelo, peso del martillo de hincado, frecuencia en los golpes, niveles freáticos, etc.., dando como resultado la dificultad de determinar su capacidad portante si previamente no se hace una prueba de carga. Dicha prueba consiste en cargarle al pilote un peso conocido que determine su capacidad y su asentamiento en el suelo.

Para calcular la carga segura de un pilote, se recomienda aplicar la fórmula que dice:

$$R_a = \frac{2wH}{S+1}, \text{ donde}$$

R_a, carga admisible en el pilote.

W, peso del martillo en libras (la libra se tomará igual a 460g)

H, altura de caída del martillo en pies (el pie será igual a 30cm)

S, penetración por golpe medida en pulgadas, considerando los últimos 5 a 10 golpes (el valor de la pulgada se tomará igual a 2.5 cm).

En esta fórmula se trabaja con un factor de seguridad de 2.

Ejemplo ilustrativo

La columna en una zapata aislada cuadrada recibe una carga de 90ton (incluido el factor de carga).

Calcular la capacidad de carga de cada pilote, fig. 17.135.

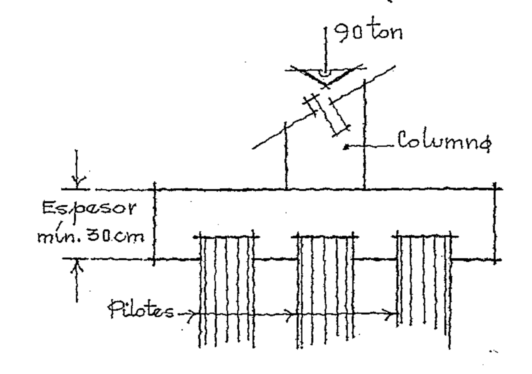


Fig. 17.135. Corte de la zapata y pilotes.

Datos:

Martillo = 6800 libras

Altura de caída = 8.10 pies

Entre los 5 y 10 últimos golpes el pilote penetra 1.2"

$$R_a = \frac{2 \times 6800 \times 8.10}{1.2 + 1} = \frac{110160}{2.2} \simeq 50073 \text{ libras}$$

$$\therefore \; 50073 \times 0.460 \simeq 23033 \text{ Kg}$$

$$\text{N° de pilotes} = \frac{90000}{23033} = 3.90 \simeq 4 \text{ pilotes}$$

En la fig. 17.136 se muestra la zapata aislada vista en planta y la colocación de los pilotes.

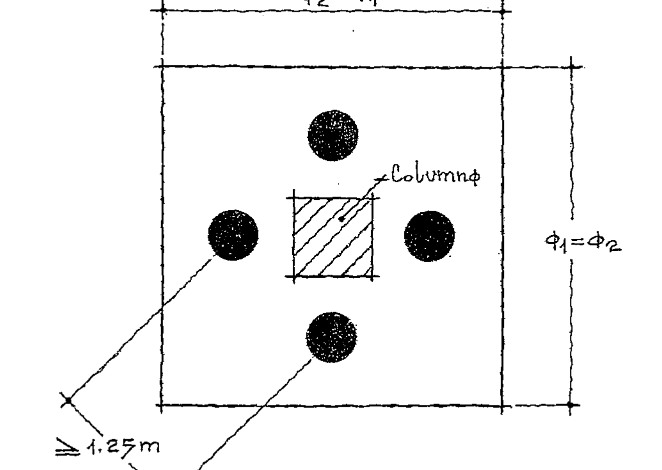


Fig. 17.136. Zapata aislada cuadrada y ubicación de pilotes.

Ejemplo ilustrativo

Una zapata cuadrada recibe una columna con una carga de 160 ton.

Para el ejemplo se utilizarán pilotes de 9.20 m de longitud y 0.40 m de diámetro. Calcular el número de pilotes para soportar la carga dada.

Datos:

$R_T = 4.6 \text{ ton/m}^2$

$f_{*s} = 2$

Obtención del perímetro del fuste

$\pi d = 3.1415 \times 0.40 \simeq 1.26 \text{ m}$

---

f_{*s}, factor de seguridad.

$$R_a = 9.20 \times 4.6 \times 1.26 \simeq 53.40 \text{ ton}$$

Aplicando el factor de seguridad, se tiene:

$$\frac{53.40}{2} = 26.70 \text{ ton}$$

y,

$$N^{\circ} \text{ de pilotes} = \frac{160 \text{ ton}}{26.70 \text{ ton}} = 5.99 \simeq 6 \text{ pilotes}$$

En las figs. 17.137 a 139 se muestra la colocación vista en planta y en corte.

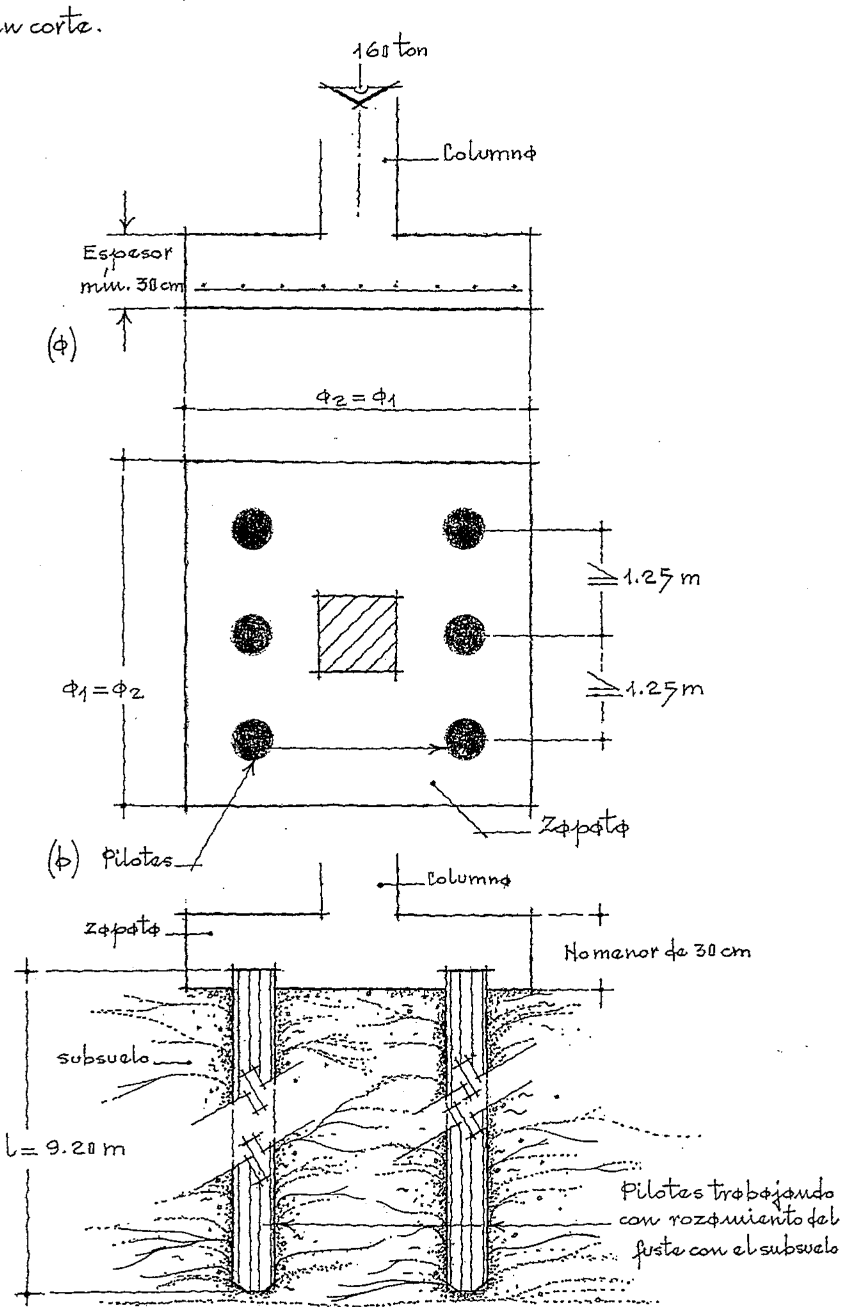


Fig. 17.137. Corte transversal de la zapata, (a).

Fig. 17.138. Planta de la zapata y colocación de los pilotes, (b).

Fig. 17.139. Pilotes atravesando los diferentes mantos del subsuelo, (c).

Ejemplo ilustrativo

Un edificio de 12 niveles tiene una carga aproximada de 950 ton y se encuentra cimentado sobre una losa de cimentación de 121 m².

Los pilotes trabajarán con fricción con el suelo, pero se tendrá en cuenta, que atraviesan por dos tramos de subsuelo de adherencia diferente.

Calcular:

1. Capacidad de carga de cada pilote.
2. Número de pilotes.

Véanse las figs. 17.140 y 17.141

Fig. 17.140. Corte transversal del edificio y la cimentación, (a).

Fig. 17.141. Pilotes trabajando con el fuste, (b).

Datos:

Diámetro del pilote = 40 cm

$f_{*s} = 1.8$

Tramo de subsuelo A (Long. 14.00 m)

Adherencia = 2.10 ton/m²

Tramo de subsuelo B (Long. 10.00 m)

Adherencia = 3.70 ton/m²

Area de contacto (tramo A)

$A = \pi d\, l_A = 3.1415 \times 0.40 \times 14 \simeq 17.60$

$\therefore 17.60\, m^2 \times 2.10\, t/m^2 \simeq 36.95\, ton$

Area de contacto (tramo B)

$A = \pi d\, l_B = 3.1415 \times 0.40 \times 10 \simeq 12.57$

$\therefore 12.57\, m^2 \times 3.70 \simeq 46.50\, ton$

Capacidad portante de cada pilote:

$A + B = 36.95 + 46.50 = 83.45\, ton$

Aplicando el coeficiente, f_{*s}

$\frac{83.45}{1.8} \simeq 46\, ton/cada\ pilote$

Por tanto

$N^\circ\ de\ pilotes = \frac{950}{46} \simeq 20\ pilotes$

Referencias bibliográficas

Capítulo 17

Dunham W., Clarence, "*Cimentaciones de estructuras*," McGraw-Hill, México, 1979.

Fletcher, A., P. E. Gordon, A. Smoots y P. E. Vernon, "*Estudio de suelos y cimentaciones en la industria de la construcción*," Limusa, México, 1982.

Coates, F. D., "*Fundamentos de mecánica de rocas*," Litoprint, Madrid, 1973.

Hidalgo Bahamontes, A., "*Construcción de cimientos*," Ediciones CEAC, Barcelona, 1963.

Legget, F., Robert y Paul Farrow F., "*Geología aplicada a la ingeniería civil*," McGraw-Hill, México, 1986.

Lin, Y. T. y Sidney Stotesbury D., "*Conceptos y sistemas estructurales para arquitectos e ingenieros*," Limusa, México, 1991.

Sowes B., George y George Sowers F., "*Introdución a la mecánica de suelos y cimentaciones*," Limusa, México, 1983.

Terzaghi, Karl y Ralph Peck B., "*Mecánica de suelos en la ingeniería práctica*," El Ateneo, Barcelona, 1980.

Pérez A., Vicente, "*Cimentaciones superficiales y profundas*," apuntes del autor, México, 1993.

———, "*Diseño y cálculo de estructuras de concreto reforzado*," trillas, México, 1993.

———, "*Materiales y procedimientos de construcción*" *Mecánica de suelos y cimentaciones*, trillas, México, 1998.

18

ESTUDIO Y CÁLCULO DE UN EDIFICIO PARA OFICINAS

18.1. Generalidades

He querido incluir este último capítulo con el único afán de proporcionar al lector, quizá, un camino más para calcular una estructura completa. En la mayoría de los casos, se calcula una losa, una trabe o, una columna, pero no siempre se está acostumbrado al análisis y cálculo de un conjunto estructural.

Con el fin de evitar la simetría, el edificio se propone con todos los claros diferentes (ésta no es la manera más lógica de estructurarlo), pero tal vez, resulte más interesante, pues está claro que comprendiendo el cálculo de este ejemplo, será fácil resolver otra estructura que tenga igualdad en sus claros.

El edificio consta de:

a) Planta baja (Estacionamiento)

b) Planta tipo (3 niveles para oficinas), y

c) Azotea

El edificio se desplanta sobre una superficie de 171 m^2; fig. 18.1.

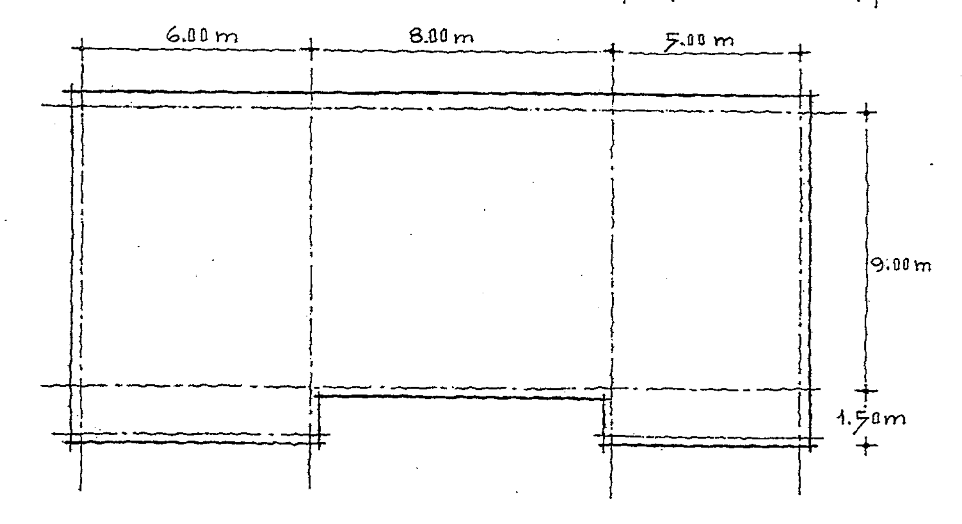


Fig. 18.1. Superficie ocupada por el edificio. Planta.

Datos:

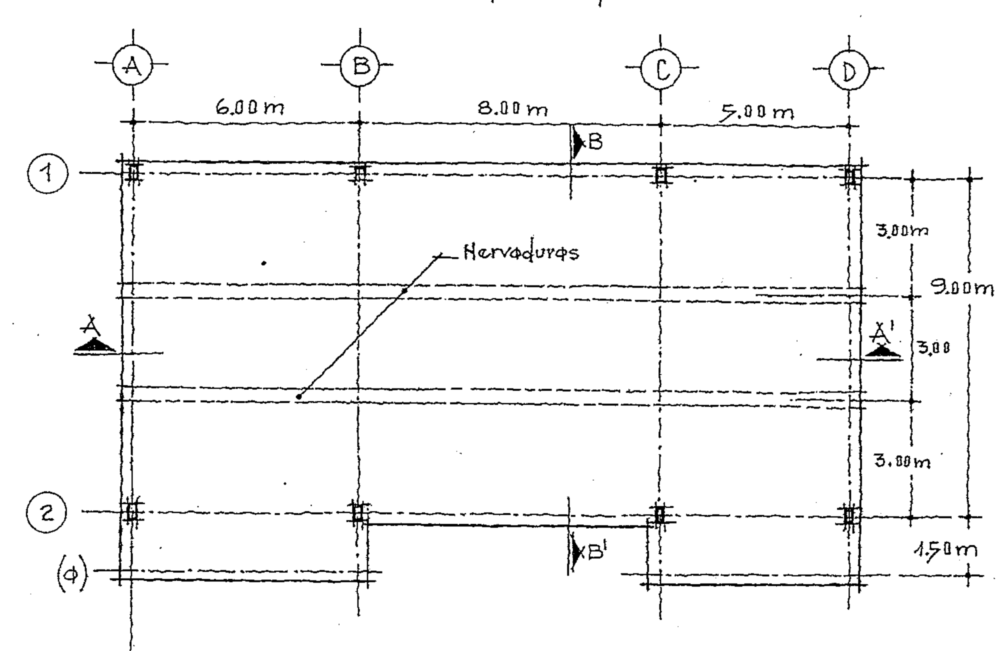
$f'_c = 250\ Kg/cm^2$; $f_Y = 4200\ Kg/cm^2$

Estructuración del edificio, figs. 18.2 a 18.4.

Fig. 18.2. Planta del edificio, (a).

Fig. 18.3. Corte longitudinal, (b).

Fig. 18.4. Corte transversal, (c).



Corte A A'

Azotea

1.00 m

4.00 m

(40x40) (50x50) (50x50) (40x40)

4.00 m

(40x50) (50x60) (50x60) (40x50)

4.00 m

(40x60) (50x70) (50x70) (40x60)

6.00 m

(40x70) (50x80) (50x80) (40x70)

(b)

6.00 m 8.00 m 5.00 m

A B C D

Corte B B'

Azotea

(c)

9.00 m 1.50 m

1 2

Se proponen losas de concreto armado trabajando en un sentido, con nervaduras en el sentido corto para reducir los claros que son considerables, fig. 18.5.

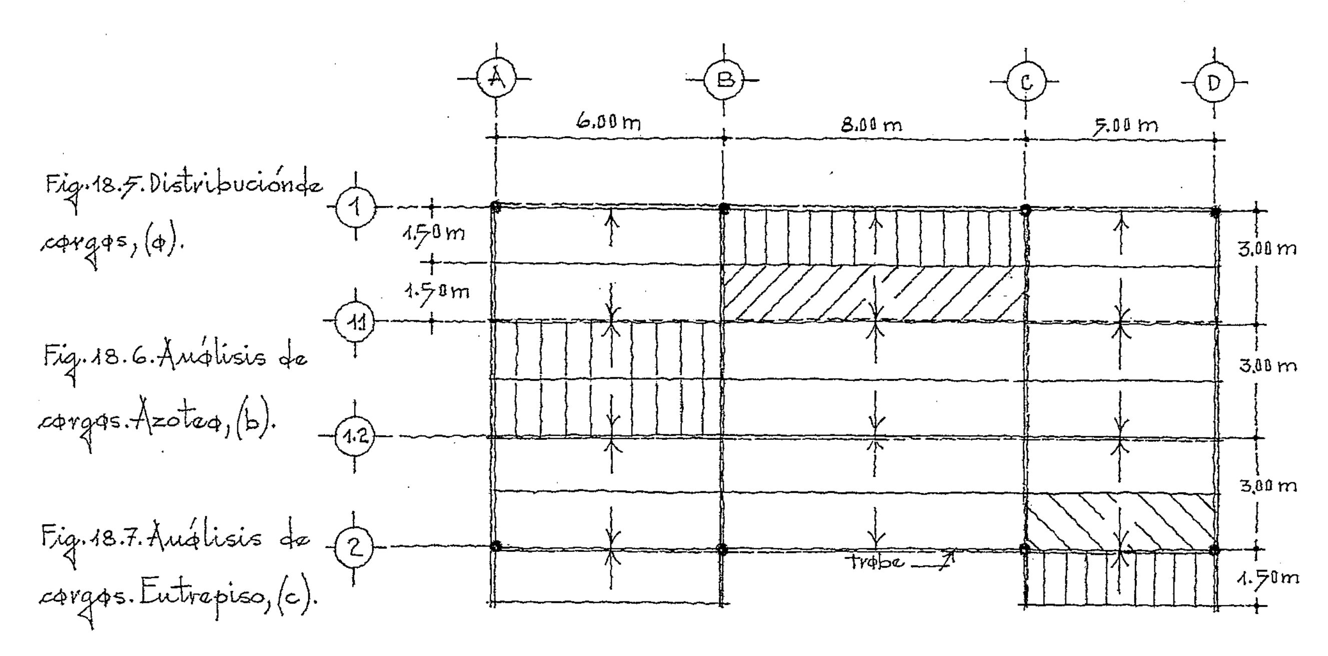


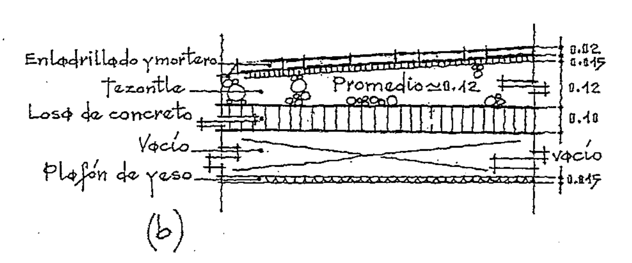
Fig. 18.5. Distribución de cargas, (a).

Fig. 18.6. Análisis de cargas. Azotea, (b).

Fig. 18.7. Análisis de cargas. Entrepiso, (c).

Cargas en las losas:

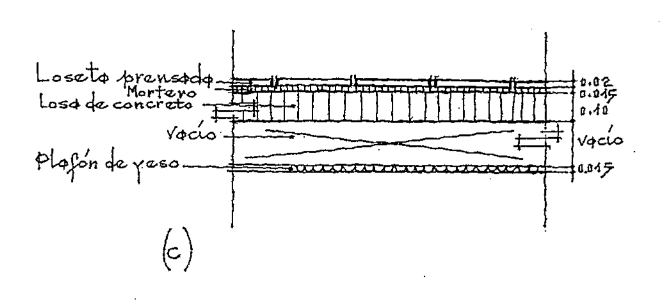
Azotea, fig. 18.6.



Enladrillado y mortero	≃ 80 Kg/m²
Tezontle (promedio)	≃ 170 "
Losa de concreto armado	≃ 240 "
Plafón de yeso	≃ 40 "
Carga viva	≃ 260 "
Carga muerta . . Suma	= 790 Kg/m²

Aplicando $(F_c) = 790 \times 1.1 \simeq 900$ Kg/m²

Entrepiso tipo, fig. 18.7.



Loseta prensada	≃ 40 Kg/m²
Mortero de cemento-arena	≃ 36 "
Losa de concreto armado	≃ 240 "
Plafón de yeso	≃ 40 "
Carga viva	≃ 360 "
Carga muerta . . Suma	= 716 Kg/m²

Aplicando $(F_c) = 716 \times 1.1 \simeq 800$ Kg/m²

En los ejes 1 y 2 se supone que se tiene cancel con cristal y algún recubrimiento. En los lados colindantes ejes A y D, se tienen muros de tabique y aplanado de cemento-arena.

En la azotea se cuenta con un pretil en todo su perímetro.

En la fig. 18.8 se muestran las cargas que actúan sobre la estructura (Azotea).

Peso por metro lineal de viga o nervadura:

Azotea

1.50 m × 900 Kg/m^2 = 1350 Kg/ml

3.00 m × 900 Kg/m^2 = 2700 Kg/ml

Entrepiso

1.50 m × 800 Kg/m^2 = 1200 Kg/ml

3.00 m × 800 Kg/m^2 = 2400 Kg/ml

Multiplicando cada una de las cantidades anteriores por la longitud de la viga o nervadura, obtenemos:

Azotea

1350 × 6.00 = 8100 Kg

" × 8.00 = 10800 Kg

" × 5.00 = 6750 Kg

Y

2700 × 6.00 = 16200 Kg

" × 8.00 = 21600 Kg

" × 5.00 = 13500 Kg

8700 11600 7250
A B C D
1.00 m
1: 600 / 8100 — 800 / 10800 — 500 / 6750
1-1: 16200 — 21600 — 13500
1-2: 16200 — 21600 — 13500
2: 16200 / 600 — 10800 / 800 — 13500 / 500
16800 11600 14000

Fig. 18.8. Cargas en Kg sobre la estructura. Azotea.

Para el pretil en la azotea suponemos un peso de 100 Kg/ml (en todo su perímetro).

Entrepiso, fig. 18.9 a 18.12.

Fig. 18.9. Cargas en losas y trabes. Entrepiso, (a).

Fig. 18.10. Losa continua. Método de Cross, (b).

Figs. 18.11 y 12. Momentos de empotramiento, (c) y (d).

1200 × 6.00 = 7200 Kg

" × 8.00 = 9600 Kg

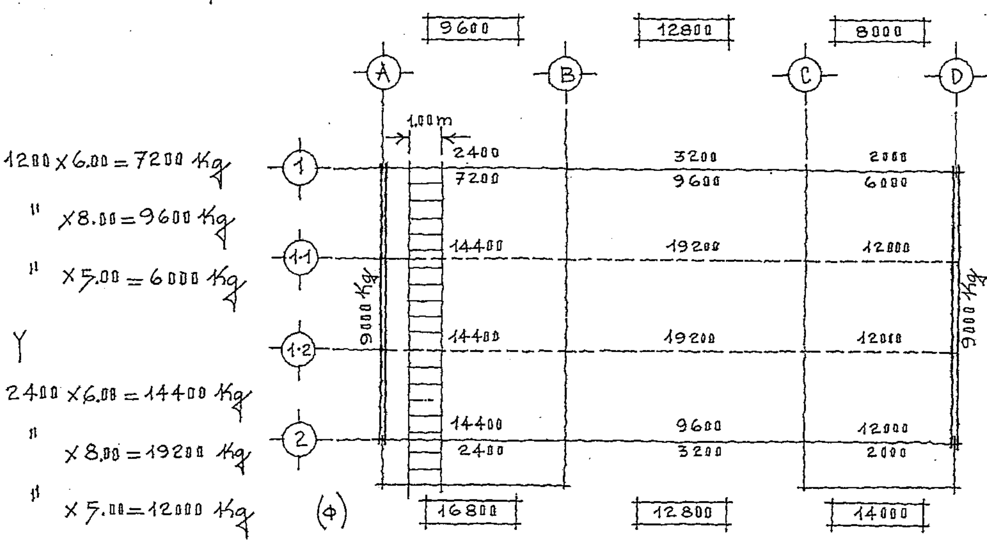
" × 5.00 = 6000 Kg

Y

2400 × 6.00 = 14400 Kg

" × 8.00 = 19200 Kg

" × 5.00 = 12000 Kg



En las fachadas (Eje 1-ABCD) y (Eje 2-ABCD), se multiplicó la longitud de cada tramo por la carga supuesta de 400 Kg/ml.

En los ejes colindantes (A-1-2) y (D-1-2), la longitud se multiplicó por la carga supuesta de 1000 Kg/ml.

Cálculo de losas (se trabajó con una franja de 1.00 m)

Azotea, tramos AB y CD, figs. 18.10 y 11.

W = 900 Kg/ml; apoyos 1, 1-1, 1-2, 2; l = 1, l = 1, l = 1

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = 0.25$ $\quad \frac{1}{3} = 0.33$ $\quad \frac{1}{3} = 0.33$ $\quad 1.50$

$\frac{0.25}{0.58} \simeq 0.43$ $\quad \frac{0.33}{0.58} \simeq 0.57$ $\quad \frac{0.33}{0.66} = 0.50$

	1	1-1	1-1	1-2	1-2	2	2
F. D.	1.00	0.43	0.57	0.50	0.50	1.00	0
M. E.	+0.68	−0.68	+0.68	−0.68	+0.68	−0.68	+1.00
	−0.68	0.00		0.00		−0.32	
1ª D.	−0.68	0	0	0	0	−0.32	0
1er T.	0	−0.34	0	0	−0.16	0	
	0.00	+0.34		+0.16		0.00	
2ª D.	0	+0.15	+0.19	+0.08	+0.08	0	
Σ M	0	−0.87	+0.87	−0.60	+0.60	−1.00	+1.00
R 0	+1.35	−1.35	+1.35	−1.35	+1.35	−1.35	+1.35
M C	−0.29	−0.29	+0.09	+0.09	−0.13	−0.13	
R F	+1.06	−1.64	+1.44	−1.26	+1.22	−1.48	+1.35

(b)

Momentos de empotramiento

(c)

$$M_e = \frac{wl^2}{12} = \frac{0.9 \times 3.00^2}{12} \simeq 0.68\ tm$$

En la ménsula

$$M_e = \frac{wl^2}{2} = \frac{0.9 \times 1.5^2}{2} \simeq 1.0\ tm$$

(d)

En los figs. 18.13 y 18.14 se presentan los gráficos.

ΣM	0	−0.87	+0.87	−0.60	+0.60	−1.00	+1.00
R0	+1.35	−1.35	+1.35	−1.35	+1.35	−1.35	+1.35
MC	−0.29	−0.29	+0.09	+0.09	−0.13	−0.13	
RF	+1.06	−1.64	+1.44	−1.26	+1.22	−1.48	+1.35

Fig. 18.13. Gráfico de fuerzas cortantes, (a).

Fig. 18.14. Gráfico de momentos flexionantes, (b).

A continuación calculamos el peralte de la losa, pero para evitar deflexiones, tomamos el valor que aparece en la Tabla 13.1. La losa se considera con un extremo continuo, por lo tanto

$$h = \frac{L}{24} = \frac{300}{24} = 12.5 \text{ cm} \quad y \quad d = 10 \text{ cm}$$

Las losas deberán diseñarse con un porcentaje de acero no inferior a

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y} = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200} \simeq 0.0023 < 1\%$$

Cálculo de las áreas de acero

$$y = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c} \therefore \; y = 0.0023 \; \frac{4200}{200} \simeq 0.048$$

$$A_s = \frac{M_U}{F_R f_Y d(1-0.59\,y)} = \frac{100\,000}{0.9 \times 4200 \times 12.5(1-0.59 \times 0.048)} \simeq 2.18 \text{ cm}^2$$

El acero para ambos momentos (Positivos y negativos) se colo-



ción por especificación.

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y}\,bd = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200}\,100\times10 \simeq 2.36\ cm^2$$

Con varillas de 3/8", se tiene:

$$\frac{2.36}{0.71} \simeq 4\ \phi_s \#3\ @\ 25\ cm$$

Revisión a cortante

$$V_{CR} = F_R\,bd\,(0.2+30\rho_s)\sqrt{f_c^*} = 0.8\times100\times10\,(0.2+30\times0.0023)\sqrt{200\times0.8}$$

$$= 800\,(0.269)\,12.65 = 2722\ Kg$$

Esfuerzo cortante máximo

$$1640\ Kg < 2722\ Kg$$

$$V_{CR} > V_{máx.}$$ *(No hay falla a cortante)*

En la fig. 18.15 se muestran los armados en la losa. En la fig. 18.16 se presentan los puntos de inflexión.

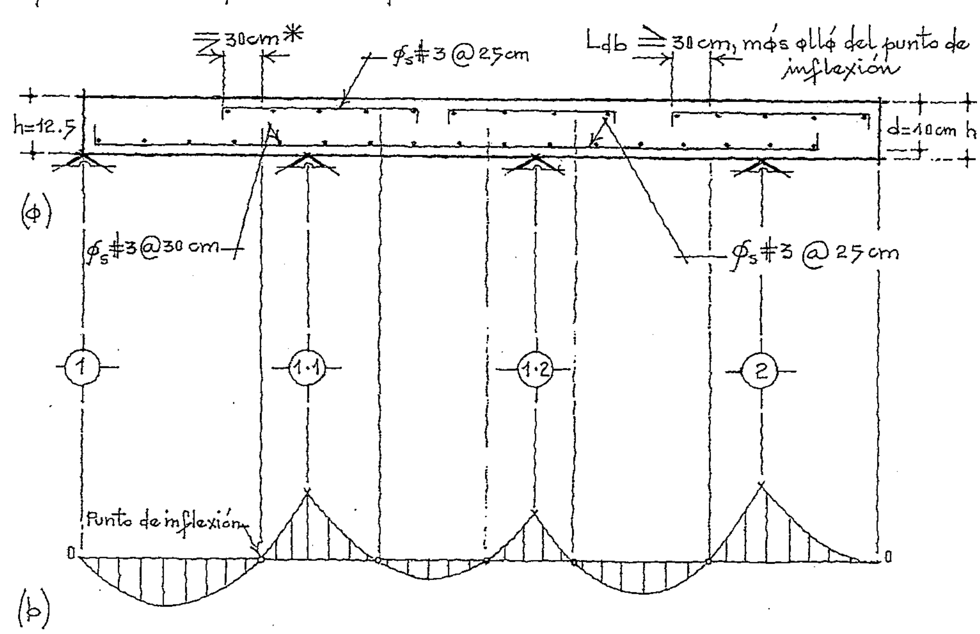


Fig. 18.15. Corte mostrando armados. Losa azotea, (a).

Fig. 18.16. Gráfica de momentos flexionantes y ubicación de los puntos de inflexión, (b).

Acero por temperatura

$$A_{st} = 0.002\,bd = 0.002\times100\times10 = 2.0\ cm^2$$

$$\text{Con } \phi\#3\ \therefore\ \frac{2.0}{0.71} \simeq 3\phi_s\#3\ @\ 33\ cm$$

---

* En ningún caso L_{db} será menor de 30 cm.

Azotea, tramo BC, figs. 18.17 a 18.23.

1 — 1-1 — 1-2 — 2

W = 900 Kg/ml

l=1 — l=1 — l=1

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = 0.25$ — $\frac{1}{3} = 0.33$ — $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = 0.25$

3.00 m — 3.00 m — 3.00 m

F.D.	1.00	0.43	0.57	0.57	0.43	1.00
M.E.	+0.68	−0.68	+0.68	−0.68	+0.68	−0.68
	−0.68	0.00		0.00		+0.68
1ª D.	−0.68	0	0	0	0	+0.68
1er T.	0	−0.34	0	0	+0.34	0
	0.00	+0.34		−0.34		0.00
2ª D.	0	+0.15	+0.19	−0.19	−0.15	0
Σ M	0	−0.87	+0.87	−0.87	+0.87	0
R 0	+1.35	−1.35	+1.35	−1.35	+1.35	−1.35
M C	−0.29	−0.29	0	0	+0.29	+0.29
R F	+1.06	−1.64	+1.35	−1.35	+1.64	−1.06

V. 1.06, 0.63, 1.18, 1.82, 1.49, 1.64, 1.35, 1.01, 1.50, 1.50, 1.01, 1.35, 1.64, 1.49, 1.82, 1.18, 0.63, 1.06

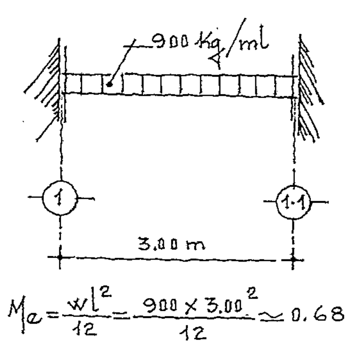
M. 0.87, 0.87, 0.63, 0.14, 0.63

ϕ_s#3 @ 33 cm — ϕ_s#3 @ 25 cm

h=12.5 cm — d=10 cm

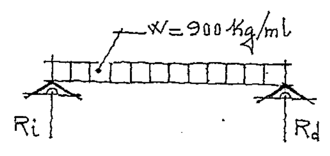
ϕ_s#3 @ 25 cm — ϕ_s#3 @ 30 cm

Momentos de empotramiento



$$M_e = \frac{wl^2}{12} = \frac{900 \times 3.00^2}{12} \simeq 0.68$$

Esfuerzo cortante



$$R_i = R_d = \frac{900 \times 3.00}{2} = 1350\ Kg = 1.35\ ton$$

El área de acero y su separación es la misma que en el ejemplo anterior.

La losa no falla a esfuerzo cortante.

El acero por temperatura también se colocará a 33 cm.

Figs. 18.17 a 18.23.

El cálculo de las losas de entrepiso en los tramos AB; BC y CD, es idéntico al visto para las losas de azotea, únicamente cambia la carga de 900 Kg/ml a 800 Kg/ml, por lo tanto, el cálculo de estas losas se excluyen del texto.

Cálculo de las nervaduras.

Se tiene dos nervaduras diferentes, una para azotea y la otra para planta tipo, figs. 18.24 y 25.

Azotea

Fig. 18.24. Nervadura eje A D. Azotea, (a).

Fig. 18.25. Nervadura eje A D. Entrepisos, (b).

Para su cálculo se tomará en cuenta las siguientes consideraciones:

a) La nervadura será de la misma sección en toda su longitud.

b) No se considera continuidad en los apoyos, únicamente en el sentido de la viga.

c) Los factores de distribución serán inversamente proporcionales a las longitudes de sus claros.

Para 6.00 y 8.00 m $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = 0.125$ y $\frac{1}{8} = 0.125$

Para 5.00 y 8.00 m $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = 0.15$

Obtención de los momentos de empotramiento:

Azotea, figs. 18.26 y 27

$$\frac{WL}{12} = \frac{16.2 \times 6}{12} = 8.10 \text{ tm}$$

$$'' \quad \frac{21.6 \times 8}{12} = 14.40 \text{ tm}$$

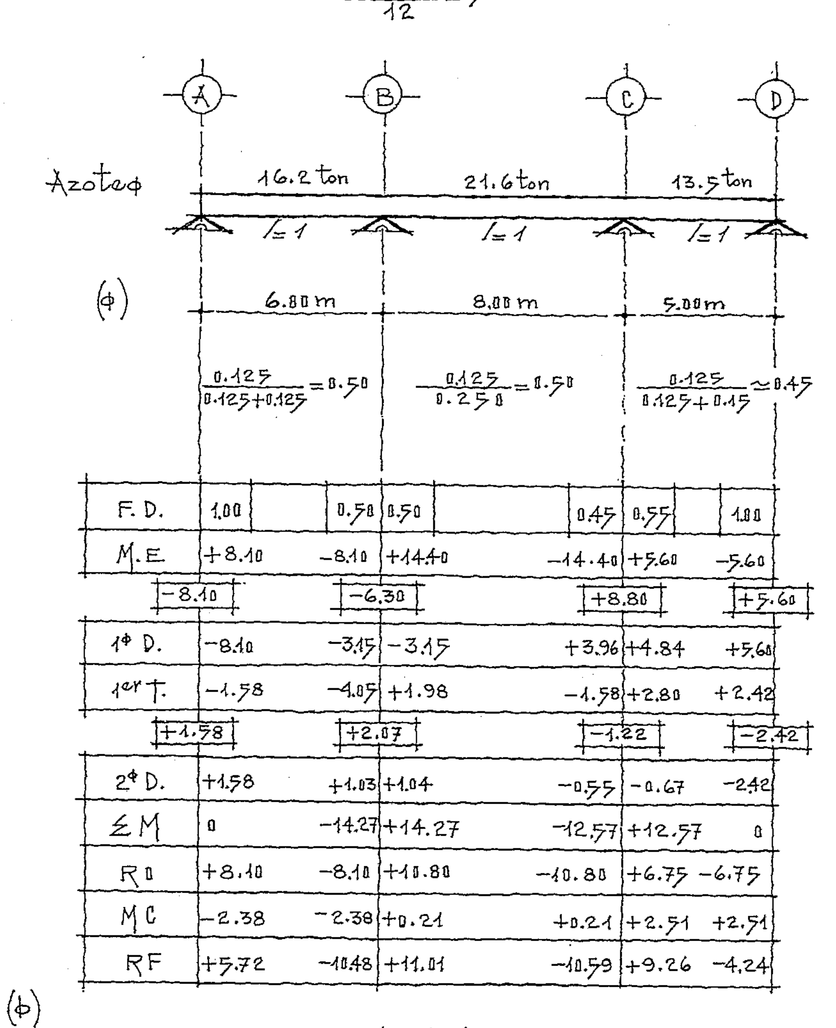
$$'' \quad \frac{13.5 \times 5}{12} \simeq 5.60 \text{ tm}$$

Entrepisos

$$\frac{WL}{12} = \frac{14.4 \times 6}{12} = 7.20 \text{ tm}$$

$$'' \quad \frac{19.2 \times 8}{12} = 12.80 \text{ tm}$$

$$'' \quad \frac{12 \times 5}{12} = 5.00 \text{ tm}$$



	A	B	B	C	C	D
F. D.	1.00	0.50	0.50	0.45	0.55	1.00
M.E	+8.10	−8.10	+14.40	−14.40	+5.60	−5.60
	−8.10	−6.30		+8.80		+5.60
1ª D.	−8.10	−3.15	−3.15	+3.96	+4.84	+5.60
1er T.	−1.58	−4.05	+1.98	−1.58	+2.80	+2.42
	+1.58	+2.07		−1.22		−2.42
2ª D.	+1.58	+1.03	+1.04	−0.55	−0.67	−2.42
ΣM	0	−14.27	+14.27	−12.57	+12.57	0
R0	+8.10	−8.10	+10.80	−10.80	+6.75	−6.75
MC	−2.38	−2.38	+0.21	+0.21	+2.51	+2.51
RF	+5.72	−10.48	+11.01	−10.59	+9.26	−4.24

Fig. 18.26. Cálculo de la nervadura eje AD. Azotea, (a).

Fig. 18.27. Nervadura continua. Método de Cross, (b).

Reacciones originales (R0)

Tramo AB: $\frac{WL}{2} = \frac{16.2}{2} = 8.10$ ton; BC $= \frac{21.6}{2} = 10.8$ ton; CD $= \frac{13.5}{2} = 6.75$ ton

En los figs. 18.28 a 18.30 se muestran gráficos y armados.

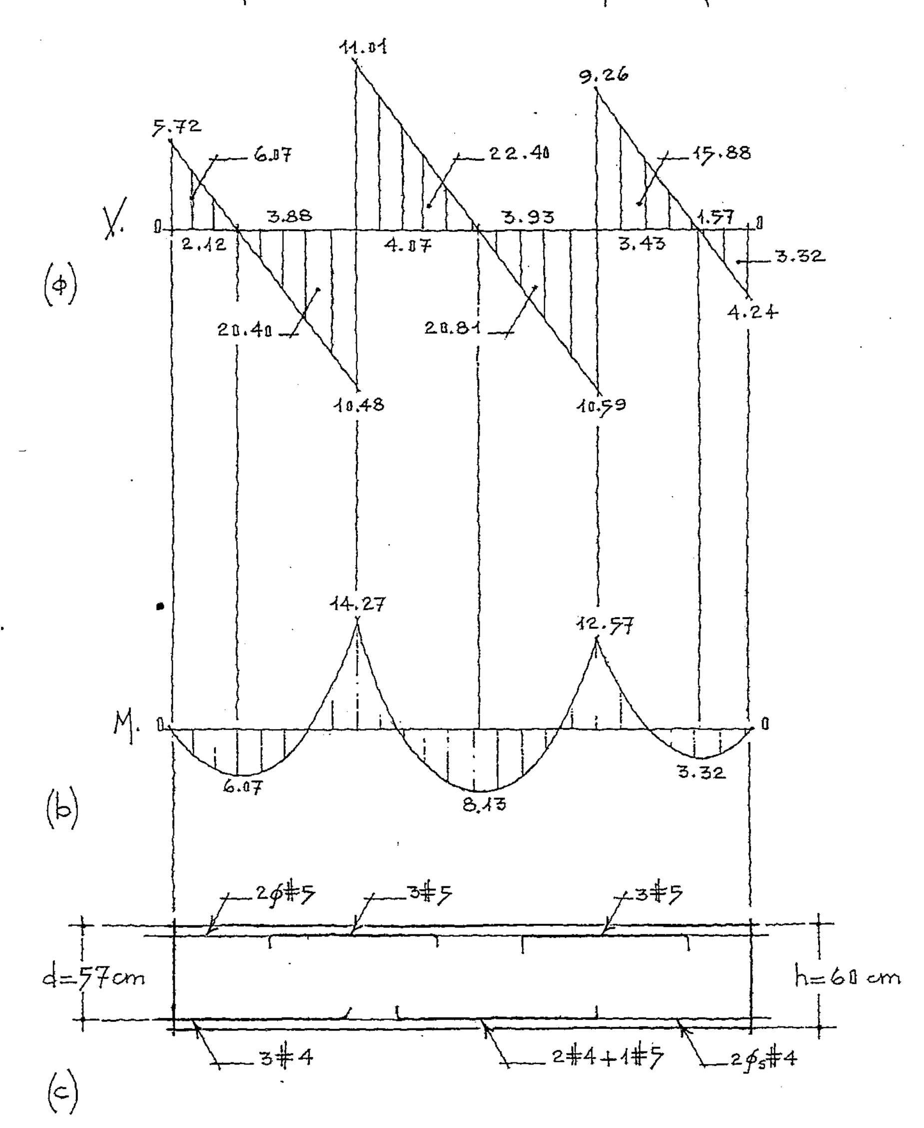


Fig. 18.28. Gráfico de esfuerzos cortantes, (a).

Fig. 18.29. Gráfico de momentos flexionantes, (b).

Fig. 18.30. Armados en la nervadura, (c).

Cálculo del peralte (*suponemos un ancho, b = 30 cm*)

$$y = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c} \quad \therefore \rho_s = \frac{A_s}{bd} \; ; \; y \; A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y}\, bd$$

$$= \frac{0.7\sqrt{250}}{4200}\, bd \simeq 0.0026\, bd$$

$$\therefore \rho_s = \frac{0.0026\, bd}{bd} = 0.0026 \; ; \quad y = 0.0026\, \frac{4200}{250} \simeq 0.0437$$

$$d^2 = \frac{M_U}{b f'_c\, y(1-0.59y)} = \frac{1427000}{30 \times 250 \times 0.0437(1-0.59\times 0.0437)}$$

$$= 4469\ cm^2 \quad \therefore d = \sqrt{4469} \simeq 67\ cm$$

Suponiendo, b=40 ; d=57 cm y h=60 cm (*dejamos esta sección*)

Revisión a fuerza cortante

$\rho_s = 0.0026 < 1\%$, por lo tanto

$$V_{CR} = F_R b d (0.2 + 30\rho_s)\sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 40 \times 57 (0.2 + 30 \times 0.0026)\sqrt{0.8 \times 250}$$

$V_{CR} \simeq 7170$ Kg $\therefore V_{CR} < V_{max}$. (Falla a cortante)

En las figs. 18.31 y 18.32, se muestra el cortante excedente y la colocación de estribos

T=?=1.90 ton

b=40 cm

Excedente 3.84

$V_{máx.}=11.01$

z=?=1.42

$V_{CR}=7.17$

4.07

(a)

Fig. 18.31. Diagrama que muestra el cortante excedente, (a).

Por comparación

$$\frac{4.07}{z} = \frac{11.01}{3.84}$$

$$z = \frac{4.07 \times 3.84}{11.01} \simeq 1.42 \text{ m}$$

$$T = \frac{3.84 \times 0.40 \times 1.42}{2} = 1.90 \text{ ton}$$

El cortante excedente es pequeño, en consecuencia, se colocarán estribos de 1/4" a 90° a una separación de:

$$d/2 = \frac{57}{2} \simeq 28 \text{ cm}$$

ϕ_s#5

d=57cm

ϕ_s1/4"

h=60cm

ϕ_s#4

d/4 d/2

(b)

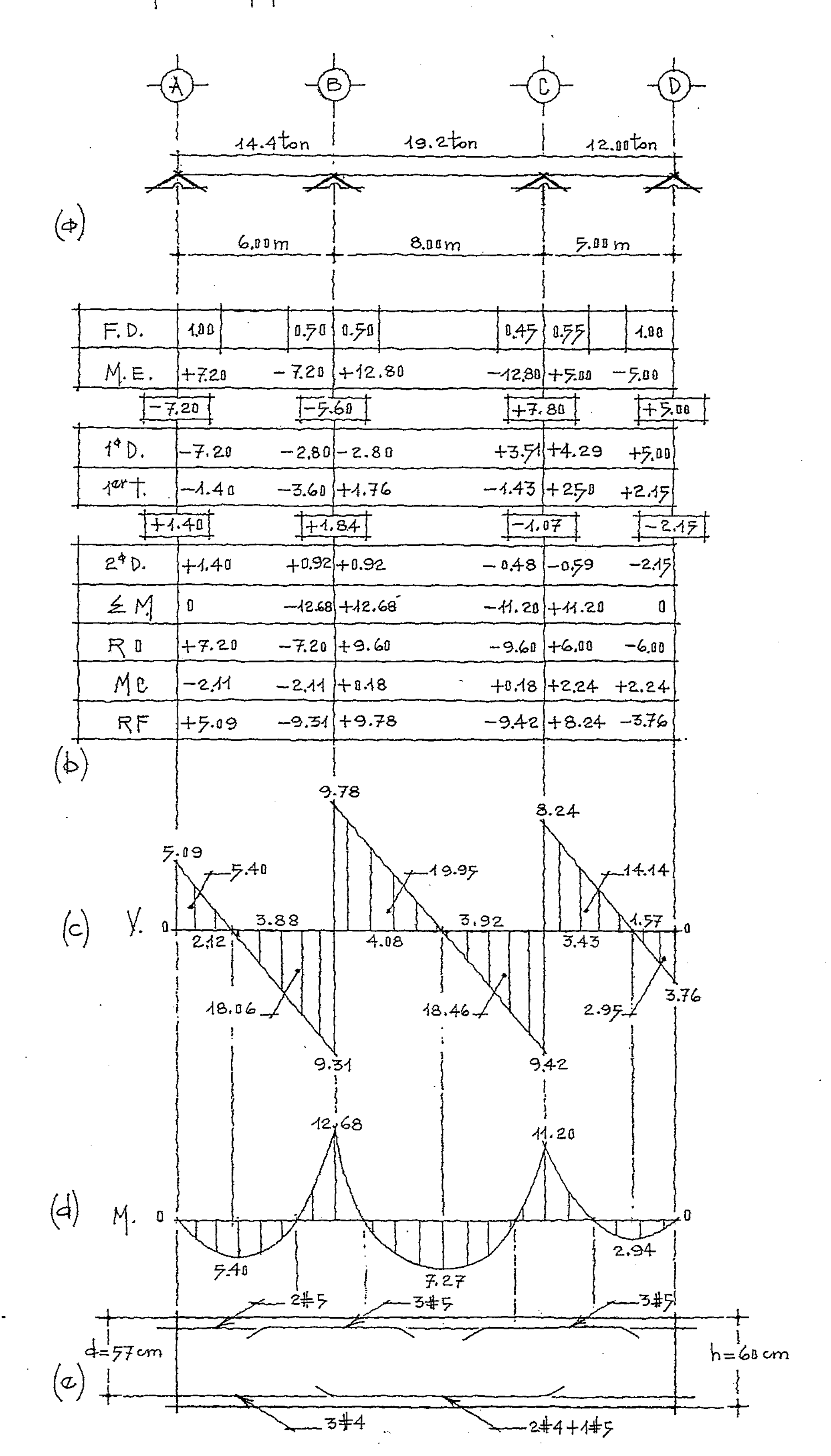
Fig. 18.32. Separación de estribos en la nervadura, (b).

Cálculo de la adherencia y longitud de desarrollo

$$L_d = 0.06 \frac{a_{sv} f_Y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006 d_b f_Y \therefore L_d = \frac{0.06 \times 1.99 \times 4200}{\sqrt{250}} \simeq 32 \text{ cm}$$

y

$0.006 \times 1.59 \times 4200 = 40$ cm (Se dejará la longitud de 40 cm)



	A	B	B	C	C	D
F. D.	1.00	0.50	0.50	0.45	0.55	1.00
M. E.	+7.20	−7.20	+12.80	−12.80	+5.00	−5.00
	−7.20	−5.60		+7.80		+5.00
1ª D.	−7.20	−2.80	−2.80	+3.51	+4.29	+5.00
1er T.	−1.40	−3.60	+1.76	−1.43	+2.50	+2.15
	+1.40	+1.84		−1.07		−2.15
2ª D.	+1.40	+0.92	+0.92	−0.48	−0.59	−2.15
Σ M	0	−12.68	+12.68	−11.20	+11.20	0
R 0	+7.20	−7.20	+9.60	−9.60	+6.00	−6.00
M C	−2.11	−2.11	+0.18	+0.18	+2.24	+2.24
R F	+5.09	−9.31	+9.78	−9.42	+8.24	−3.76

Fig. 18.33. Cálculo de la nervadura eje AD. Entrepiso tipo, (a).

Fig. 18.34. Nervadura continua. Método de Cross, (b).

Fig. 18.35. Gráfica de esfuerzos cortantes, (c).

Fig. 18.36. Gráfica de momentos flexionantes, (d).

Fig. 18.37. Armados en la nervadura, (e).

$d = 57\,cm$; $h = 60\,cm$

$\rho_s = \frac{A_s}{bd}$, y como $\rho_s = 0.0026$, se tiene

$A_s = 0.0026 \times 40 \times 57 \simeq 5.93\,cm^2$

Con $\phi_s \# 5$, se tiene

$N^o\ \phi_s \# 5 = \frac{5.93}{1.99} \simeq 3\phi_s \# 5$

Revisión a fuerza cortante

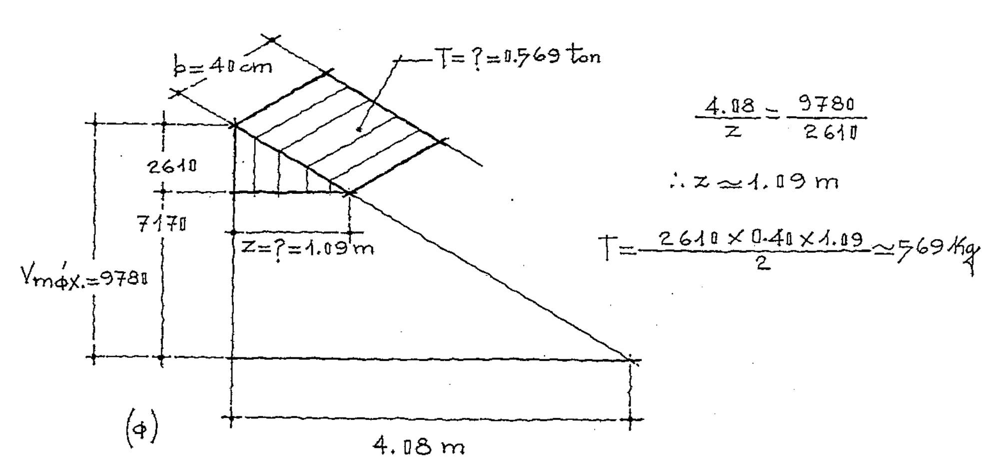
Como ya se calculó en la nervadura de azotea, se tiene:

$V_{CR} = 7170\,Kg$

$V_{m\acute{a}x.} = 9780\,Kg > V_{CR}$ (La nervadura falla a cortante).

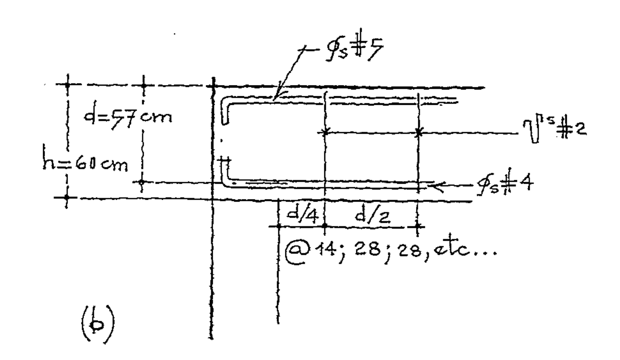
En las figs. 18.38 y 39, se muestra el cortante excedente y la colocación de estribos.

Fig. 18.38. Diagrama que muestra el cortante excedente, (a).



El cortante excedente es muy pequeño, por lo tanto, se colocarán estribos de 1/4", por especificación.

Fig. 18.39. Separación de estribos en la nervadura, (b).



A continuación se analizan los pórticos de los ejes 1 y 2, y también, los pórticos de los ejes A, B, C y D con sus cargas correspondientes a las reacciones finales de las nervaduras. Los ejes en colindancia A y D tienen, además, carga uniformemente repartida por efecto de los muros, figs. 18.40 y 18.41.

A-B	B-C	C-D
8.70 ton	11.60 ton	7.25 ton
9.60 ton	12.80 ton	8.00 ton
9.60 ton	12.80 ton	8.00 ton
9.60 ton	12.80 ton	8.00 ton

Eje 1
(a)

Fig. 18.40. Eje 1, tramo A-D, (a).

A B C D

A-B	B-C	C-D
16.80 ton	11.60 ton	14.00 ton
16.80 ton	12.80 ton	14.00 ton
16.80 ton	12.80 ton	14.00 ton
16.80 ton	12.80 ton	14.00 ton

Eje 2
(b)

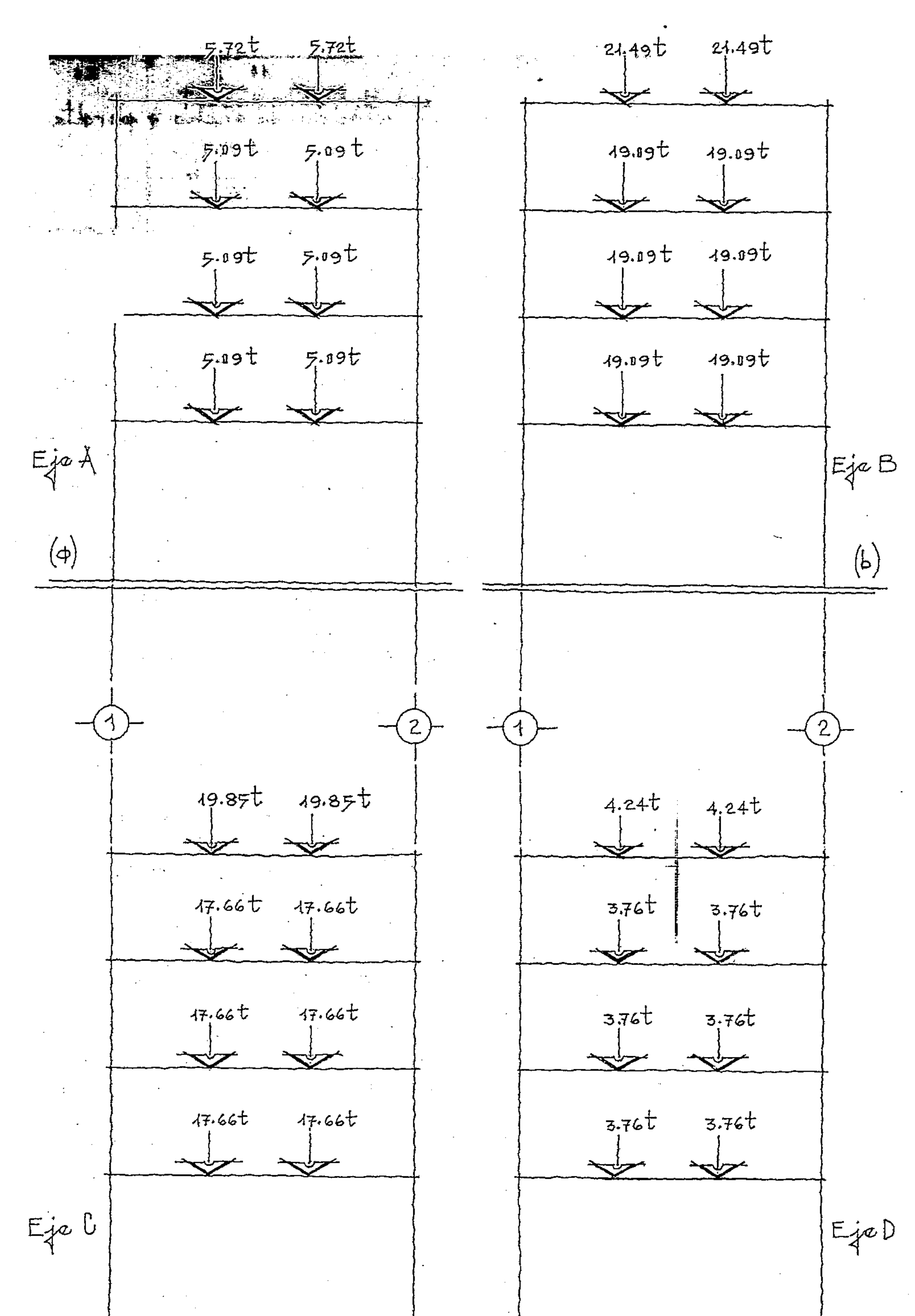
Fig. 18.41. Eje 2, tramo A-D, (b).

Fig. 18.42. Cargas finales en las nervaduras, (a). Eje A.

Fig. 18.43. Cargas finales en las nervaduras, (b). Eje B.

Fig. 18.44. Cargas finales en las nervaduras, (c). Eje C.

Fig. 18.45. Cargas finales en las nervaduras, (d). Eje D.



Para su análisis seguimos los pasos siguientes:

1. Se supone una sección para la viga en cada nivel - comprendida entre

$$\frac{\text{claro de la viga}}{10} \text{ a } \frac{\text{claro}}{20} \text{ y,}$$

relación de ancho a peralte de

$$\frac{1}{4} \text{ a } \frac{1}{2}$$

Es recomendable que la sección sea la misma en los diferentes niveles.

2. Los claros en los ejes 1 y 2 son diferentes, sin embargo, se tomará la sección de acuerdo al claro mayor

$$\frac{800 \text{ cm}}{12} \simeq 70 \text{ cm} \quad (\textit{Se propone } 35 \times 70)$$

Para los ejes A, B, C y D, se tiene:

$$\frac{900 \text{ cm}}{12} = 75 \text{ cm} \quad (\textit{Se propone } 40 \times 80)$$

3. Las vigas en los ejes 1 y 2 se proponen de (35 x 70), reciben menos carga, pero toman los efectos del sismo.

4. Para los ejes A, B, C y D que tienen mayor longitud y reciben, además, las concentraciones de las nervaduras, se proponen de (40 x 80).

5. Para las columnas se proponen de dos tipos de acuerdo con sus dimensiones:

Ejes A y D 40x40; 40x50; 40x60 y 40x70 (*según los niveles*)

Ejes B y C 50x50; 50x60; 50x70 y 50x80 (*según los niveles*)

Con las dimensiones ya indicadas calculamos las rigideces de trabes y columnas, tomando por facilidad de cálculo todas las dimensiones en decímetros

Trabes ejes 1 y 2

$$I = \frac{b h^3}{12} = \frac{3.5 \times 7^3}{12} = 100$$

y,

Las rigideces para los diferentes claros, serán:

para $L = 60$ $\quad I = \frac{bh^3}{12} \therefore K = \frac{I}{L} = \frac{100}{60} \simeq 1.67$ (Rigidez en la trabe)

" $\quad L = 80$ $\quad K = \frac{100}{80} = 1.25$ " "

" $\quad L = 50$ $\quad K = \frac{100}{50} = 2.00$ " "

Trabes ejes A, B, C y D

$$I = \frac{4 \times 8^3}{12} \simeq 171$$

y la rigidez será

$$K = \frac{I}{L} = \frac{171}{90} = 1.90 \text{ (únicamente hay una longitud)}$$

Para las columnas calculamos el momento de inercia en los dos sentidos:

Sección	I (Eje letras)	I (Eje números)	K (letras)	K (números)
40 x 40	$\frac{4 \times 4^3}{12} \simeq 21.50$	$\frac{4 \times 4^3}{12} \simeq 21.50$	$\frac{21.50}{40} \simeq 0.54$	$\frac{21.50}{40} \simeq 0.54$
40 x 50	$\frac{4 \times 5^3}{12} \simeq 41.80$	$\frac{5 \times 4^3}{12} \simeq 26.60$	$\frac{41.80}{40} \simeq 1.04$	$\frac{26.60}{40} \simeq 0.67$
40 x 60	$\frac{4 \times 6^3}{12} = 72.00$	$\frac{6 \times 4^3}{12} = 32.00$	$\frac{72.00}{40} = 1.80$	$\frac{32.00}{40} = 0.80$
40 x 70	$\frac{4 \times 7^3}{12} \simeq 114.00$	$\frac{7 \times 4^3}{12} \simeq 37.30$	$\frac{114.00}{60} = 1.90$	$\frac{37.30}{60} \simeq 0.62$
50 x 50	$\frac{5 \times 5^3}{12} \simeq 52.00$	$\frac{5 \times 5^3}{12} \simeq 52.00$	$\frac{52.00}{40} = 1.30$	$\frac{52.00}{40} = 1.30$
50 x 60	$\frac{5 \times 6^3}{12} = 90.00$	$\frac{6 \times 5^3}{12} = 62.50$	$\frac{90.00}{40} = 2.25$	$\frac{62.50}{40} \simeq 1.56$
50 x 70	$\frac{5 \times 7^3}{12} \simeq 143.00$	$\frac{7 \times 5^3}{12} \simeq 72.90$	$\frac{143}{40} \simeq 3.58$	$\frac{72.90}{40} \simeq 1.82$
50 x 80	$\frac{5 \times 8^3}{12} \simeq 213.00$	$\frac{8 \times 5^3}{12} \simeq 83.00$	$\frac{213.00}{60} = 3.55$	$\frac{83.00}{60} \simeq 1.38$

En los diagramas se muestran las rigideces obtenidas, figuras 18.46 y 47.

A B C D

Nivel	AB	BC	CD
4	1.67	1.25	2.00
3	1.67	1.25	2.00
2	1.67	1.25	2.00
1	1.67	1.25	2.00

Entrepiso	A	B	C	D
4–3	0.54	1.30	1.30	0.54
3–2	0.67	1.56	1.56	0.67
2–1	0.80	1.82	1.82	0.80
1–base	0.62	1.38	1.38	0.62

Ejes 1 y 2

(a)

Fig.18.46. Diagrama en los ejes 1 y 2, tramos AB, BC y CD, (a).

6.00 m 8.00 m 5.00 m

Nivel	AB	BC	CD
4	1.67	1.25	2.00
3	1.67	1.25	2.00
2	1.67	1.25	2.00
1	1.67	1.25	2.00

Nodos, nivel	A	B	C	D
4	0.408	0.910	0.930	0.925
3	0.390	0.780	0.830	0.417
2	0.426	0.844	0.892	0.461
1	0.335	0.658	0.700	0.363

Entrepiso	A	B	C	D
4–3	0.54	1.30	1.30	0.54
3–2	0.67	1.56	1.56	0.67
2–1	0.80	1.82	1.82	0.80
1–base	0.62	1.38	1.38	0.62

Ejes 1 y 2

(b)

Fig.18.47. Diagrama que muestra las rigideces en los nodos, (b).

Las matrices de las rigideces de los nodos, se obtienen con la fórmula que dice:

$$K_{nodo} = K_{poste} \frac{\Sigma K_{vigas}}{\Sigma K_{vigas} + \Sigma K_{poste}}$$

Nivel 4

$$A = 0.54\left(\frac{1.67}{1.67+0.54}\right) \simeq 0.408$$

$$B = 1.30\left(\frac{1.67+1.25}{2.92+1.30}\right) \simeq 0.900$$

$$C = 1.30\left(\frac{1.25+2.00}{3.25+1.30}\right) \simeq 0.930$$

$$D = 0.54\left(\frac{2.00}{2.00+0.54}\right) \simeq 0.425$$

Suma en el nivel 2.663

Nivel 3

$$A = 0.67\left(\frac{1.67}{1.67+0.54+0.67}\right) \simeq 0.390$$

$$B = 1.56\left(\frac{1.67+1.25}{2.92+2.86}\right) \simeq 0.780$$

$$C = 1.56\left(\frac{3.25}{3.25+2.86}\right) \simeq 0.830$$

$$D = 0.67\left(\frac{2.00}{2.00+1.21}\right) \simeq 0.417$$

Suma en el nivel 2.417

Nivel 2

$$A = 0.80\left(\frac{1.67}{1.67+0.80+0.67}\right) \simeq 0.426$$

$$B = 1.82\left(\frac{1.67+1.25}{2.92+3.38}\right) \simeq 0.844$$

$$C = 1.82\left(\frac{1.25+2.00}{3.25+3.38}\right) \simeq 0.892$$

$$D = 0.80\left(\frac{2.00}{2.00+1.47}\right) \simeq 0.461$$

Suma en el nivel 2.623

Nivel 1

$$A = 0.62\left(\frac{1.67}{1.67+0.80+0.62}\right) \simeq 0.335$$

$$B = 1.38\left(\frac{1.67+1.25}{2.92+3.20}\right) \simeq 0.658$$

$$C = 1.38\left(\frac{1.25+2.00}{3.25+3.20}\right) \simeq 0.700$$

$$D = 0.62\left(\frac{2.00}{2.00+0.62+0.80}\right) \simeq 0.363$$

Suma en el nivel 2.056

Matrices de rigideces de los nodos, figs. 18.48 y 49

$$\text{Nivel 4 Ejes 1 y 2} = 0.54\left(\frac{1.90}{1.90+0.54}\right) \simeq 0.421$$

$$\text{" 3 " "} = 1.04\left(\frac{1.90}{1.90+1.04+0.54}\right) \simeq 0.567$$

$$\text{" 2 " "} = 1.80\left(\frac{1.90}{1.90+1.80+1.04}\right) \simeq 0.721$$

$$\text{" 1 " "} = 1.90\left(\frac{1.90}{1.90+1.80+1.90}\right) \simeq 0.644$$

$$\text{Nivel 4 Ejes 1 y 2} = 1.30\left(\frac{1.90}{1.90+1.30}\right) \simeq 0.770$$

$$\text{3 " "} = 2.25\left(\frac{1.90}{1.90+1.30+2.25}\right) \simeq 0.780$$

$$\text{2 " "} = 3.58\left(\frac{1.90}{1.90+3.58+2.25}\right) \simeq 0.880$$

$$\text{1 " "} = 3.55\left(\frac{1.90}{1.90+3.55+3.58}\right) \simeq 0.746$$

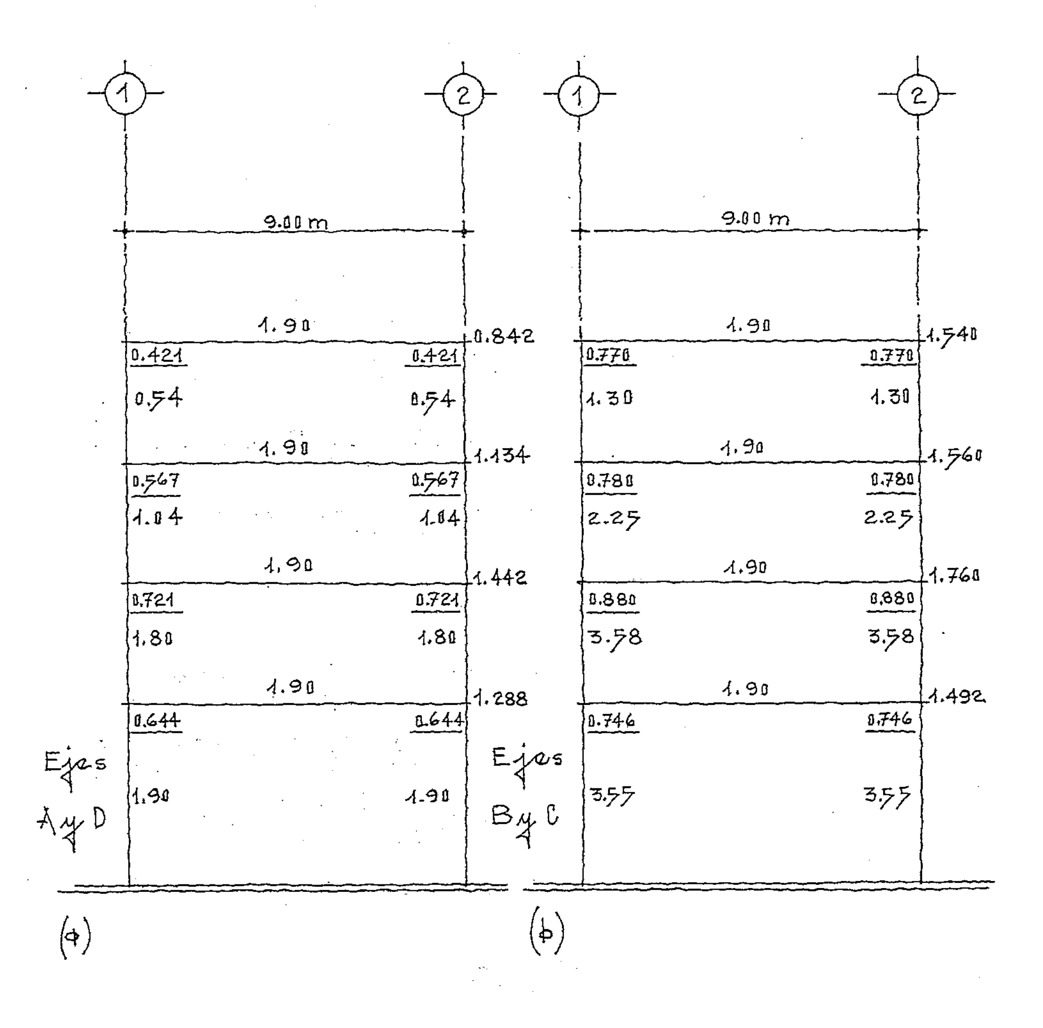


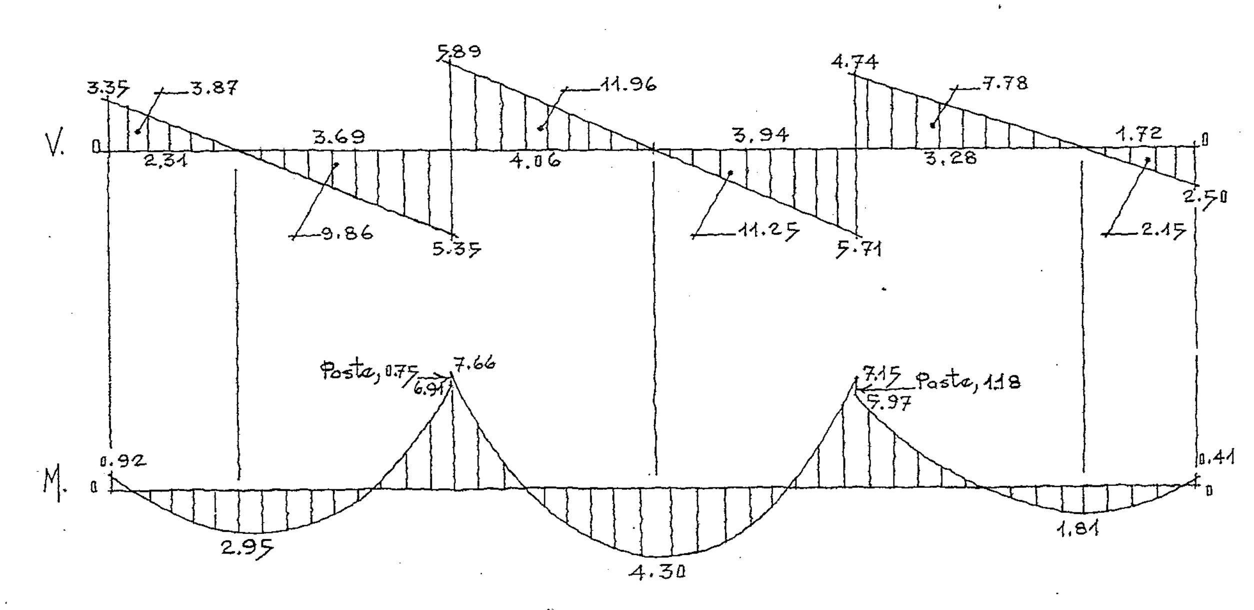
Fig. 18.48. Diagrama en los ejes A y D, tramos 1 y 2, (a).

Fig. 18.49. Diagrama en los ejes B y C, tramo 1 y 2, (b).

Viga eje 1 nivel 4, figs. 18.50 a 18.53.

	8.70 t	11.60 t	7.25 t
$M_e = \frac{WL}{12}$	$\frac{8.70 \times 6}{12} = 4.35$ tm	$\frac{11.60 \times 8}{12} \simeq 7.74$ tm	$\frac{7.25 \times 5}{12} \simeq 3.00$ tm

Ejes	A	Viga derecha	Viga izquierda	B	Viga derecha	Viga izquierda	C	Viga derecha	Viga izquierda	D
K poste sup.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
K poste inf. viga	0.54	1.67	1.67	1.30	1.25	1.25	1.30	2.00	2.00	0.54
F.D.	0.25	0.75	0.39	0.31	0.30	0.27	0.29	0.44	0.79	0.21
M.E.		+4.35	−4.35		+7.74	−7.74		+3.00	−3.00	
	−4.35			−3.39			+4.74			+3.00
1a D.	−1.09	−3.26	−1.32	−1.05	−1.02	+1.28	+1.37	+2.09	+2.37	+0.63
1er T.		−0.66	−1.63		+0.64	−0.51		+1.18	+1.05	
	+0.66			+0.99			−0.67			−1.05
2a D.	+0.17	+0.49	+0.39	+0.29	+0.30	−0.18	−0.19	−0.30	−0.83	−0.22
ΣM	−0.92	+0.92	−6.91	−0.75	+7.66	−7.15	+1.18	+5.97	−0.41	+0.41
S poste sup.	—			—			—			—
i poste inf.	0.92			0.75			1.18			0.41
R 0		4.35	4.35		5.80	5.80		3.62	3.62	
M C		−1.00	+1.00		+0.09	−0.09		+1.12	−1.12	
R F	3.35	3.35	5.35	11.24	5.89	5.71	10.45	4.74	2.50	2.50



Obtención de los factores de distribución:

Nudo A (Suma de postes) ∴ Poste inferior = 0.54 (Azotea)

$$F.D. = \frac{0.54}{1.67 + 0.54} \simeq 0.25 \quad y \quad \frac{1.67}{0.54 + 1.67} \simeq 0.75$$

Nudo B

$$F.D. = \frac{1.67}{1.67 + 1.30 + 1.25} = \frac{1.67}{4.22} \simeq 0.39$$

$$\frac{1.30}{4.22} \simeq 0.31$$

$$\frac{1.25}{4.22} \simeq 0.30$$

Nudo C

$$F.D. = \frac{1.25}{1.25 + 1.30 + 2.00} = \frac{1.25}{4.55} \simeq 0.27$$

$$\frac{1.30}{4.55} \simeq 0.29$$

$$\frac{2.00}{4.55} \simeq 0.44$$

Nudo D

$$F.D. = \frac{2.00}{2.00 + 0.54} \simeq 0.79$$

$$\frac{0.54}{2.54} \simeq 0.21$$

Los factores de distribución para los postes (superior e inferior), se obtienen:

$$\frac{0.54}{0.54 + 0.67} \simeq 0.45 \quad y \quad \frac{0.67}{1.21} \simeq 0.55$$

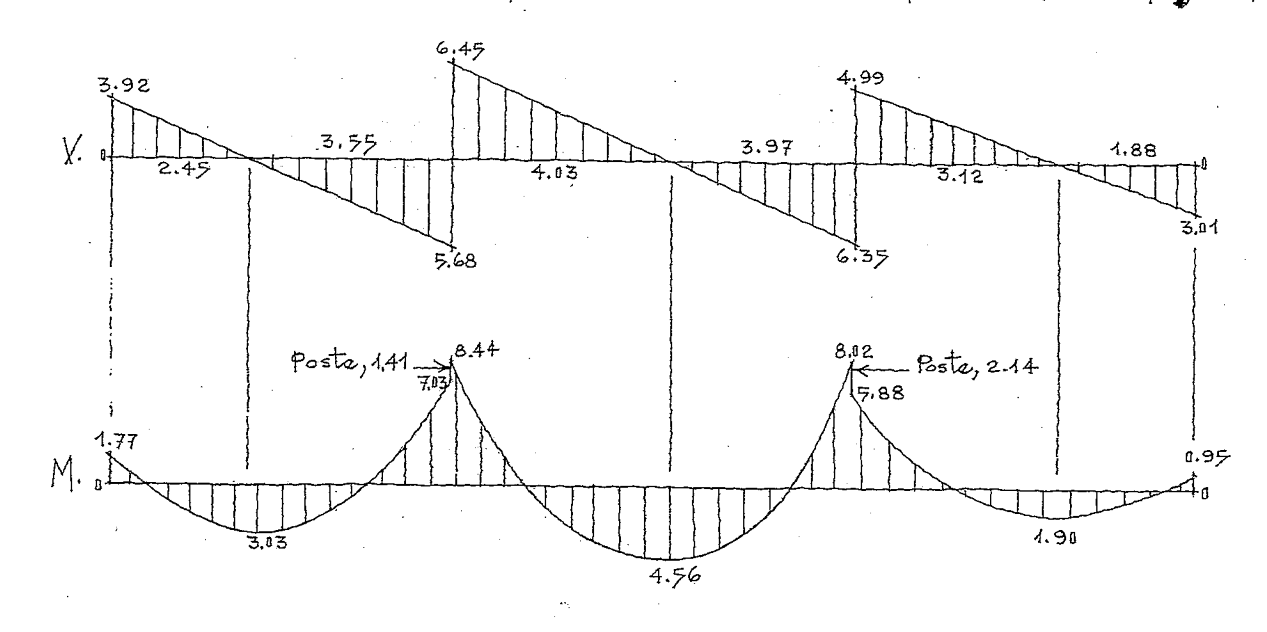
$$\frac{1.30}{1.30 + 1.56} \simeq 0.45 \quad y \quad \frac{1.56}{2.86} \simeq 0.55$$

Los pasos que siguen son idénticos a los ya aplicados en ejercicios pasados, únicamente se tendrá en cuenta, que el momento en postes se repartirá de acuerdo a su F.D., en superior e inferior.

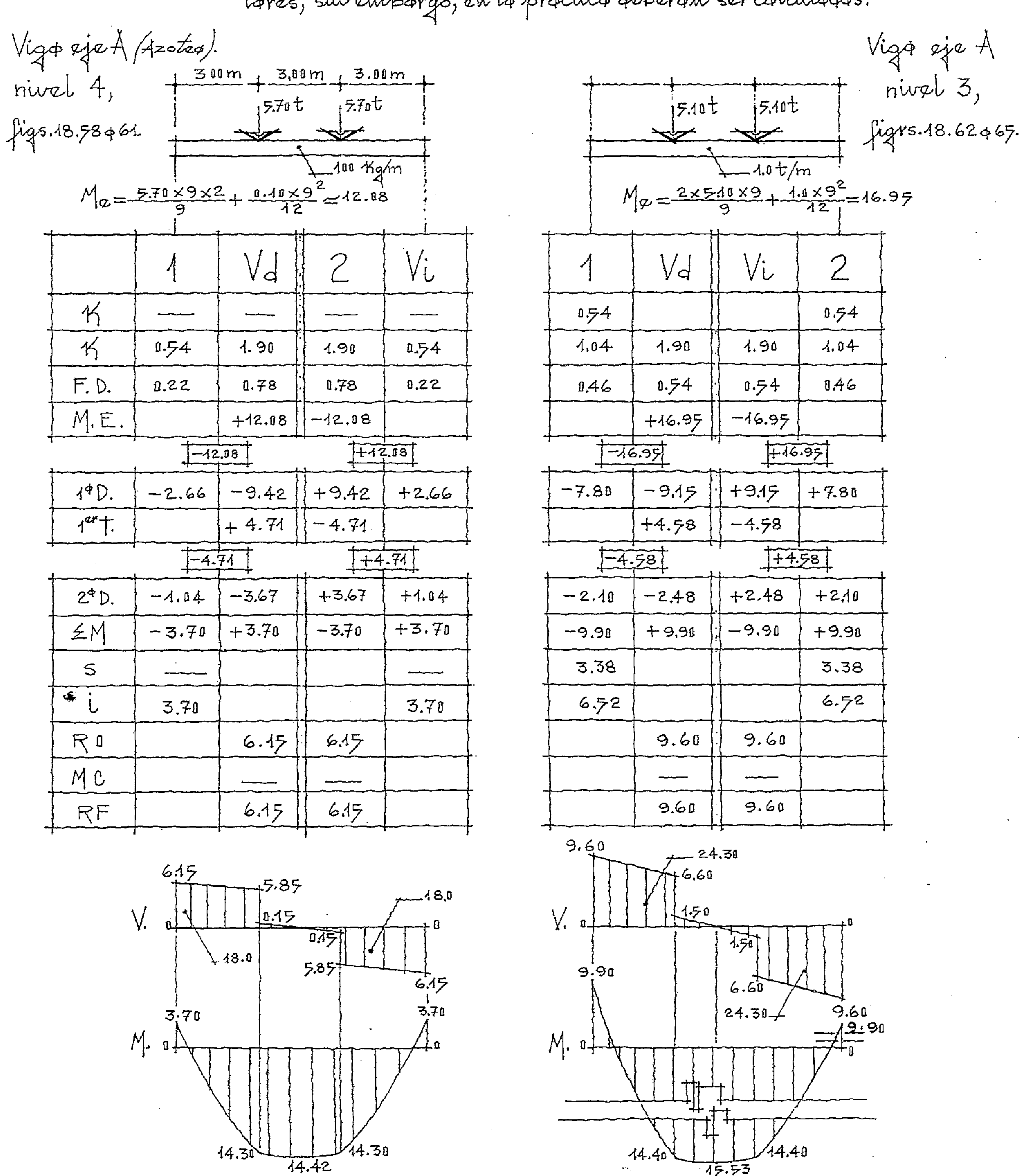
Viga eje nivel 3, figs. 18.54 a 57.

	6.00 m	8.00 m	5.00 m
Carga	9.60 t	12.80 t	8.00 t
M.E.	$\frac{9.60 \times 6}{12} = 4.80$ tm	$\frac{12.80 \times 8}{12} \simeq 8.54$ tm	$\frac{8.00 \times 5}{12} \simeq 3.34$ tm

	A	Vd	Vi	B	Vd	Vi	C	Vd	Vi	D
Ks	0.54			1.30			1.30			0.54
Ki	0.67	1.67	1.67	1.56	1.25	1.25	1.56	2.00	2.00	0.67
F. D.	0.42	0.58	0.29	0.49	0.22	0.20	0.47	0.33	0.62	0.38
M. E.		+4.80	−4.80		+8.54	−8.54		+3.34	−3.34	
	−4.80			−3.74			+5.20			+3.34
1ª D.	−2.00	−2.80	−1.09	−1.84	−0.81	+1.04	+2.44	+1.72	+2.07	+1.27
1er T.		−0.55	−1.40		+0.52	−0.40		+1.03	+0.86	
	+0.55			+0.88			−0.63			−0.86
2ª D.	+0.23	+0.32	+0.26	+0.43	+0.19	−0.12	−0.30	−0.21	−0.54	−0.32
ΣM	−1.77	+1.77	−7.03	−1.41	+8.44	−8.02	+2.14	+5.88	−0.95	+0.95
s	0.80			0.64			0.96			0.42
i	0.97			0.77			1.18			0.52
R0		4.80	4.80		6.40	6.40		4.00	4.00	
MC		−0.88	+0.88		+0.05	−0.05		+0.99	−0.99	
RF	3.92	3.92	5.68	12.13	6.45	6.35	11.34	4.99	3.01	



Las vigas eje 1 nivel 2 y nivel 1, así como las vigas del eje 2 en sus diferentes niveles, se calculan de igual manera que las ya analizadas. Se hace ésto, para evitar la repetición de ejercicios similares, sin embargo, en la práctica deberán ser calculados.



Viga eje A (Azotea). nivel 4, figs. 18.58 a 61.

$$M_\varphi = \frac{5.70\times9\times2}{9} + \frac{0.10\times9^2}{12} \simeq 12.08$$

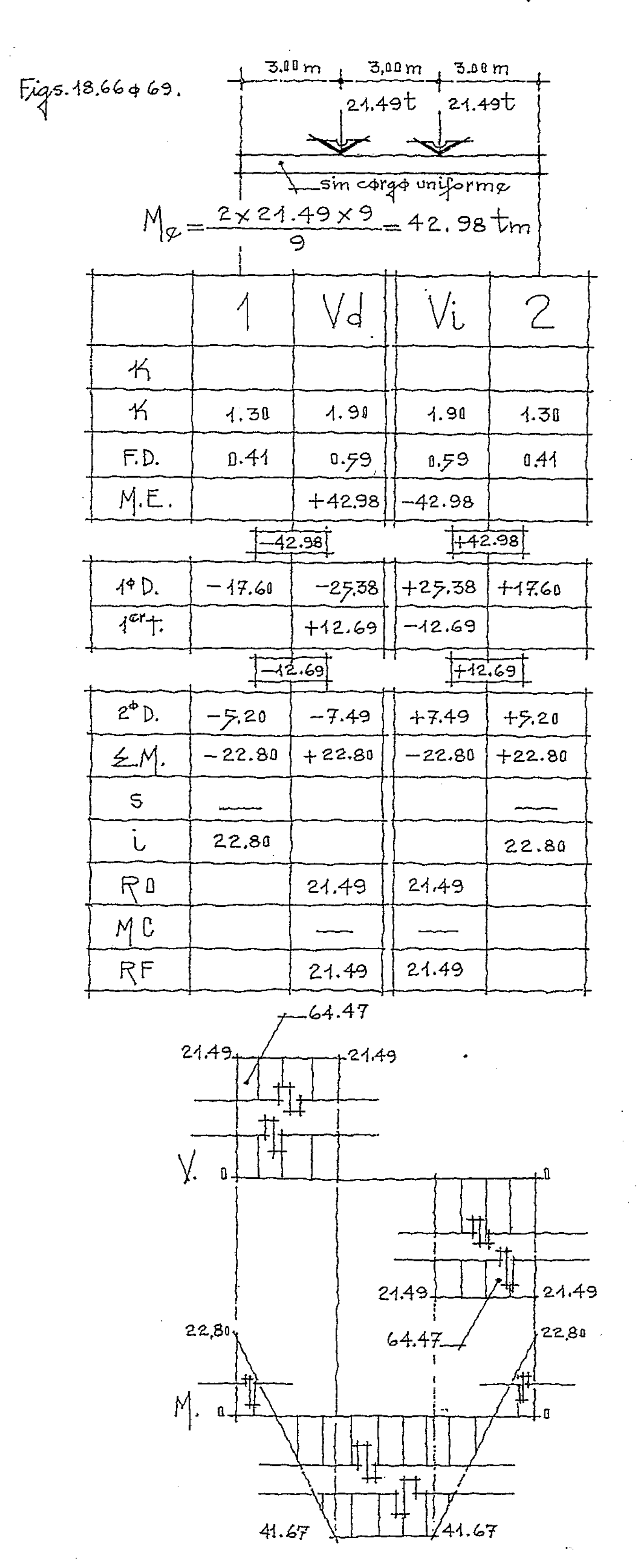
	1	Vd	2	Vi
K	—	—	—	—
K	0.54	1.90	1.90	0.54
F. D.	0.22	0.78	0.78	0.22
M. E.		+12.08	−12.08	
		−12.08	+12.08	
1ª D.	−2.66	−9.42	+9.42	+2.66
1er T.		+4.71	−4.71	
		−4.71	+4.71	
2ª D.	−1.04	−3.67	+3.67	+1.04
ΣM	−3.70	+3.70	−3.70	+3.70
s	—			—
i	3.70			3.70
R0		6.15	6.15	
MC		—	—	
RF		6.15	6.15	

Viga eje A nivel 3, figrs. 18.62 a 65.

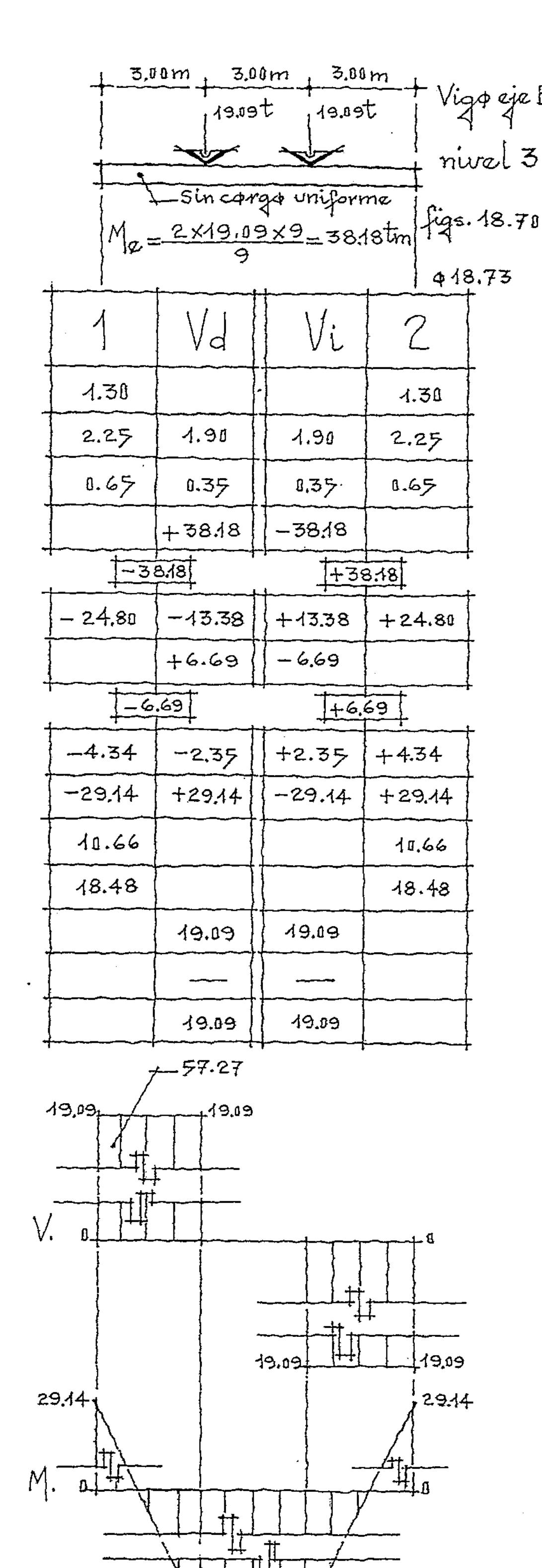
$$M_\varphi = \frac{2\times5.10\times9}{9} + \frac{1.0\times9^2}{12} = 16.95$$

	1	Vd	Vi	2
K	0.54			0.54
K	1.04	1.90	1.90	1.04
F. D.	0.46	0.54	0.54	0.46
M. E.		+16.95	−16.95	
		−16.95	+16.95	
1ª D.	−7.80	−9.15	+9.15	+7.80
1er T.		+4.58	−4.58	
		−4.58	+4.58	
2ª D.	−2.10	−2.48	+2.48	+2.10
ΣM	−9.90	+9.90	−9.90	+9.90
s	3.38			3.38
i	6.52			6.52
R0		9.60	9.60	
MC		—	—	
RF		9.60	9.60	

Viga eje B (Azotea), nivel 4, figs. 18.66 a 69.



	1	Vd	Vi	2
K (script)				
K	1.30	1.90	1.90	1.30
F.D.	0.41	0.59	0.59	0.41
M.E.		+42.98	−42.98	
		−42.98	+42.98	
1a D.	−17.60	−25.38	+25.38	+17.60
1er T.		+12.69	−12.69	
		−12.69	+12.69	
2a D.	−5.20	−7.49	+7.49	+5.20
ΣM.	−22.80	+22.80	−22.80	+22.80
s	—			—
i	22.80			22.80
R0		21.49	21.49	
MC		—	—	
RF		21.49	21.49	



1	Vd	Vi	2
1.30			1.30
2.25	1.90	1.90	2.25
0.65	0.35	0.35	0.65
	+38.18	−38.18	
	−38.18	+38.18	
−24.80	−13.38	+13.38	+24.80
	+6.69	−6.69	
	−6.69	+6.69	
−4.34	−2.35	+2.35	+4.34
−29.14	+29.14	−29.14	+29.14
10.66			10.66
18.48			18.48
	19.09	19.09	
	—	—	
	19.09	19.09	

18.2. Sismo

Las acciones externas del viento o las producidas por un sismo actuando sobre una estructura, originan momentos y cortantes que al combinarse con los ya obtenidos en la continuidad, aumentan los esfuerzos permisibles de los materiales, poniendo en peligro la estabilidad de la estructura.

En el complejo mecanismo de un sismo, se tendrá la preocupación de que las fuerzas accidentales no rebasen, en ningún caso, los coeficientes de seguridad indicados en el reglamento.

El propio Reglamento de Construcciones para el D.F., estable:

> *"Dependiendo del tipo de estructura, ésta podrá analizarse por sismo mediante el método simplificado, el método estático o uno de los dinámicos que describan las Normas Técnicas Complementarias."*

El metodo simplificado presenta muchas limitaciones, tales como:

1. La estructura deberá apoyarse un 75% sobre muros de carga ligados entre sí y los sistemas de piso serán rígidos al cortante.
2. La relación entre la longitud y su anchura no será mayor de 2.
3. La altura del edificio no será mayor de 13 m.
4. La relación entre la altura y la base no será mayor de 1.5.

Para el análisis dinámico se deberá incluir el efecto de todos los modos naturales de vibración y el cálculo paso a paso de respuestas a temblores específicos.

El análisis dinámico deberá emplearse cuando la estruc-



tura tenga una altura igual o mayor de 60 m.

Para nuestro ejemplo resulta ideal la aplicación del método estático ya que toma en cuenta todas las posibilidades de deformación con una distribución lineal de aceleraciones.

El reglamento, clasifica las construcciones por su uso, por zona de ubicación y por tipo de estructuración, con el fin de poder aplicarles un adecuado coeficiente sísmico.

El edificio se encuentra ubicado dentro de la zona II (terreno de transición), coeficiente sísmico, c = 0.32 y estructura grupo B que comprende aquellos edificios cuya falla ocasionaría pérdidas de magnitud intermedia

Las construcciones del grupo A, al fallar por sismo causarán pérdidas de dimensiones enormes y las construcciones del grupo C no requieren diseño por sismo.

En la figura 18.74 se muestra la estructura de cuatro niveles (planta baja y tres niveles tipo), sometida a la acción de las fuerzas sísmicas representadas por W_n y h_n que indican las cargas por nivel y sus alturas respectivamente, veamos

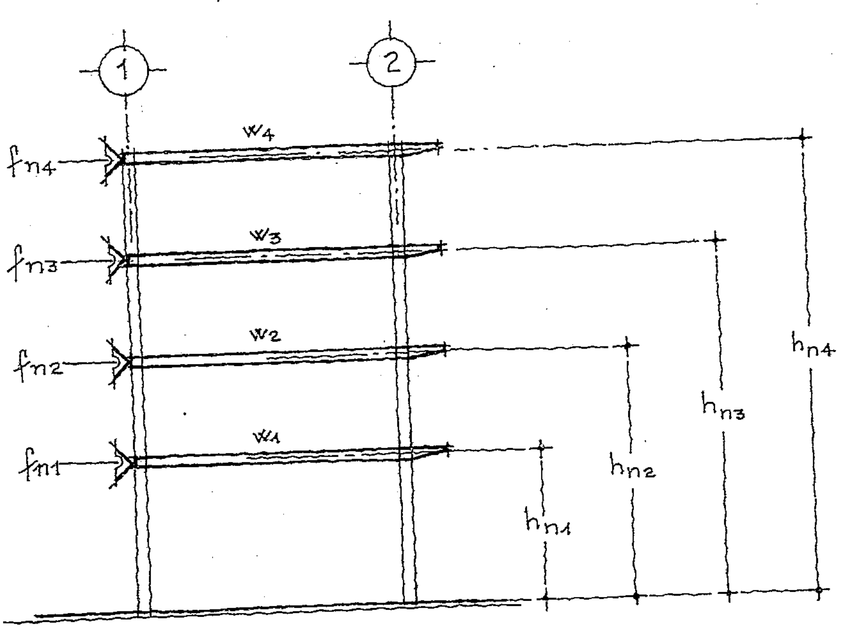


Fig. 18.74. Edificio para oficinas. Estructura de cuatro niveles.

La estructura es a base de columnas de concreto armado y marcos también de concreto reforzado en ambos sentidos.

El reglamento determina para fines de diseño, un factor reductivo o de ductilidad para análisis estático de:

$Q = 4$, cuando se cumplan los requisitos siguientes:

"La resistencia en todos los entrepisos será suministrada exclusivamente por marcos no contraventeados de concreto reforzado, o bien, por marcos contraventeados o muros de concreto reforzado donde en cada entrepiso los marcos sean capaces de resistir, sin contar muros ni contravientos, por lo menos 50% de la fuerza sísmica."

Por tanto,

$$V_{cortante} / W_{peso\ construcción} = c/Q = 0.32/4 = 0.08$$

El reglamento dice:

"El valor de aceleración, a_0, para terrenos de transición no será menor de 0.054."

$$\therefore 0.08 > 0.054 \text{ (correcto)}$$

Obtención del cortante sísmico en cada nivel aplicando la fórmula que dice:

$$f_n = V \frac{w_n h_{nb}}{\Sigma w_n h_{nb}}$$

siendo,

f_n, empuje sísmico en cada nivel.

W, peso total del edificio (suma de cargas muertas y vivas).

w_n, carga en cada nivel.

h_n, altura en cada nivel; h_{nb}, distancia a la base de la construcción.

Σw_n, suma de cargas parciales en cada nivel.

La fórmula se traduce:

El empuje sísmico en cada nivel es igual al cortante sísmico

en el nivel multiplicado por la carga en ese nivel por su distancia a la base, entre la suma de las cargas parciales por sus alturas a la base de la estructura."

Cuadro de cargas sobre la estructura

Nivel	W_n	$c/Q = 0.08$	$V = \Sigma f_n$
4	174.85	174.85x0.08	~ 14.00
3	183.20	183.20x0.08	~ 14.66
2	183.20	183.20x0.08	~ 14.66
1	183.20	183.20x0.08	~ 14.66
p.b.	724.00 ton	x 0.08	~ 57.98

Cortante acumulado V_{total}
14.00
28.66
43.32
57.98
p.b.=57.98 ton

El empuje total se reparte proporcionalmente a la rigidez del nodo, fig. 18.75.

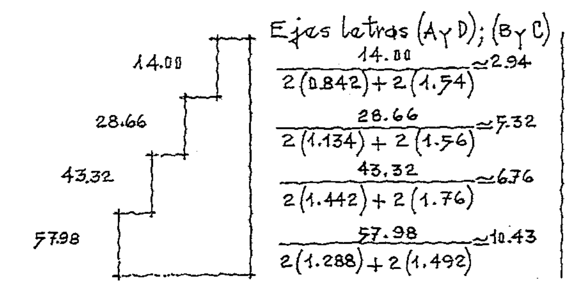


Fig. 18.75. Diagrama de cortantes.

Ejes letras (A y D); (B y C)

$$\frac{14.00}{2(0.842)+2(1.54)} \simeq 2.94$$

$$\frac{28.66}{2(1.134)+2(1.56)} \simeq 5.32$$

$$\frac{43.32}{2(1.442)+2(1.76)} \simeq 6.76$$

$$\frac{57.98}{2(1.288)+2(1.492)} \simeq 10.43$$

Ejes números (1 y 2)

$$\frac{14.00}{2(2.663)} \simeq 2.63$$

$$\frac{28.66}{2(2.417)} \simeq 6.93$$

$$\frac{43.32}{2(2.623)} \simeq 8.26$$

$$\frac{57.98}{2(2.056)} \simeq 14.10$$

Con los valores obtenidos calculamos los esfuerzos cortantes y flexionantes en columnas y trabes de los pórticos, veamos:

1. Esfuerzo cortante en columnas $= \dfrac{V}{\Sigma \text{ rigideces de nodos}} \cdot \text{rigidez de nodo}$

2. Momento flexionante en columnas $= \dfrac{V \cdot \text{altura}}{2}$

3. Momento en vigas $= \Sigma$ de momentos por factor de distribución

4. Cortante en vigas $= \dfrac{\Sigma \text{ de momentos}}{\text{claro}}$

Pórticos 1 y 2, fig. 18.76.

0.50 0.50   0.45 0.55

2.14   4.74   4.88   2.24

2.14   2.37 2.37   2.20 2.68   2.24

2.14 1.07   4.74 2.37   4.88 2.44   2.24 1.12

7.54   15.54   16.38   8.02

7.54   7.77 7.77   7.37 9.01   8.02

5.40 2.70   10.80 5.40   11.50 5.75   5.78 2.89

12.44   24.74   26.22   13.38

12.44   12.37 12.37   11.80 14.42   13.38

7.04 3.52   13.94 6.97   14.72 7.36   7.60 3.80

21.20   41.78   44.43   22.96

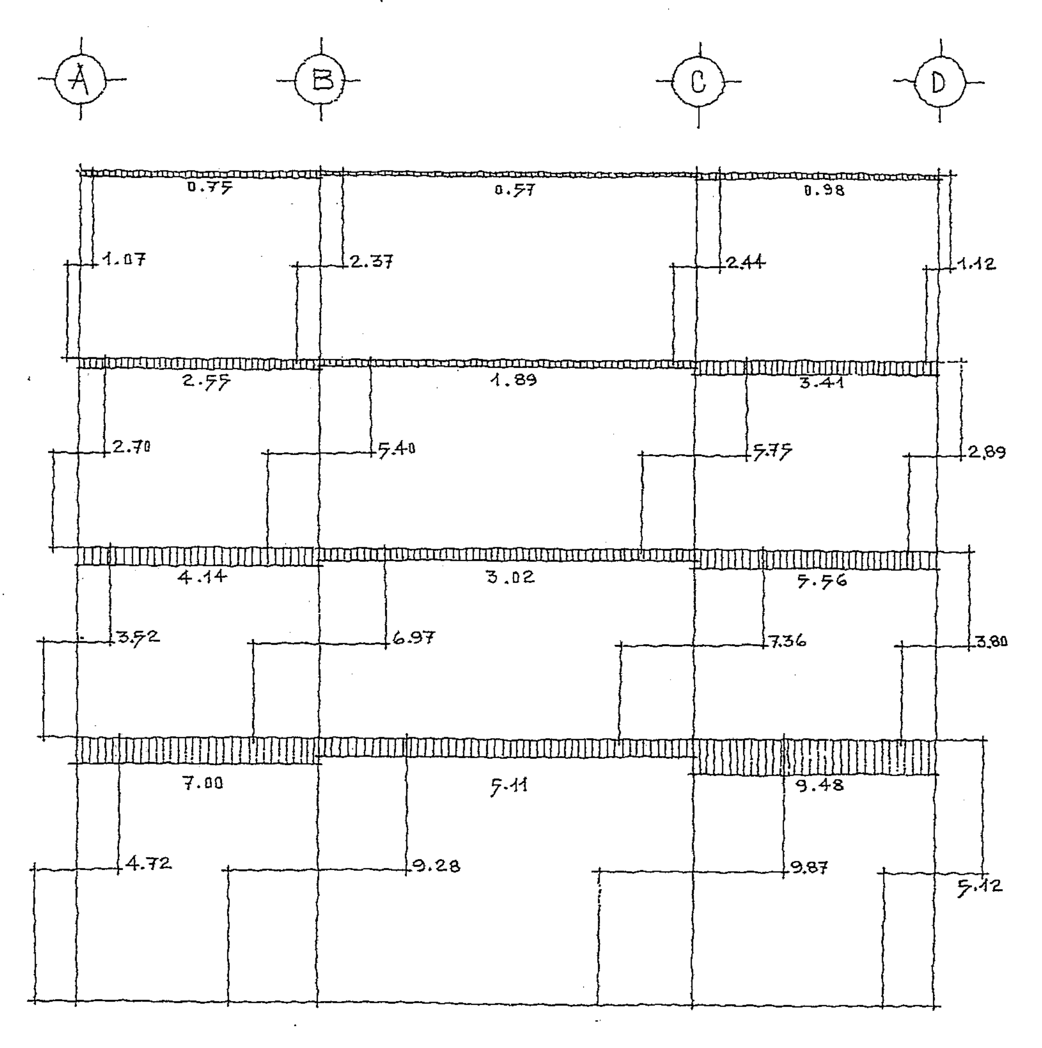
21.20   20.89 20.89   20.00 24.43   22.96

14.16 4.72   27.84 9.28   29.61 9.87   15.36 5.12

Fig. 18.76. Pórticos 1 y 2.

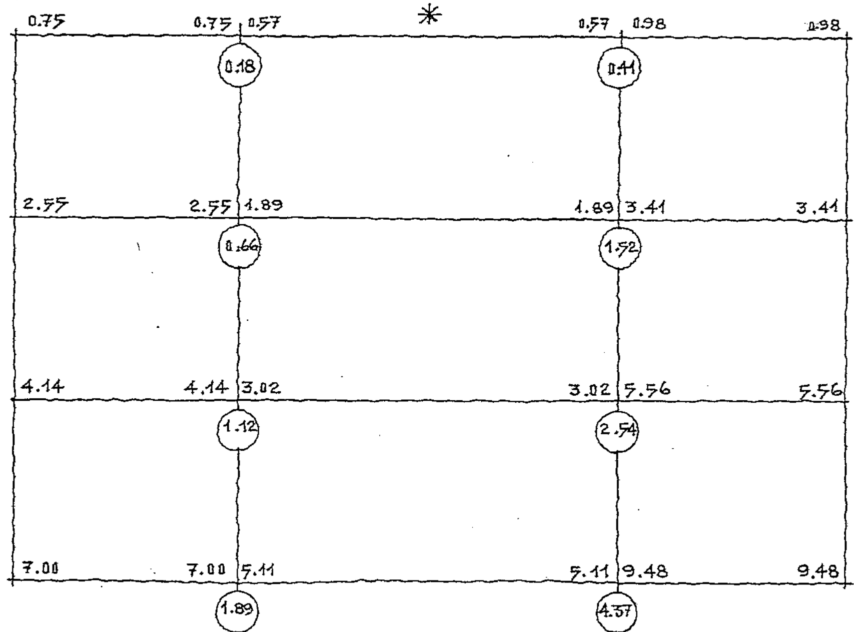
2.63X0.408 = 1.07	2.63X0.900 = 2.37	2.63X0.930 = 2.44	2.63X0.425 = 1.12
2.14	4.74	4.88	2.24
1.07X4÷2 = 2.14	2.37X4÷2 = 4.74	2.44X4÷2 = 4.88	1.12X4÷2 = 2.24
6.93X0.390 = 2.70	6.93X0.780 = 5.40	6.93X0.830 = 5.75	6.93X0.417 = 2.89
7.54	15.54	16.38	8.02
2.70X4÷2 = 5.40	5.40X4÷2 = 10.80	5.75X4÷2 = 11.50	2.89X4÷2 = 5.78
8.26X0.426 = 3.52	8.26X0.844 = 6.97	8.26X0.892 = 7.36	8.26X0.461 = 3.80
12.44	24.74	26.22	13.38
3.52X4÷2 = 7.04	6.97X4÷2 = 13.94	7.36X4÷2 = 14.72	3.80X4÷2 = 7.60
14.10X0.335 = 4.72	14.10X0.658 = 9.28	14.10X0.700 = 9.87	14.10X0.363 = 5.12
21.20	41.78	44.43	22.96
4.72X6÷2 = 14.16	9.28X6÷2 = 27.84	9.87X6÷2 = 29.61	5.12X6÷2 = 15.36

Pórticos 1 y 2 (diagrama de cortantes), fig. 18.77.



...g. 18.77. Cortantes ...n pórticos 1 y 2.

* Incremento en postes.



Pórticos 1 y 2 (diagrama de momentos), fig. 18.78.

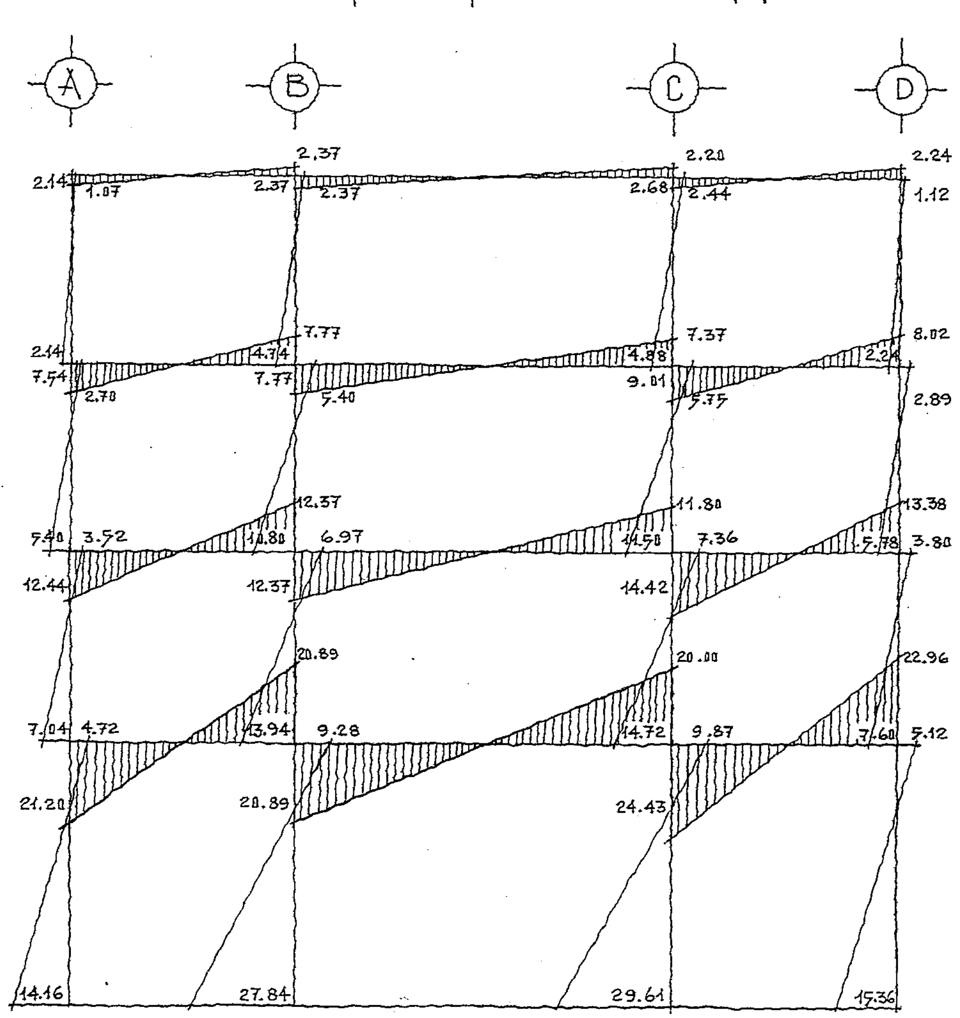
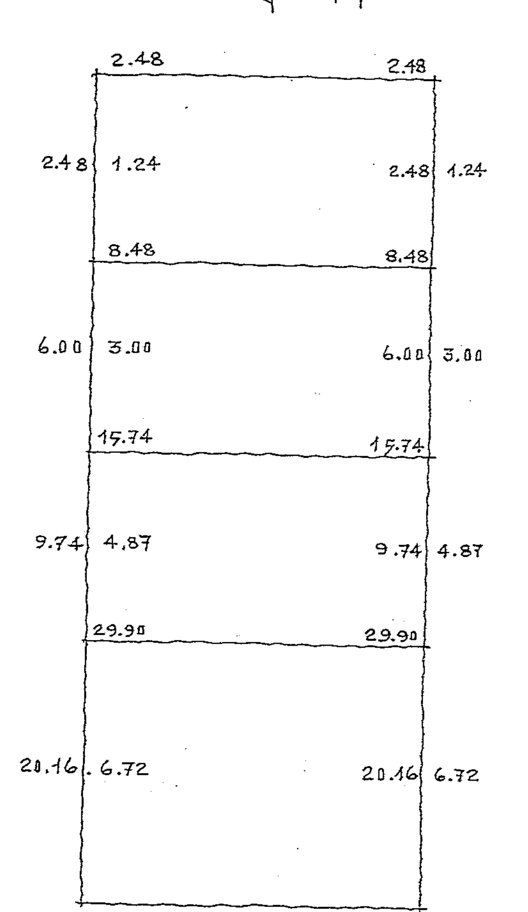
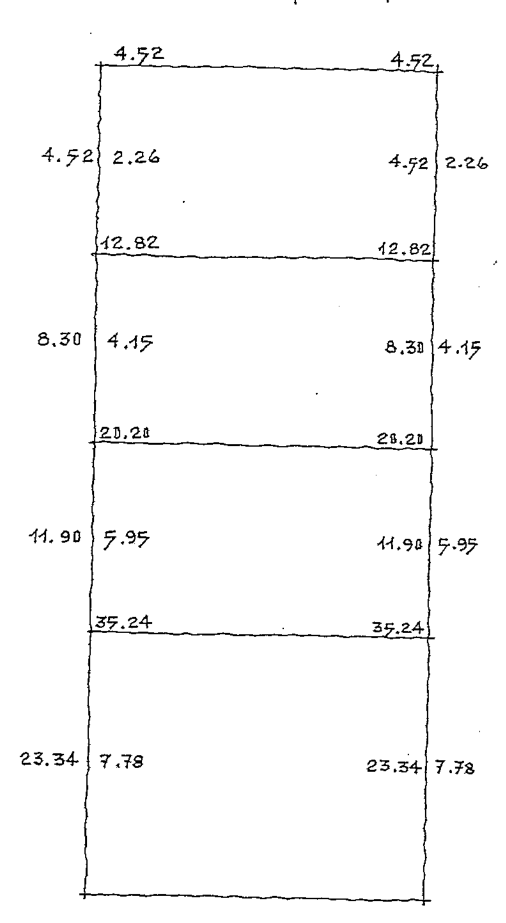


Fig. 18.78. Momentos en pórticos 1 y 2.

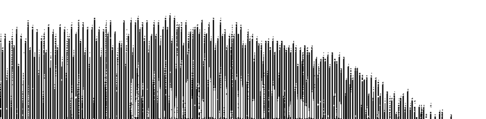
Pórticos A y D, fig. 18.79.



Pórticos B y C, fig. 18.80.



En columnas	En trabes	En columnas	En trabes
$2.94 \times 0.421 = 1.24$	$M = 2.48$	$2.94 \times 0.770 = 2.26$	$M = 4.52$
$1.24 \times 4 \div 2 = \underline{2.48}$	$V = \frac{4.96}{9} = 0.55$	$2.26 \times 4 \div 2 = \underline{4.52}$	$V = \frac{4.52 \times 2}{9} = 1.00$
$5.32 \times 0.567 = 3.00$	$M = 2.48 + 6.00 = 8.48$	$5.32 \times 0.780 = 4.15$	$M = 4.52 + 8.30 = 12.82$
$3.00 \times 4 \div 2 = \underline{6.00}$	$V = \frac{8.48 \times 2}{9} = 1.88$	$4.15 \times 4 \div 2 = \underline{8.30}$	$V = \frac{12.82 \times 2}{9} = 2.85$
$6.76 \times 0.721 = 4.87$	$M = 6.00 + 9.74 = 15.74$	$6.76 \times 0.880 = 5.95$	$M = 8.30 + 11.90 = 20.20$
$4.87 \times 4 \div 2 = \underline{9.74}$	$V = \frac{15.74 \times 2}{9} = 3.50$	$5.95 \times 4 \div 2 = \underline{11.90}$	$V = \frac{20.20 \times 2}{9} = 4.49$
$10.43 \times 0.644 = 6.72$	$M = 9.74 + 20.16 = 29.90$	$10.43 \times 0.746 = 7.78$	$M = 11.90 + 23.34 = 35.24$
$6.72 \times 6 \div 2 = \underline{20.16}$	$V = \frac{29.90 \times 2}{9} = 6.65$	$7.78 \times 6 \div 2 = \underline{23.34}$	$V = \frac{35.24 \times 2}{9} = 7.83$



Pórticos A y D

Diagramas de cortantes y momentos flexionantes, figs. 18.81 y 82.

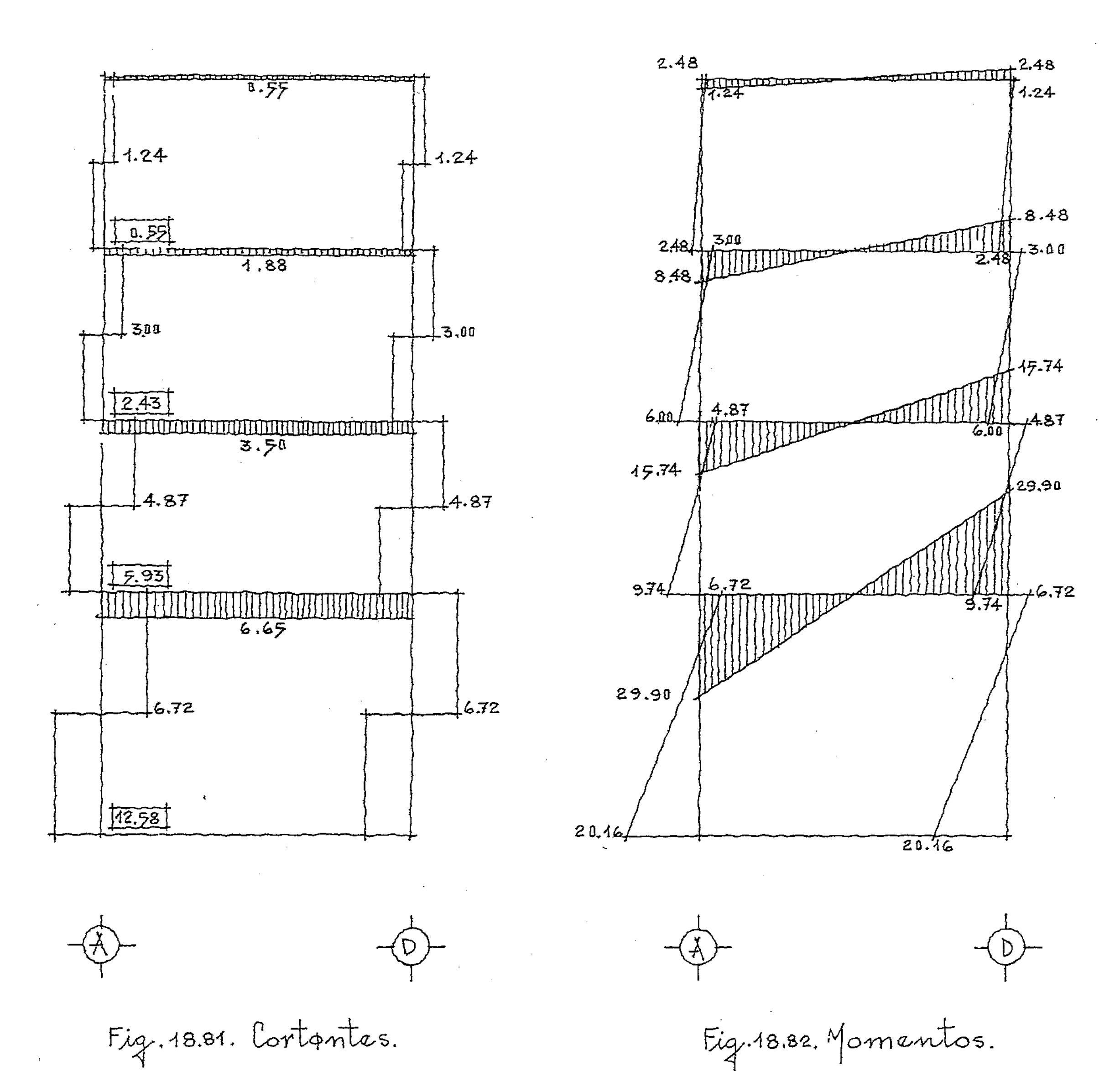


Fig. 18.81. Cortantes.

Fig. 18.82. Momentos.

La cantidad que aparece dentro de los rectángulos indica el incremento en postes.

Pórticos B y C

Diagramas de cortantes y momentos flexionantes, figs. 18.83 y 84.

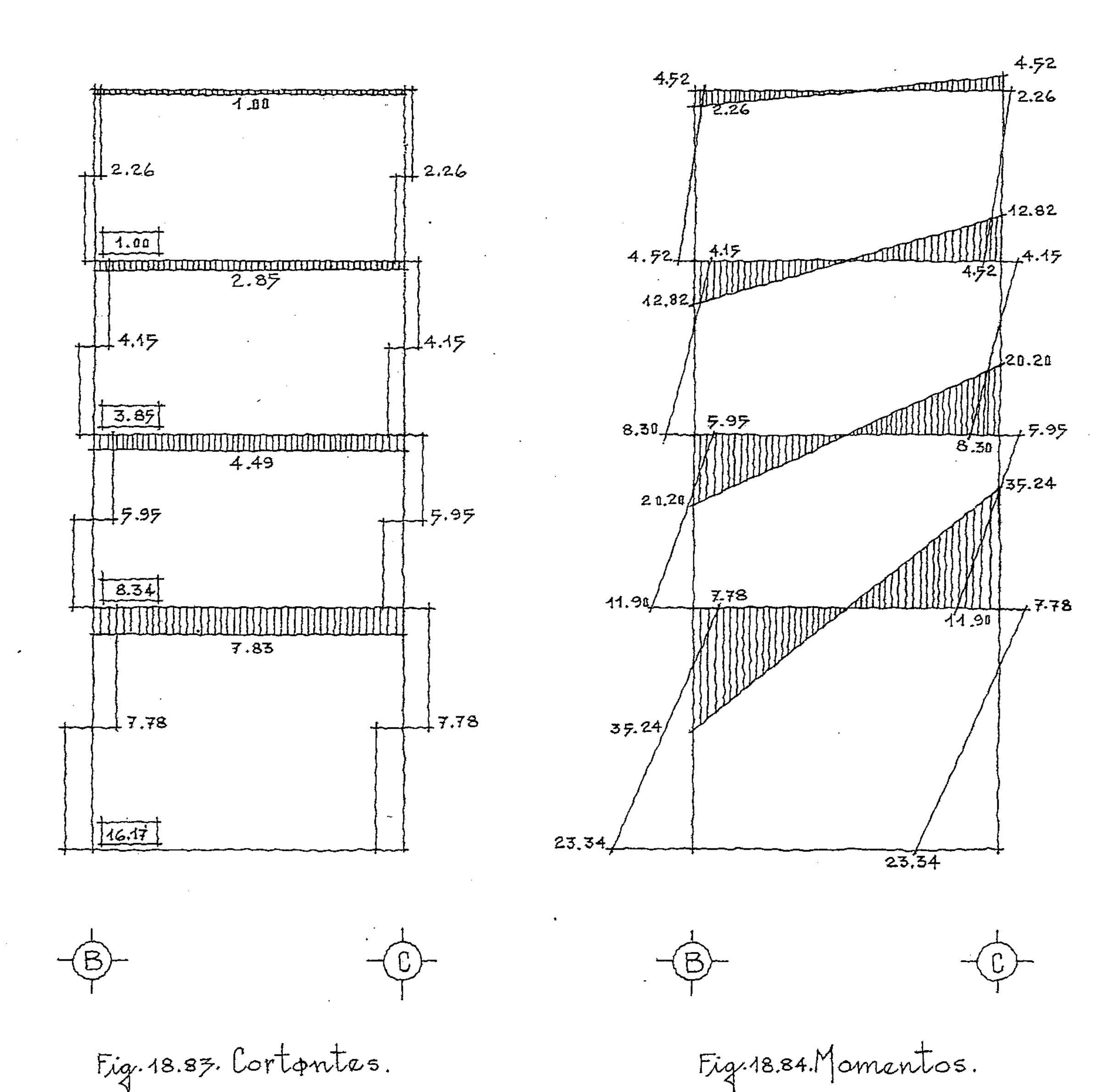
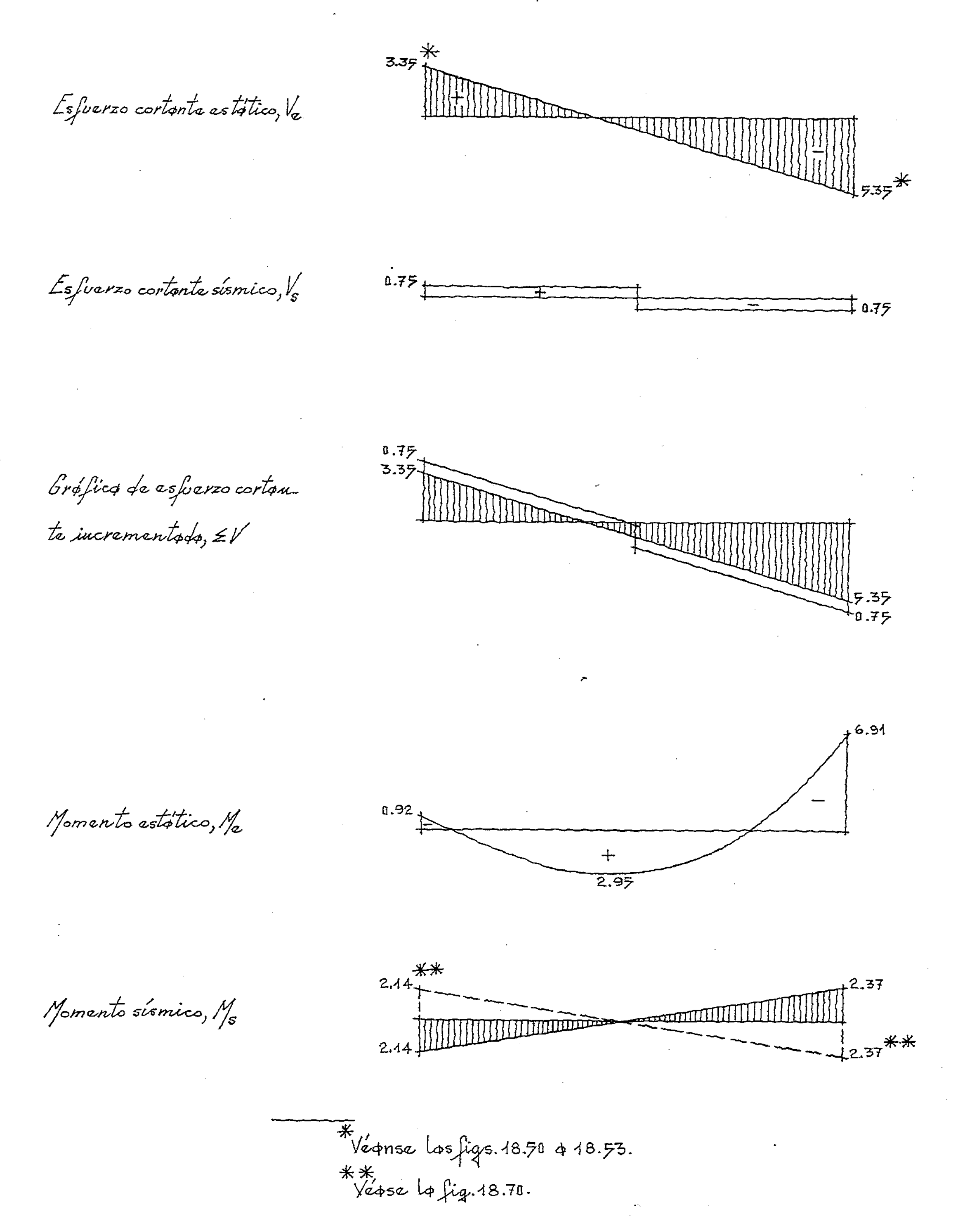


Fig. 18.83. Cortantes.

Fig. 18.84. Momentos.

La cantidad que aparece dentro de los rectángulos indica el incremento en postes.

Para mostrar los efectos del sismo analizamos el tramo A-B, eje 1 nivel 4, figs. 18.85 a 18.89.



---

* Véanse las figs. 18.50 a 18.53.

** Véase la fig. 18.70.

Para el momento, el sismo actúa en forma alternativa en ambos sentidos, por tanto, deberán tomarse en cuenta las condiciones más desfavorables considerando las solicitaciones máximas.

Cuando el momento es negativo se suma con el negativo del apoyo. Si es positivo y es menor disminuye el estático; cuando es mayor, se considera positivo en el apoyo, veamos:

Posibilidad 1, tramo AB

Figs. 18.90 y 91.

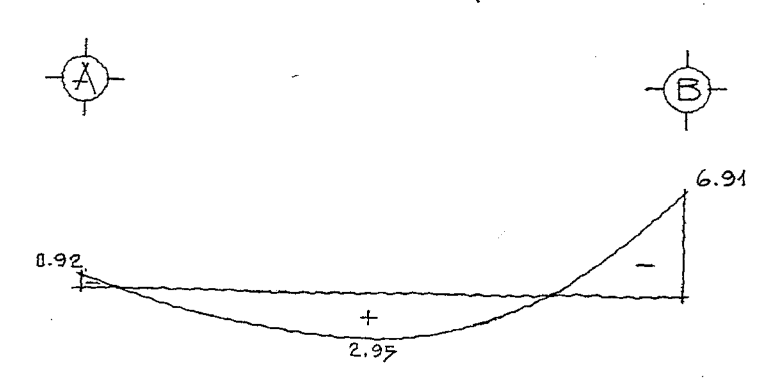


Fig. 18.90. Gráfica del momento estático.

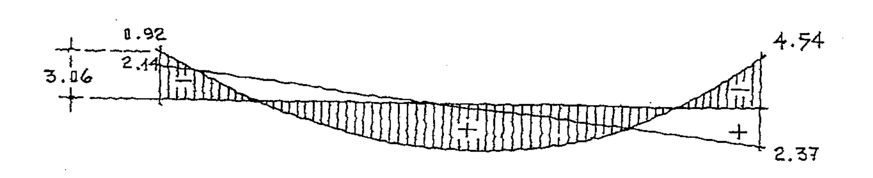


Fig. 18.91. Gráfica de la (±) de momentos.

$$-2.14 - 0.92 = -3.06$$

$$-6.91 + 2.14 = -4.54$$

Posibilidad 2, tramo A-B

Figs. 18.92 y 93

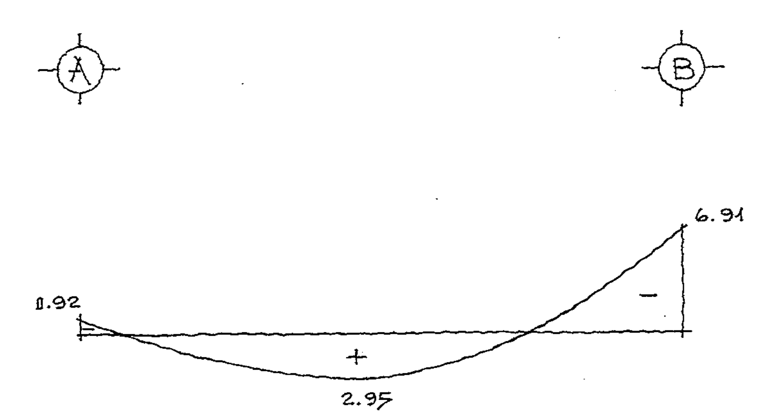


Fig. 18.92. Gráfica del momento estático.

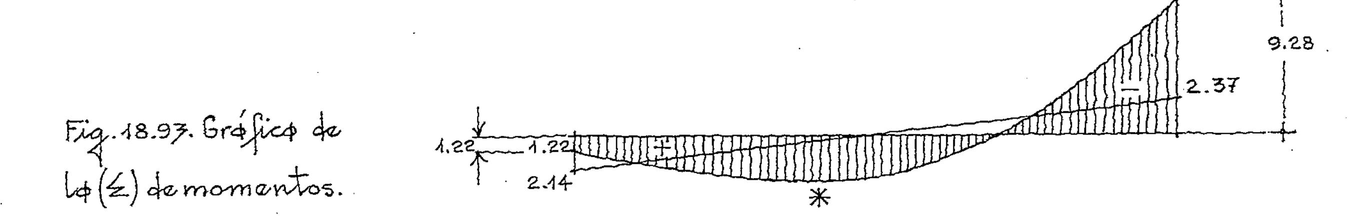


Fig. 18.93. Gráfica de la (Σ) de momentos.

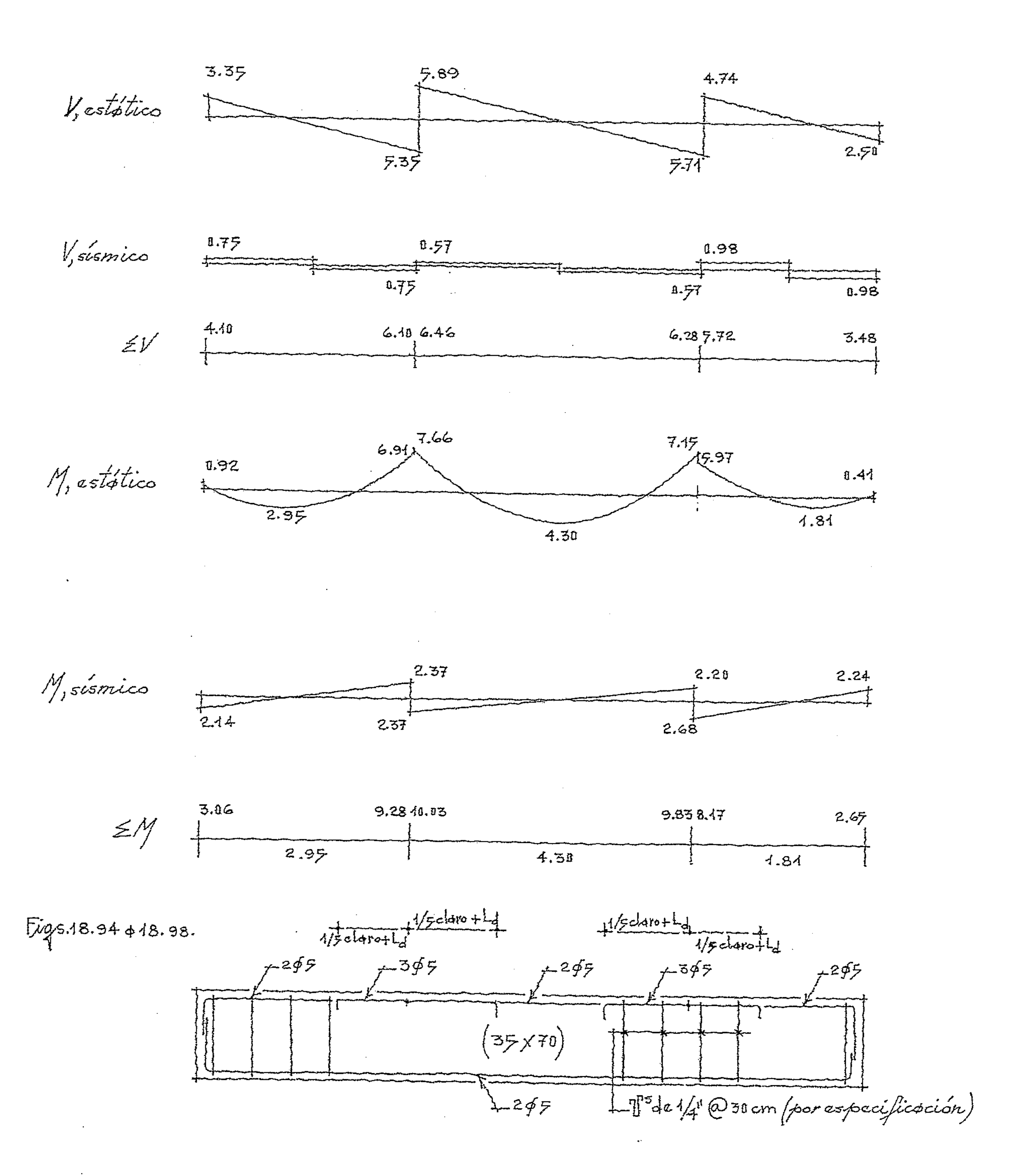
$2.14 - 0.92 = 1.22$

$-6.91 - 2.37 = -9.28$

El momento estático positivo al centro prácticamente no se modifica.

A continuación se analiza la trabe estudiada.

Trabe eje 1 nivel 4, figs. 18.94 a 98.



Sección y armados

Trabe eje 1 nivel 4

Sección propuesta originalmente (35x70)

$M_{máx.} = 10.03 tm = 1003000$ Kgcm

$$\rho_s = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y} = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} \simeq 0.0026$$

Calculo del área de acero

$$A_s = \frac{M_U}{F_R f_Y d(1-0.59\,y)} = \frac{1003000}{0.9 \times 4200 \times 67(1-0.59\,y)}$$

$$y = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c} = 0.0026\,\frac{4200}{250} \simeq 0.044$$

$$A_s = \frac{1003000}{246675} \simeq 4.07\ cm^2;\ con\ \phi\#4 = \frac{4.07}{1.27} \simeq 3\#4$$

Veamos el área de acero mínima por especificación

$$A_{s\,mín.} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_Y}bd = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200}\,35 \times 67 \simeq 6.18^{*} cm^2 \therefore A_s < A_{s\,mín.}$$

$$\therefore con\ \phi\#5 = \frac{6.18}{1.99} \simeq 3\phi5$$

Para los otros momentos las áreas de acero las obtenemos proporcionalmente, veamos:

10.03 . . . 6.18 cm^2

9.83 . . . x $\quad \therefore x \simeq 6.06\ cm^2$

*En toda la viga el acero se colocará por especificación.

Revisión a esfuerzo cortante

$\rho_s = 0.0026 < 1\%$ $\quad \therefore V_{CR} = F_R bd(0.2 + 30\rho_s)\sqrt{f_c^*}$

donde

$$V_{CR} = 0.8 \times 35 \times 67(0.2 + 30 \times 0.0026)\sqrt{0.8 \times 250} \simeq 7374\ Kg < 6460\ Kg$$

La viga no falla a cortante.

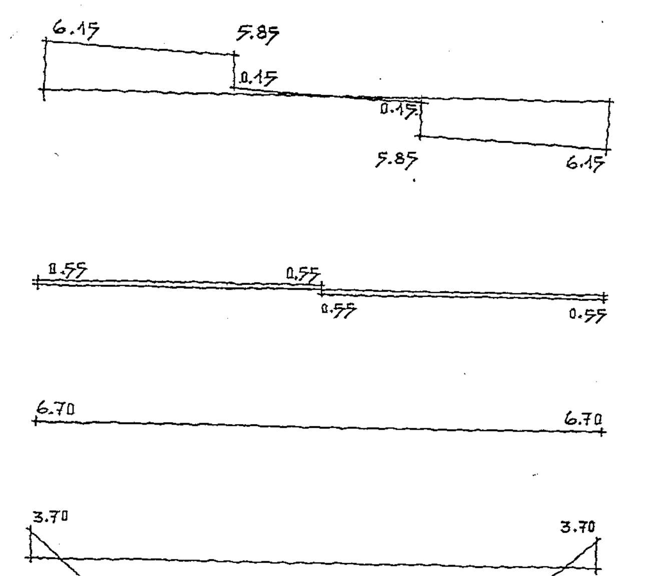
Los estribos se colocarán por especificación:

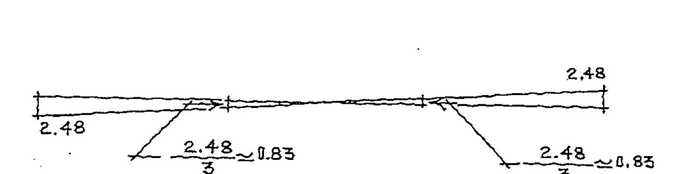
$$Separación = \frac{d}{2} = \frac{67}{2} = 33.5\ cm;$$

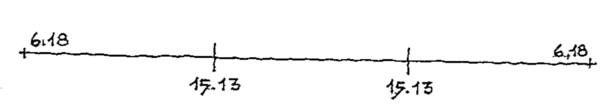
finalmente se dejarán @ 30 cm.

Las otras trabes del eje 1 y eje 2 se analizan y calculan en la misma forma que la estudiada para el eje 1 nivel 4. Se hace ésto, para evitar la repetición de trabes similares.

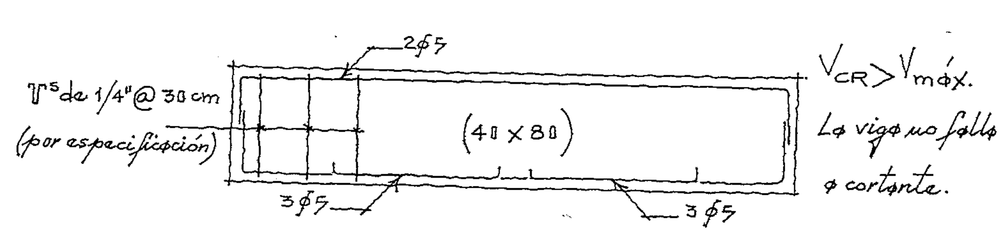
Trabe eje A nivel 4, figs. 18.99 a 103.







Figs. 18.99 a 18.103.



$V_{CR} > V_{máx}$. La viga no falla a cortante.

A continuación se analiza y diseña la columna (B-1 tramo planta baja-nivel 1, eje longitudinal 1, veamos:

En las figs. 18.104 a 106, se muestra en detalle la columna que será analizada.

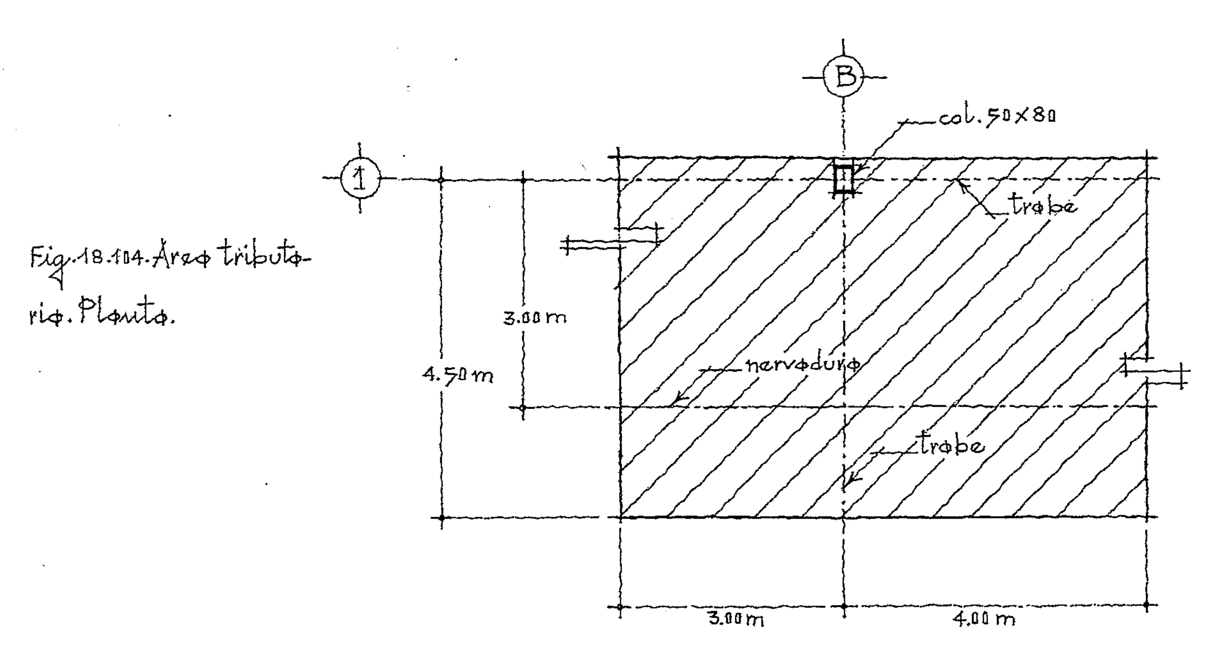
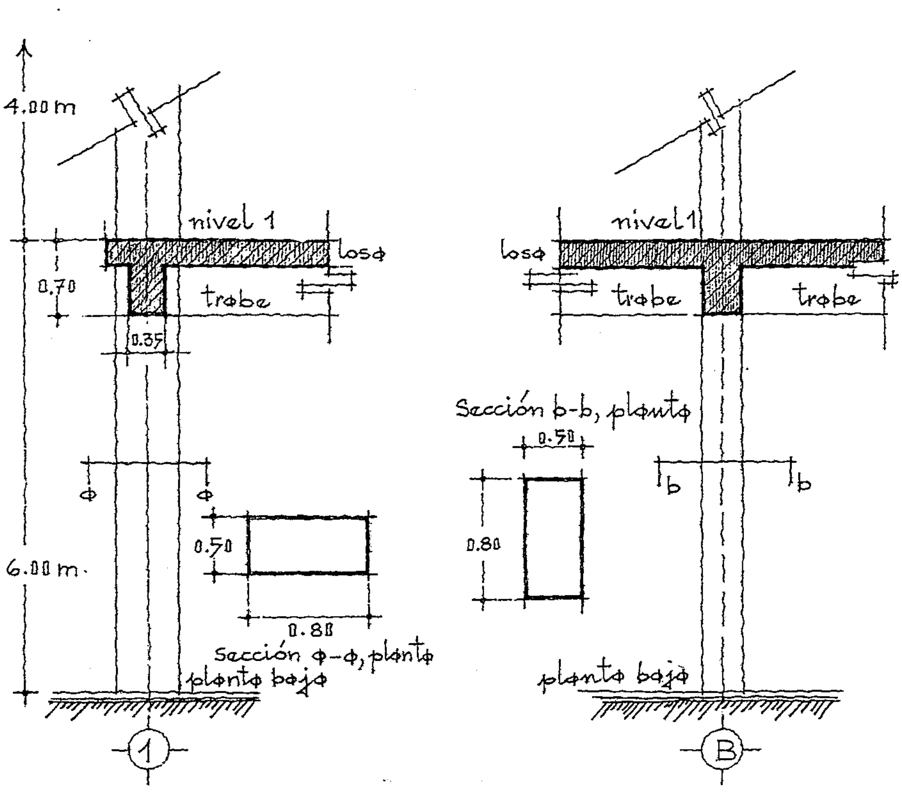


Fig. 18.104. Area tributaria. Planta.



Figs. 18.105 y 106. Detalle de la columna y el nudo en ambos sentidos.

Col. B-1			Gravitacional							Sismo			
nivel	altura	sección	letras	números	peso propio	suma nivel	suma acumul.	M_o letras	M_o números	M_s letras	M_s números	increm. letras	increm. números
4	4.00	50×50	21.49	11.24	2.40	35.13	35.13	s. i. 22.78	s. i. -0.74	2.26 4.52	2.37 4.74	1.00	0.18
3	4.00	50×60	19.06	12.13	2.88	34.07	69.20	s. 10.80 i. 18.26	s. -0.64 i. 0.77	4.15 8.30	5.40 10.80	3.85	0.66
2	4.00	50×70	19.06	12.06	3.36	34.48	103.68	s. 12.52 i. 19.58	s. 0.73 i. 0.86	5.95 11.90	6.97 13.94	8.34	1.12
1	6.00	50×80	19.06	12.07	3.36	36.89	140.57	s. 16.60 i. 16.60	s. 0.89 i. 0.68	7.78 23.34	9.28 27.84	16.17	1.89
p.b.													

Columna B-1, tramo planta baja-niv. 1

Revisar la columna en ambos sentidos

A) Sentido horizontal (x-x)

Obtención de las rigideces en columnas y trabes, fig. 18.107.

$\gamma_{p.b.} = 0$ (empotramiento)

$$\gamma_{niv.1} = \frac{\Sigma K_{cols.}}{\Sigma K_{trabes}} = \frac{1.82 + 1.38}{1.67 + 1.25} = \frac{3.20}{2.92} \simeq 1.096$$

1.82

1.67 — niv.1 — 1.25

1.38

p.b.

Fig. 18.107. Rigideces.

Para obtener el factor de esbeltez o longitud efectiva, véase el nomograma que aparece en las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el D.F. referente a estructuras no contraventeadas:

$$K = 1.16$$

Sección propuesta en columna = 50 × 80 cm

Altura de la columna . . . . . = 6.00 m

A 6.00 m se le resta la altura de la trabe en sentido horizontal

$\therefore$ 6.00 m − 0.70 m = 5.30 m

$\therefore \quad H' = KH = 1.16 \times 5.30 \simeq 615 = 615 \text{ cm}$

Radio de giro $= 0.30 \times 50 = 15$

$\therefore \frac{615}{15} = 41 > 22$ (la columna es esbelta)

B) Sentido vertical (y-y), fig. 18.108.

$\Psi_{p.b.} = 0$ (empotramiento)

$$\Psi_{niv.1} = \frac{1.80 + 1.90}{1.90} = \frac{3.70}{1.90} = 1.947$$

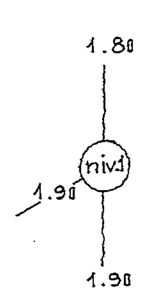


Fig. 18.108. Rigideces.

Haciendo referencia al nomograma ya mencionado, se tiene:

$K = 1.32$

Sección de la columna $= 50 \times 80$

Altura $= 6.00$ m

$\therefore \quad H' = KH = 1.32 \times 5.20 \simeq 6.86 \text{ m} = 686 \text{ cm}$

Radio de giro $= 0.30 \times 80 = 24$

$\therefore \frac{686}{24} \simeq 28.60 > 22$ (la columna es esbelta)

Cálculo de la carga crítica en columna (sentido horizontal)

$$EI = 0.40 \frac{E_c I_g}{(1 + U)} \quad . \quad . \quad .,$$

donde

$$E_c = 14000 \sqrt{f'_c} = 14000 \sqrt{250} \simeq 221300 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{5 \times 8^3}{12} = \frac{2560}{12} \simeq 214 \text{ dm}^4 = 2\,140\,000 \text{ cm}^4$$

$$U = \frac{\text{Máx. momento de diseño por carga muerta}}{\text{Máx. momento por carga total}} \simeq 0.2^{*} \text{(supuesto)}$$

Por tanto

$$EI = 0.40 \frac{221300 \times 2\,140\,000}{(1 + 0.20)} \simeq 1578 \times 10^8$$

$$P_c = F_R \frac{\pi^2 EI}{(H')^2} = 0.50 \frac{3.14^2 \times 1578 \times 10^8}{(615)^2} \simeq 2056 \text{ ton}$$

Obtención del factor de amplificación de momentos

$$F_a = \frac{c_m}{1 - \frac{P_u}{P_c}} \geq 1.0 \quad \therefore \quad \frac{1}{1 - \frac{140.57}{2056}} = \frac{1}{0.93} = 1.075 > 1.0$$

*El valor de "U" va desde 0 hasta 0.40

donde

$$c_m = 1.0 \text{ (para extremos no restringidos)}$$

Referente a la excentricidad de diseño el reglamento especifica:

"La excentricidad de diseño no será menor que la excentricidad calculada más una accidental igual a $0.05h \geq 2$ cm, siendo h la dimensión de la sección donde se considera la flexión."

La excentricidad accidental, e_a, se tomará con su signo más desfavorable.

$$e_a(x\text{-}x) = 0.05h = 0.05 \times 50 = 2.5 \text{ cm}$$

$$M_{u(x\text{-}x)} = 0.89 + 9.28 + 140.57 \times 0.025$$

$$= 13.68 \text{ tm (nivel superior)}$$

$$M_{u(x\text{-}x)} = 0.68 + 27.84 + 140.57 \times 0.025$$

$$= \underline{\underline{32.00}} \text{ tm (nivel inferior)}$$

de igual manera:

$$e_a(y\text{-}y) = 0.05 \times 80 = 4.0 \text{ cm}$$

$$M_{u(y\text{-}y)} = 16.60 + 7.78 + 140.57 \times 0.04$$

$$= 30.00 \text{ tm (nivel superior)}$$

$$M_{u(y\text{-}y)} = 16.60 + 23.34 + 140.57 \times 0.04$$

$$= \underline{\underline{45.56}} \text{ tm (nivel inferior)}$$

Cálculo de la carga crítica en columna (sentido vertical)

$$EI = 0.40 \frac{E_c I_g}{(1+u)}$$

y,

$$E_c = 221300 \text{ Kg/cm}^2$$

---

* Recuérdese que en ambos sentidos las columnas resultaron esbeltas y se deberán considerar los efectos de esbeltez.

$$I_g = \frac{8 \times 5^3}{12} \simeq 84\ dm^4 = 840\,000\ cm^4$$

$$U = 0.20$$

por tanto

$$EI = 0.40\ \frac{221300 \times 840000}{(1+0.20)} \simeq 619 \times 10^8$$

$$P_c = F_R \frac{\pi^2 EI}{(H')^2} = 0.50\ \frac{3.14^2 \times 619 \times 10^8}{(686)^2} \simeq 650\ ton$$

Obtención del factor de amplificación de momentos

$$F_a = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{P_c}} \geq 1.0 \quad \therefore \quad \frac{1.0}{1 - \frac{140.57}{650}} = \frac{1.0}{0.79} \simeq 1.26 > 1.0$$

Cálculo por flexocompresión biaxial.

Aplicamos la ecuación que da el reglamento

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{RX}} + \frac{1}{P_{RY}} - \frac{1}{P_{Ro}}}$$

donde,

P_R, carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades e_x y e_y.

P_{Ro}, carga axial resistente de diseño, suponiendo $e_x = e_y = 0$.

P_{RX}, carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad e_x en un plano de simetría.

P_{RY}, carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad e_y en el otro plano de simetría.

El reglamento también dice:

"La fórmula arriba expuesta es válida cuando $\frac{P_R}{P_{Ro}} \geq 0.1$

Los valores de e_x y e_y deben incluir los efectos de esbeltez y no serán menores que $0.05\,h \geq 2\ cm$."

---

* Para aplastamiento el esfuerzo de diseño $\leq F_R f_c^*$.

Dando valores, se obtiene; fig. 18.109.

$$P_{Ro} = 35\%(0.85 f'_c)A_c + 40\% A_s f_Y$$

$$= 0.35(0.85\times250)50\times80 = 297500\ Kg. \quad .Concreto$$

$$+\ 0.40\times50.70\times4200 = 85000\ Kg. \quad .Acero$$

$$\therefore P_{Ro} = 382500\ Kg = 382.5\ ton$$

$A_s = 10\phi\frac{1}{2}8 = 10\times5.07 = 50.7\ cm^2$

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} = \frac{50.7\ cm^2}{4000\ cm^2} \simeq 0.0127$$

$\rho_s > 1\%$ (correcto)

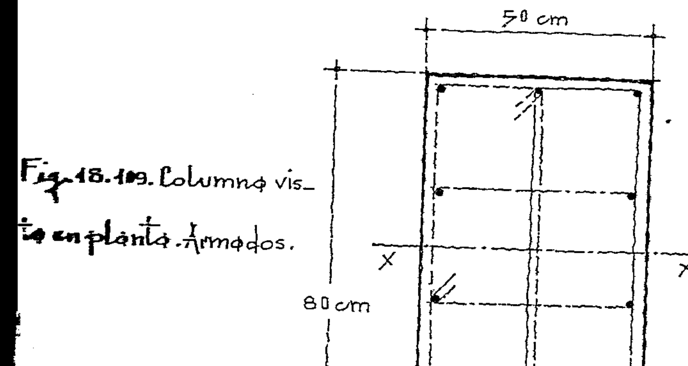


Fig. 18.109. Columna vista en planta. Armados.

En las figs. 18.110 a 112, se muestran los momentos resistentes para flexocompresión, veamos:

$$f_c = 0.35(0.85 f'_c) = 0.35(0.85\times250) \simeq 74.4\ Kg/cm^2$$

$$f_s(2n) = 2n(0.4 f_Y)$$

$$\therefore f_s = 0.4\times4200 = 1680\ Kg/cm^2$$

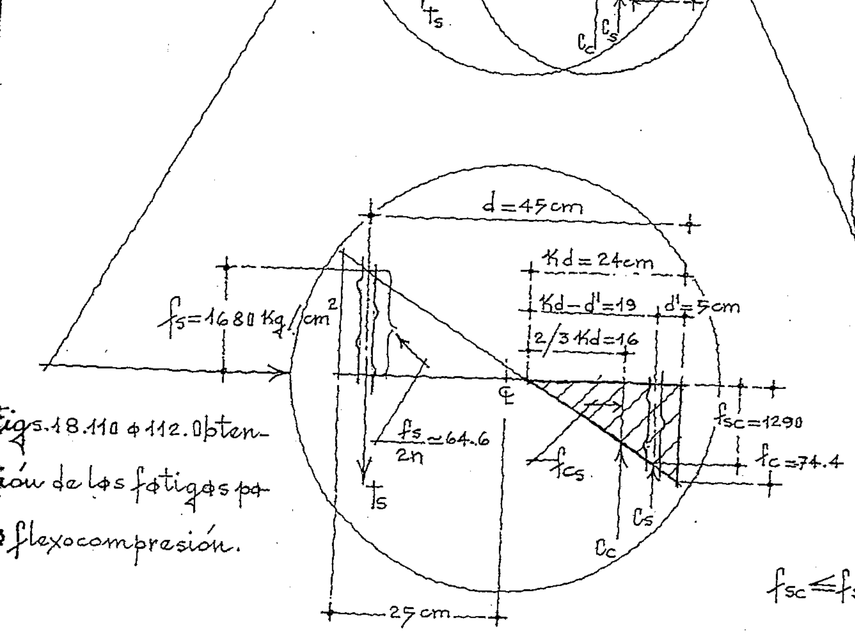
Obtención de Kd

Por comparación de triángulos

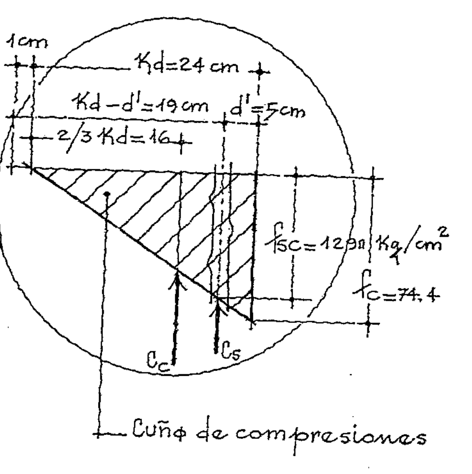
$$\frac{Kd}{d} = \frac{f_c}{f_c + \frac{f_s}{2n}} \therefore Kd = \frac{d f_c}{74.4+64.6}$$

$$\frac{f_s}{2\times13} = \frac{1680}{26} \simeq 64.6\ Kg/cm^2$$

$$Kd = \frac{45\times74.4}{139} \simeq 24\ cm$$



Figs. 18.110 a 112. Obtención de las fatigas para flexocompresión.



$$\frac{74.4}{f_{cs}} = \frac{24}{16} \therefore f_{cs} = \frac{1190.4}{24} = 49.6$$

$$f_{sc} \leq f_s = 2n f_{cs} = 2\times13\times49.6 \simeq 1290\ Kg/cm^2$$

En la fig. 18.113 se aprecia claramente la ubicación de las fuerzas C_c, C_s y T_s respecto al eje neutro:

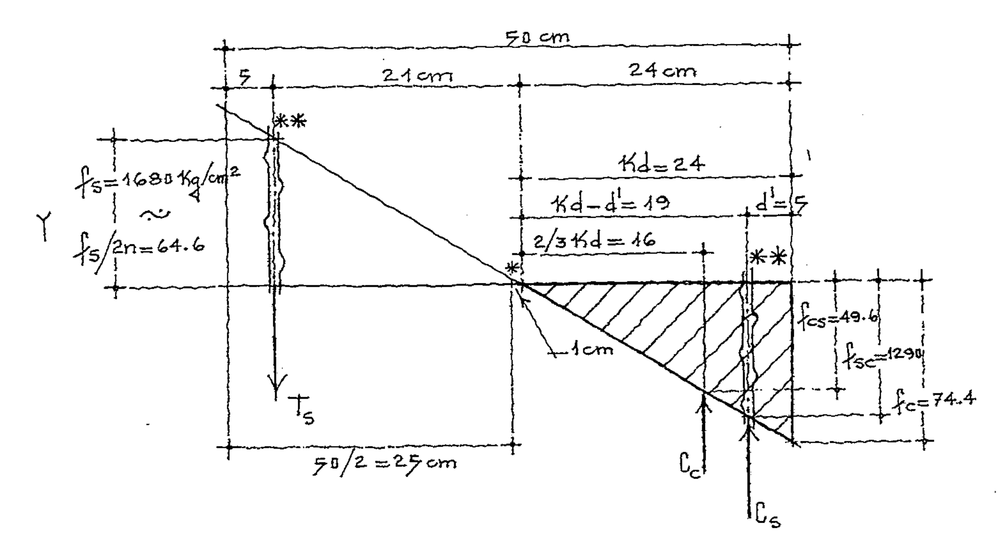


Fig. 18.113. Resultante de fuerzas.

Momento resistente de diseño en flexocompresión (sentido x-x) con respecto al eje neutro

$$M_{RX} = C_c jd + C_s jd + T_s jd$$

$$C_c jd = \frac{1}{2} f_c b\, Kd\, jd = 0.5 \times 74.4 \times 50 \times 24 \times 16$$

$$\therefore C_c \simeq 714300 \text{ Kg cm}$$

$$C_s jd = A_s f_{sc} jd \quad = 20.28 \times 1290 \times 19$$

$$\therefore C_s \simeq 497000 \text{ Kg cm}$$

$$T_s jd = A_s f_s jd \quad = 20.28 \times 1680 \times 21$$

$$\therefore T_s \simeq 715500 \text{ Kg cm}$$

$$M_{RX} = 1926800 \text{ Kg cm}$$

---

* Las dos varillas que se encuentran en el centro de la columna respecto al eje x-x, no se tomaron en cuenta ya que prácticamente no aportan ninguna resistencia por encontrarse cerca del eje neutro.

** Se tomaron cuatro varillas. $\therefore 4 \times 5.07 = 20.28$ cm²

A continuación se analiza la columna en el sentido Y-Y; fig. 18.114.

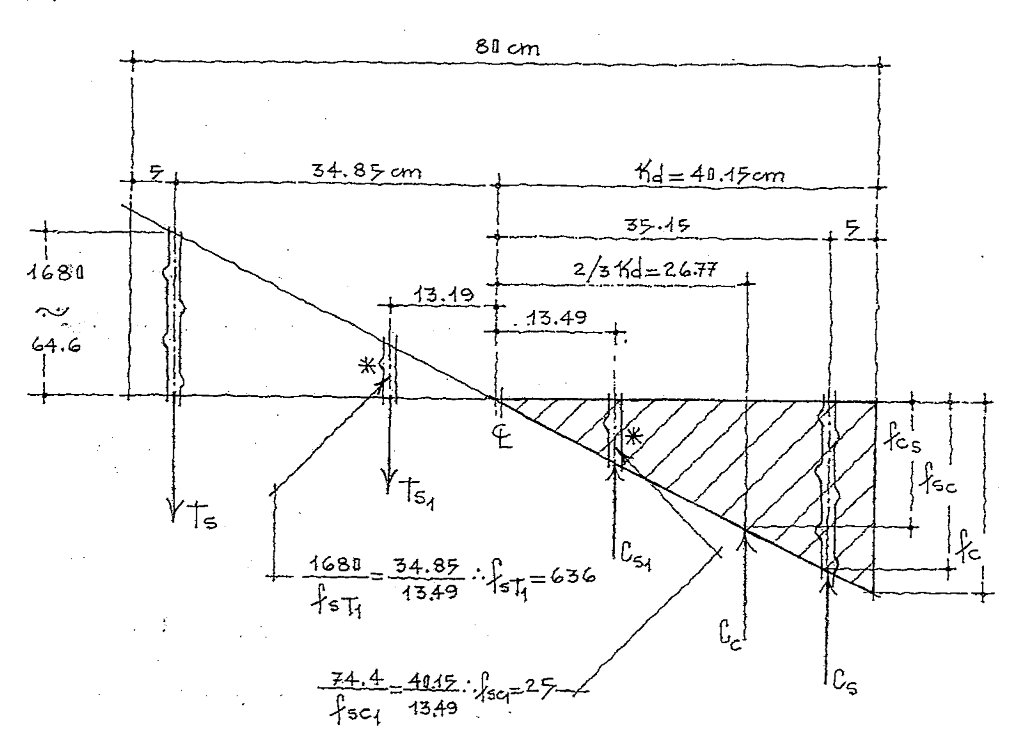


Fig. 18.114. Resultante de fuerzas.

Momento resistente de diseño en flexocompresión (sentido Y-Y) con respecto al plano neutro

$$M_{RY} = C_c jd + C_s jd + T_s jd + C_{s1} + T_{s1}$$

$$C_c\,(jd) = 0.5 \times 74.4 \times 80 \times 40.15 \times 26.77 \simeq 3\,198\,650 \text{ Kg cm}$$

$$C_s\,(jd) = A_s f_s jd = 3 \times 5.07 \times 1290 \times 35.15 \simeq 689\,700 \text{ Kg cm}$$

$$C_{s1}\,(13.49) = A_s f_s\,(13.49) = 2 \times 5.07 \times 650 \times 13.49 \simeq 88\,900 \text{ Kg cm}$$

$$T_s\,(jd) = A_s f_s jd = 3 \times 5.07 \times 1680 \times 34.85 \simeq 890\,500 \text{ Kg cm}$$

$$T_{s1}\,(13.19) = A_s f_s\,(13.19) = 2 \times 5.07 \times 636 \times 13.19 \simeq 85\,000 \text{ Kg cm}$$

$$M_{RY} = 4\,952\,750 \text{ Kg cm}$$

---

* Las cuatro varillas que se encuentran en la parte central del lado largo de la columna, aportan una resistencia a flexocompresión muy reducida, no obstante, se consideraron.

Obtención de la carga de diseño aplicando la excentricidad correspondiente en ambos sentidos, en dirección (X-X).

Al respecto el Reglamento de Construcciones para el D.F., dice:

"Cuando el momento en el otro sentido sea significativo, se sumará el 30% de los efectos que produce el otro".

Veamos:

$$M_{u(Y-Y)} = 45.56\,tm \;\therefore\; 0.30 \times 45.56 \simeq 13.67\,tm$$

Aplicando el factor de amplificación de momentos en ambos sentidos, se tiene finalmente

Sentido horizontal, $F_a = 1.075$

Sentido vertical, $F_a = 1.26$

$$M_{u(X-X)} = 32.00\,tm\,(F_a) = 32.00 \times 1.075 = 34.40\,tm$$

$$e_X = \frac{34.40}{140.57} \simeq 0.245\,m$$

$$M_{u(Y-Y)} = 45.56\,tm\,(F_a) = 45.56 \times 1.26 = 57.4\,(0.30) = 17.22\,tm$$

$$e_Y = \frac{17.22}{140.57} \simeq 0.123\,m$$

Por tanto,

$$P_{RX} = \frac{1\,926\,800\ Kgcm}{24.5\ cm} = 78645\ Kg \simeq 78.6\,ton$$

$$P_{RY} = \frac{4\,952\,750\ Kgcm}{12.3\ cm} = 402662\ Kg \simeq 402.6\,ton$$

Flexocompresión biaxial

$$P_R = \frac{1}{1/P_{RX} + 1/P_{RY} - 1/P_{Ro}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{78.6} + \frac{1}{402.6} - \frac{1}{382.5}}$$

$$\frac{1}{0.0127 + 0.00248 - 0.0026} \simeq \frac{1}{0.0126} \simeq 79.4\,ton$$

$$\frac{P_R}{P_{Ro}} = \frac{79.4}{382.5} \simeq 0.21 > 0.1$$

La ecuación es válida.

Obtención de la carga de diseño en dirección (Y-Y).

$$M_U(X-X) = 32.00\,tm \quad \therefore \quad 0.30 \times 32.00 = 9.6\,tm$$

Aplicando el factor, F_a, por efecto de esbeltez

$$M_U(Y-Y) = 45.56\,tm \times 1.26 = 57.4\,tm$$

$$e_Y = \frac{57.4}{140.57} \simeq 0.41\,m = 41\,cm$$

$$M_U(X-X) = 32.00 \times 1.075\,(0.30) = 10.32\,tm$$

$$e_X = \frac{10.32}{140.57} \simeq 0.073\,m = 7.3\,cm$$

Por tanto,

$$P_{RX} = \frac{1\,926\,800\ Kgcm}{7.3\,cm} \simeq 263\,900\ Kg = 263.9\ ton$$

$$P_{RY} = \frac{4\,952\,750\ Kgcm}{41\,cm} \simeq 120\,800\ Kg = 120.8\ ton$$

Flexocompresión biaxial

$$P_R = \frac{1}{1/P_{RX} + 1/P_{RY} - 1/P_{Ro}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{263.9} + \frac{1}{120.8} - \frac{1}{382.5}}$$

$$= \frac{1}{0.00378 + 0.00828 - 0.0026} = \frac{1}{0.012 - 0.0026}$$

$$= \frac{1}{0.00945} \simeq 105.8\ ton$$

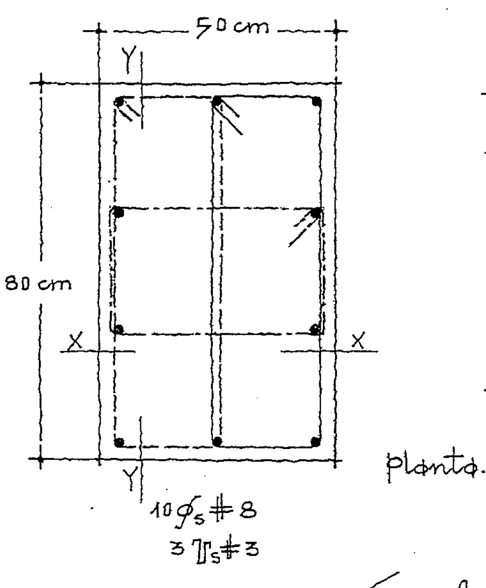
$$\frac{P_R}{P_{Ro}} = \frac{105.8}{382.5} \simeq 0.277 > 0.1$$

La ecuación es válida.

En ambos sentidos la columna resiste ampliamente las cargas gravitacionales y los momentos sísmicos producidos por las excentricidades e_X y e_Y.

En caso de falla, se puede aumentar la sección de la columna, el área de acero o ambas cosas.

En las figs. 18.115 a 118, se muestran los armados en la Col. B-1 tramo planta baja-nivel 1:



80 cm

50 cm

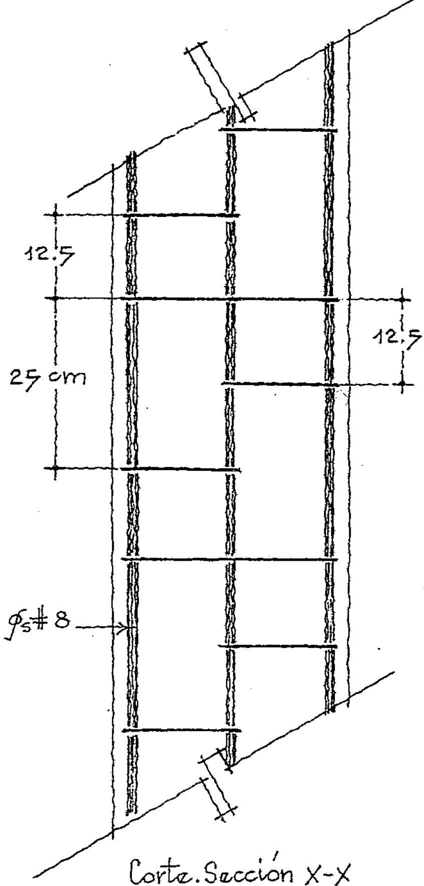
planta.

Sección Y-Y

Es #3
@12.5
y
@25

10 #8
3 Es #3

Figs. 18.115 a 118. Armados de la columna vista en planta y cortes.



Corte. Sección X-X

todas las barras longitudinales estarán restringidas contra el pandeo por medio de estribos a la separación menor de las tres especificaciones siguientes:

a) 48 veces el diámetro del estribo $= 48 \times 0.95 = 46$

b) $\frac{850}{\sqrt{4200}} 2.54 \simeq 33$ cm

c) A la mitad de la menor dimensión de la columna $\therefore \frac{50 \text{ cm}}{2} = 25$ cm

El diámetro menor del estribo será de 3/8".

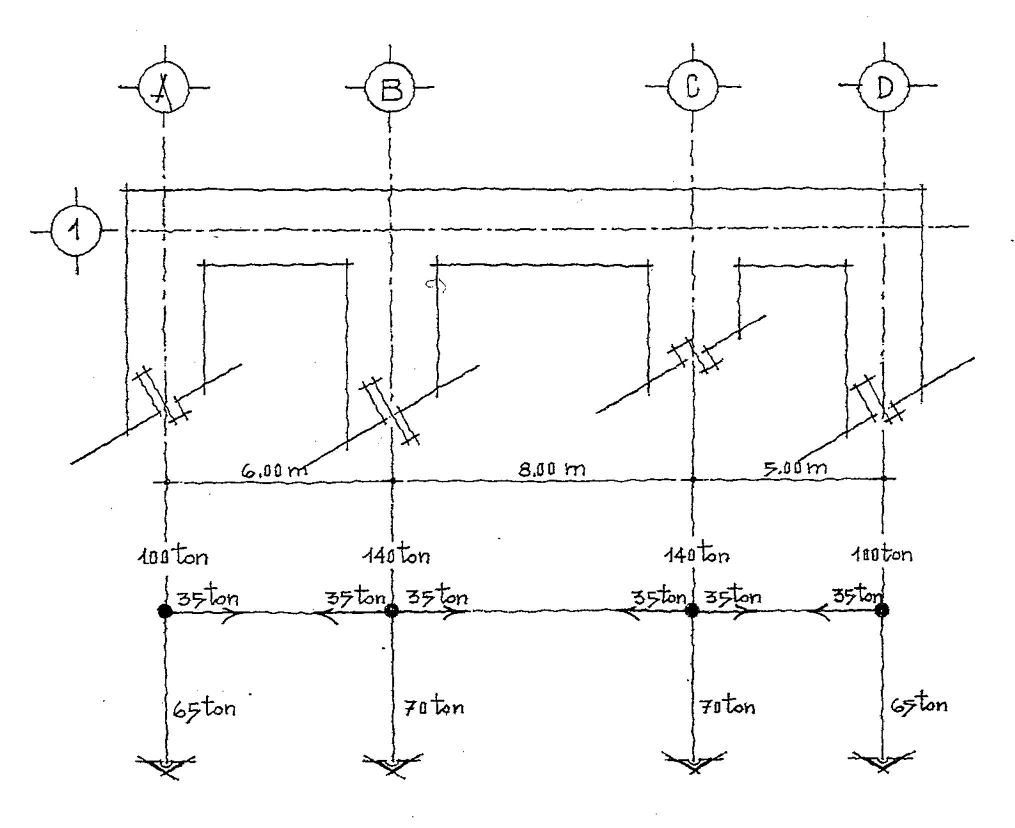
Cimentación

En nuestro ejemplo se consideró un terreno de transición (zona II), de buena calidad, por tanto, le suponemos una resistencia de 7.35 ton/m².

La reacción del terreno supuesta, deberá confirmarse tomando en cuenta su ubicación en la zona, tipo de cimentación en los edificios vecinos y, de requerirse, hacer un estudio de mecánica del suelo.

La cimentación se supone corrida en ambos sentidos, distribuyendo las cargas de tal forma que sus anchos resulten lo más uniforme posible. Esta distribución se consideró adecuada, pero pueden adoptarse otras igualmente válidas.

En las figs. 18.119 y 120, se presenta la distribución de las cargas sobre la cimentación a nivel de desplante.



Figs. 18.119 y 120. Planta de la cimentación propuesta y cargas distribuidas.

Al final del libro se encuentra un formulario y diagramas para el cálculo de vigas bajo diferentes condiciones de carga. Aplicando dicho formulario obtenemos; figs. 18.121 a 124.

Figs. 18.121 a 124.

Nota: Las reacciones se obtienen multiplicando los coeficientes indicados con wl.

$\frac{70 \text{ ton}}{6 \text{ m}} \simeq 11.67$ tm $\frac{70 \text{ ton}}{8 \text{ m}} = 8.75$ tm $\frac{70 \text{ ton}}{5 \text{ m}} = 14$ tm

$\frac{4}{10}$ $\frac{11}{10}$ $\frac{11}{10}$ $\frac{4}{10}$

$\frac{4}{10}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{6}{10}$

$\frac{6}{10}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{4}{10}$

Nota: Los esfuerzos cortantes se obtienen multiplicando los coeficientes indicados con wl.

V.

0.4wl = 0.4x11.67x6 28

0.5wl = 0.5x8.75x8 35

0.6wl = 0.6x14x5 42

3.60 m $\frac{4}{10}$ l 2.40 m

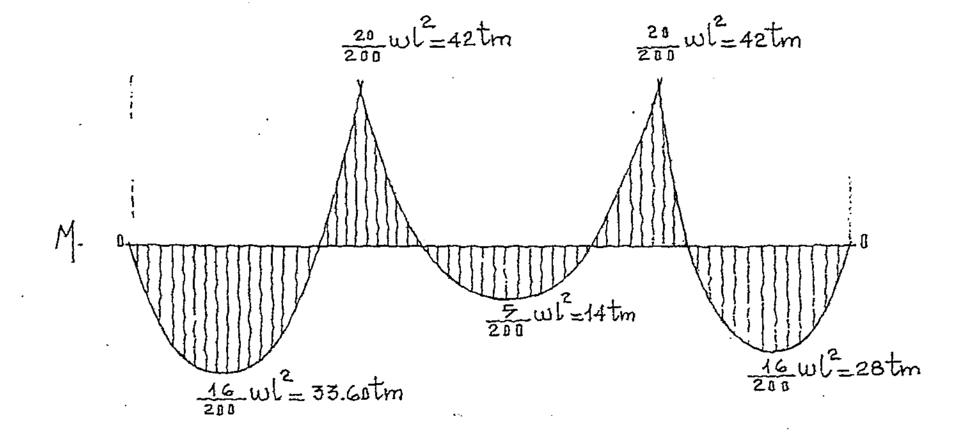
$\frac{4}{10}$ l 2.00 m 3.00 m

42 ton 0.6wl = 0.6x11.67x6

35 0.5wl = 0.5x8.75x8

28 0.4x14x5

Nota: Los momentos flexionantes se obtienen multiplicando los coeficientes con wl^2.



Cálculo del momento flexionante en la zapata figs. 18.125 y 126.

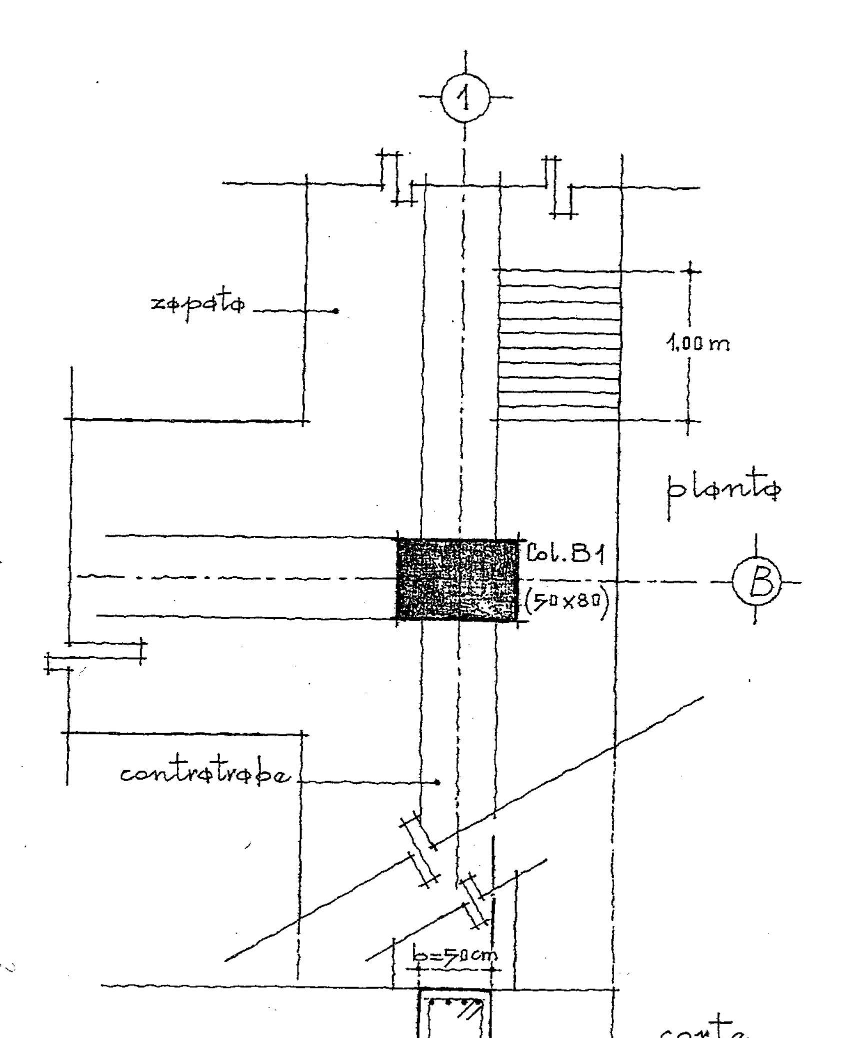


Fig. 18.125. Zapata y contratrabe vista en planta.

Fig. 18.126. Zapata y contratrabe. Corte transversal.

$$M_u = \frac{R_n \cdot x^2}{2} = \frac{6620 \times 0.80^2}{2} \simeq 2120 \text{ Kgm} = 212000 \text{ Kgcm}$$

Porcentaje de acero

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{14}{f_Y} = \frac{14}{4200} = 0.0033$$

Suponemos un porcentaje de: $\rho_s = 1.2\,\% = 0.012$

Peralte por flexión

$$y = p_s \frac{f_y}{f'_c} = 0.012 \frac{4200}{250} \simeq 0.20$$

$$\therefore d^2 = \frac{M_u}{F_R\, b f'_c y (1 - 0.59 y)} = \frac{212\,000}{0.9 \times 100 \times 250 \times 0.20 (0.882)}$$

$$d = \sqrt{53.42} \simeq 7.30 \text{ cm}$$

*El peralte efectivo mínimo será de 10 cm y h = 15 cm mínimo.**

Revisión del peralte por cortante, figs. 18.127 y 128.

Fig. 18.127. Corte transversal indicando el plano crítico para esfuerzo cortante.

Fig. 18.128. Planta de la zapata mostrando el plano crítico.

$$Area = 0.725 \times 1.00 = 0.725 \text{ m}^2$$

$$\therefore V_u = R_n \cdot A = 6.62 \times 0.725 \simeq 4.8 \text{ ton}$$

$$\therefore V_u = 4800 \text{ Kg}$$

$$v_{u\,adm.} \leq F_R \sqrt{f_c^*} \quad \cdots \quad y$$

$$v_u = 0.70 \sqrt{0.8 \times 250} \simeq 9.90 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore d_v = \frac{V_u}{F_R\, b\, v_{u\,adm.}}$$

$$= \frac{4800}{0.7 \times 100 \times 9.90} \simeq 7 \text{ cm}$$

por tanto,

$$7 \text{ cm} < d_{mín.}$$

El reglamento de construcción dice al respecto:

"El espesor mínimo en el borde de la zapata será de 15 cm".

* El autor aconseja para estos casos, dejar:

$$d = 15 \text{ cm} \quad y \quad h = 20 \text{ cm}$$

Cálculo del área de acero, figs. 18.129 a 131.

$$A_s = \rho_s bd = 0.012 \times 100 \times 15 = 18\ cm^2$$

$$\text{con}\ \phi_s\#5 = \frac{18\ cm^2}{1.99\ cm^2} = 9\ \phi_s\#5$$

$$\text{Separación} = \frac{100}{9} = 11\ cm$$

Acero por temperatura

$$A_{s\,mín.} = 0.2\%\ bd = 0.002 \times 100 \times 15 = 3.0\ cm^2$$

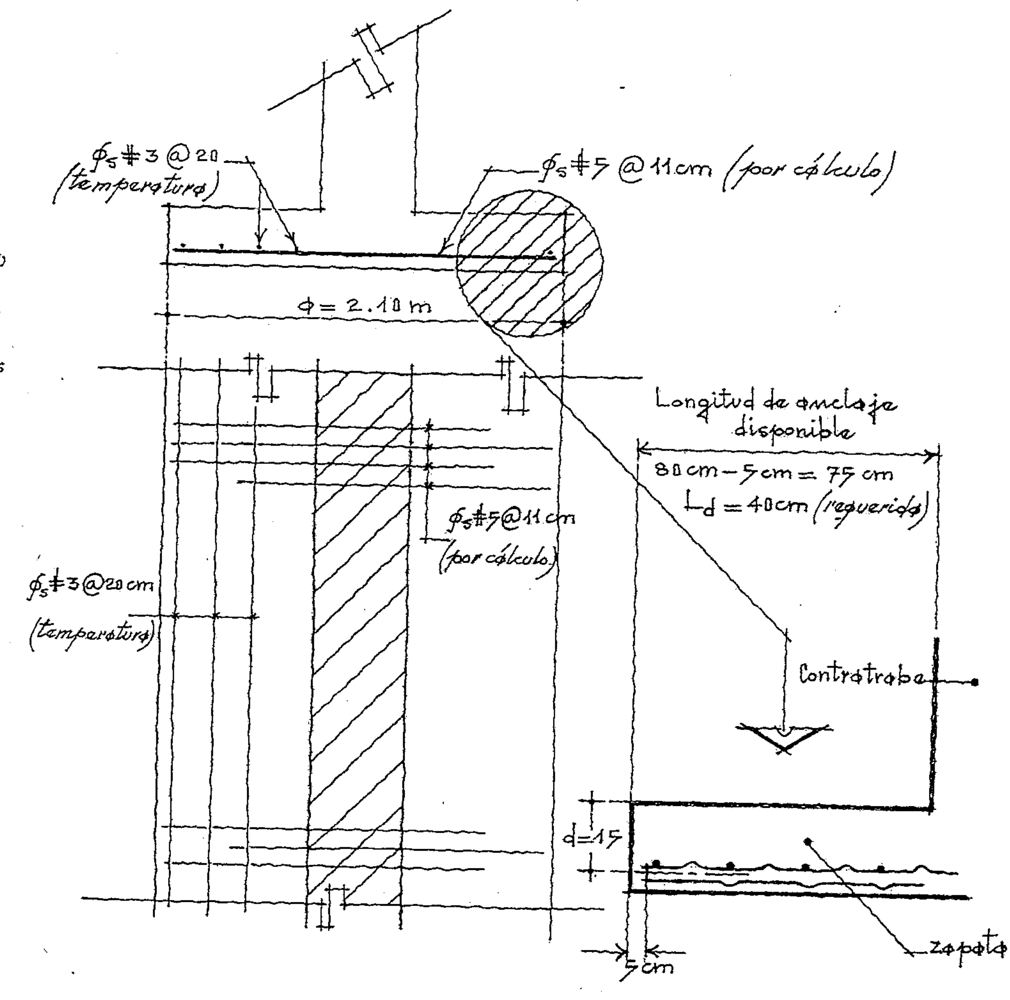
$$\text{con}\ \phi_s\#3 = \frac{3.0}{0.71} \simeq 5\phi_s\#3\ @\ 20\ cm$$

Longitud de desarrollo

$$L_d = 0.06\frac{A_{sv} f_Y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006\, d_b f_Y$$

$$\therefore 0.06\frac{1.99 \times 4200}{\sqrt{250}} \simeq 32\ cm$$

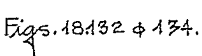
y, $0.006 \times 1.59 \times 4200 = 40\ cm$ (Se tomará la longitud de 40 cm)

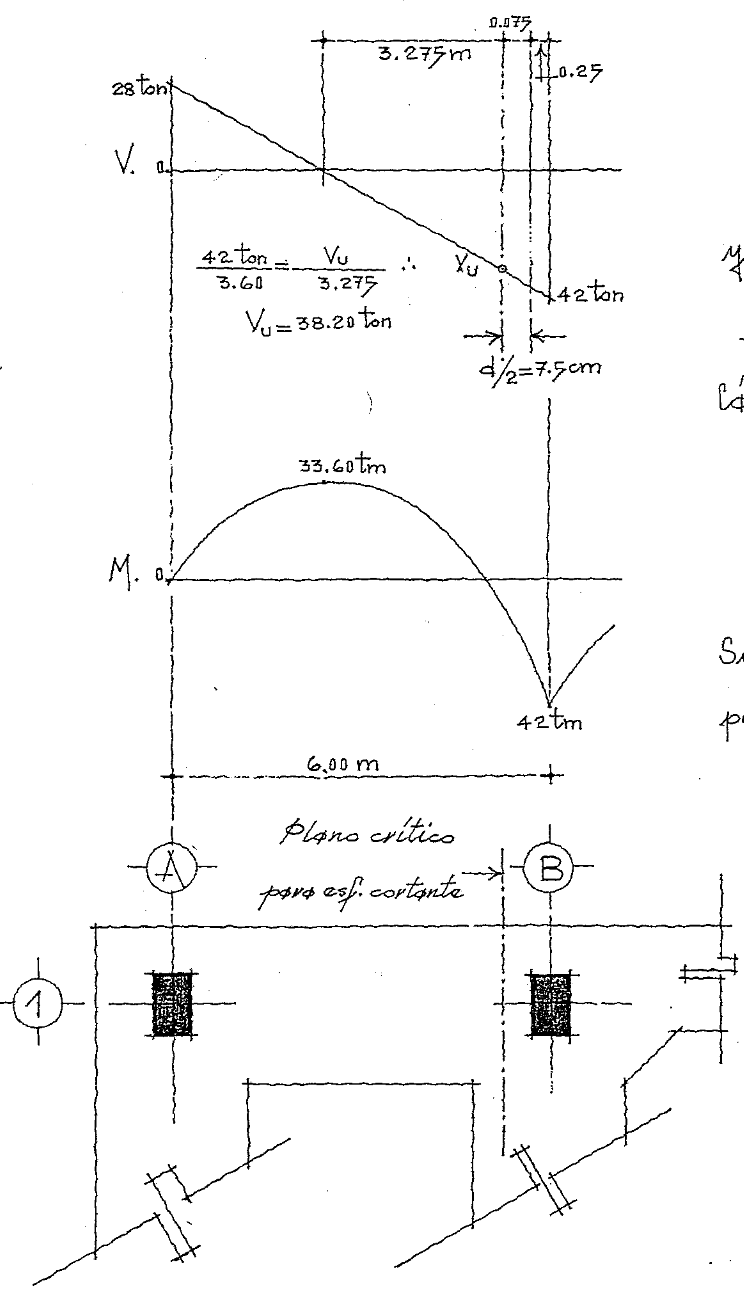


Figs. 18.129 a 131. Planta, corte transversal y detalle de la zapata mostrando sus armados.

Cálculo de la contratrabe

En las figs. 18.132 a 134, se presentan los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flexionantes en los principales puntos de la contratrabe.


Figs. 18.132 a 134.



Carga por metro lineal

$$\frac{70 \text{ ton}}{6.00 \text{ m}} \simeq 11.67 \text{ tm}$$

Porcentaje de acero

$$\rho_{s\,mín.} = \frac{14}{4200} \simeq 0.0033$$

y

$$\rho_b = \frac{0.85 \times 250 \times 0.8}{4200} \cdot \frac{6000}{10\,200} \simeq 0.023$$

Cálculo del peralte por cortante

$$y = \rho_s \frac{f_Y}{f'_c} = 0.023 \frac{4200}{250}$$

$$y \simeq 0.386$$

$$v_{u\,adm.} \leq 9.90 \text{ Kg/cm}^2$$

Suponemos para la contratrabe un peralte efectivo de

$$d = 95 \text{ cm} \; ; \; h = 100 \text{ cm}$$

$$v_u = \frac{V_u}{F_R\, b d} = \frac{38\,200}{0.7 \times 50 \times 95} \simeq 11.49 \text{ Kg/cm}^2$$

El reglamento especifica:

"En ningún caso se aceptará que v_u sea mayor que $1.3 F_R \sqrt{f_c^*}$" . . , por tanto

$$1.3 \times 0.7 \sqrt{0.8 \times 250} \simeq 12.87 \text{ Kg/cm}^2$$

$$12.87 > 11.49 \text{ Kg/cm}^2$$

Como $\rho_s > 0.01$; $V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$

$$V_{CR} \simeq 23511 \text{ Kg}$$

A continuación se calcula la separación de los estribos utilizando varilla de 3/8".

Separación de estribos; figs. 18.135 a 138.

$$s_{rp} = \frac{F_R A_{sv} f_y d\,(\text{sen } 90^\circ + \cos 90^\circ)}{V_U - V_{CR}} \leq \frac{F_R A_{sv} f_Y}{3.5 b}, \quad \ldots \text{ por tanto}$$

$$= \frac{0.7 \times 2 \times 0.71 \times 4200 \times 95}{38200 - 23511} \simeq 27 \text{cm}, \text{ y}$$

$$\frac{0.7 \times 0.71 \times 2 \times 4200}{3.5 \times 50} \simeq 24 \text{ cm}$$

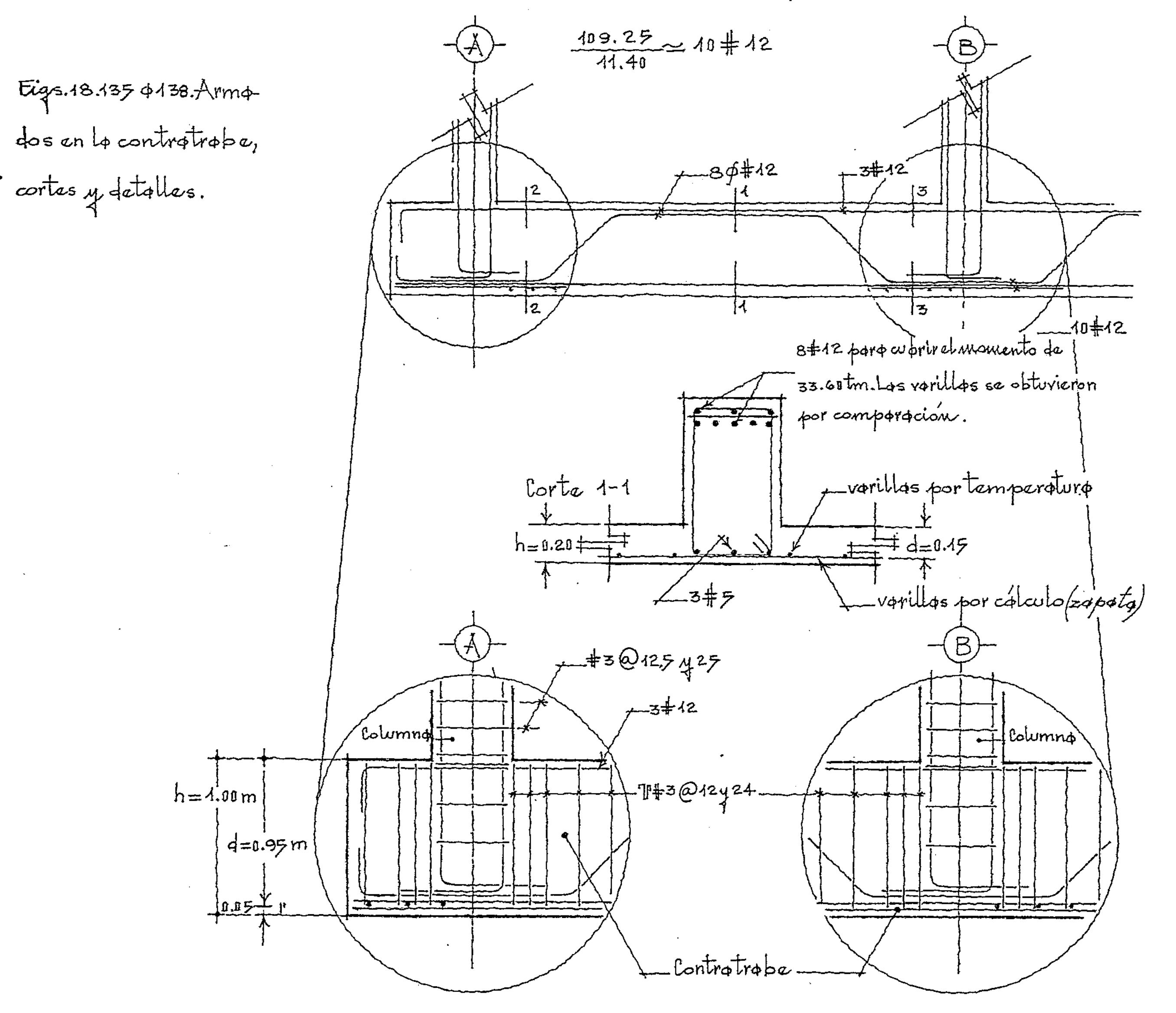
Los estribos del #3 se colocarán @ 24 cm.

Area de acero en la contratrabe

$$A_s = \rho_s b d = 0.023 \times 50 \times 95 = 109.25 \text{ cm}^2$$

Utilizando varillas del #12, se tiene:

$$\frac{109.25}{11.40} \simeq 10 \# 12$$



Figs. 18.135 a 138. Armados en la contratrabe, cortes y detalles.

Referencias bibliográficas

Capítulo 18

Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (ACI 318-83).

Barocio, A., *"Estructuras Hiperestáticas,"* E. Latina, México, 1951.

Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, México, 1988.

Gere, J.M., *"Distribución de Momentos,"* Cecsa, México, 1965.

Richart, F.E., *"Reinforced Concrete Wall and Column Footings,"* ACI Journal, 1948.

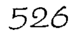
Talbot, A.H., *"Reinforced Concrete Wall and Column Footings,"* University of Illinois, 1913.

Hsieh, Y., *"Teoría Elemental de Estructuras,"* Prentice-Hall Internacional, Nueva Jersey, 1963.

Calderón, C.B., *"Diseño de Estructuras Resistentes a Temblor,"* Revista Arquitectura, México, 1961.

Cross, H., y Morgan, D.H., *"Estructuras Continuas de Hormigón Armado,"* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1932.

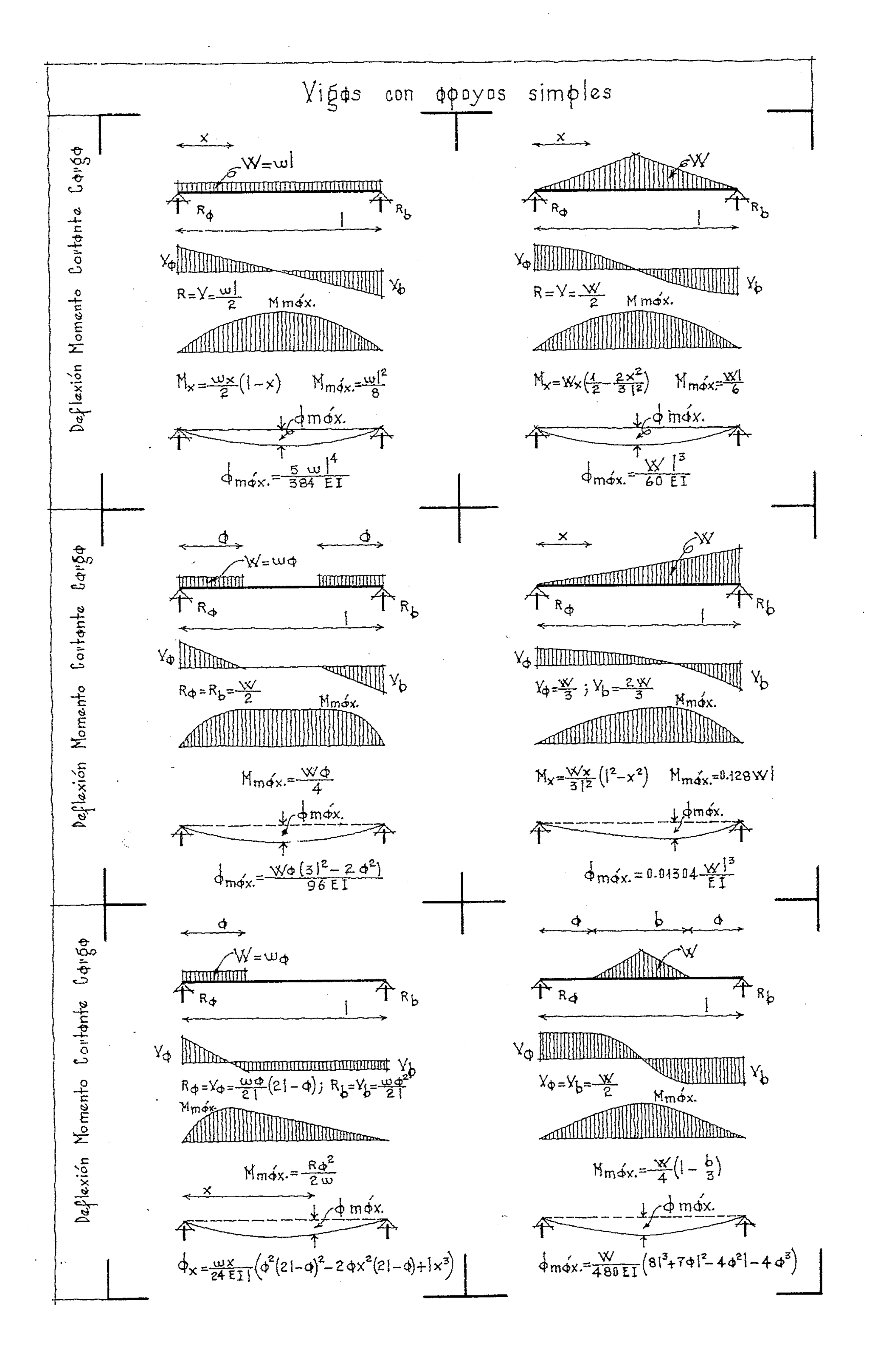
Lin, Y.T., y Stotesbury, D.S., *"Conceptos y Sistemas Estructurales para Arquitectos e Ingenieros,"* E. Limusa, México, 1991.

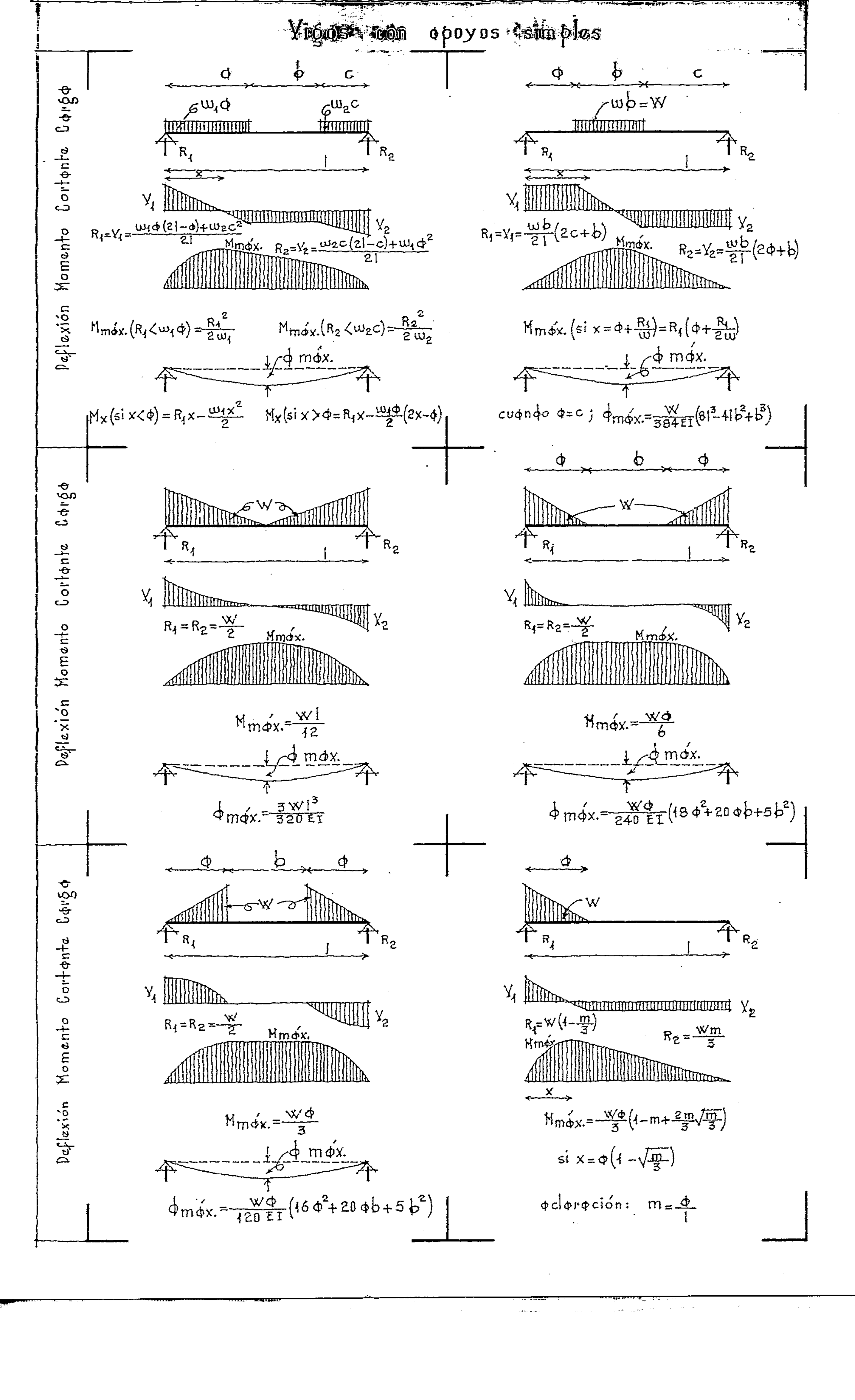


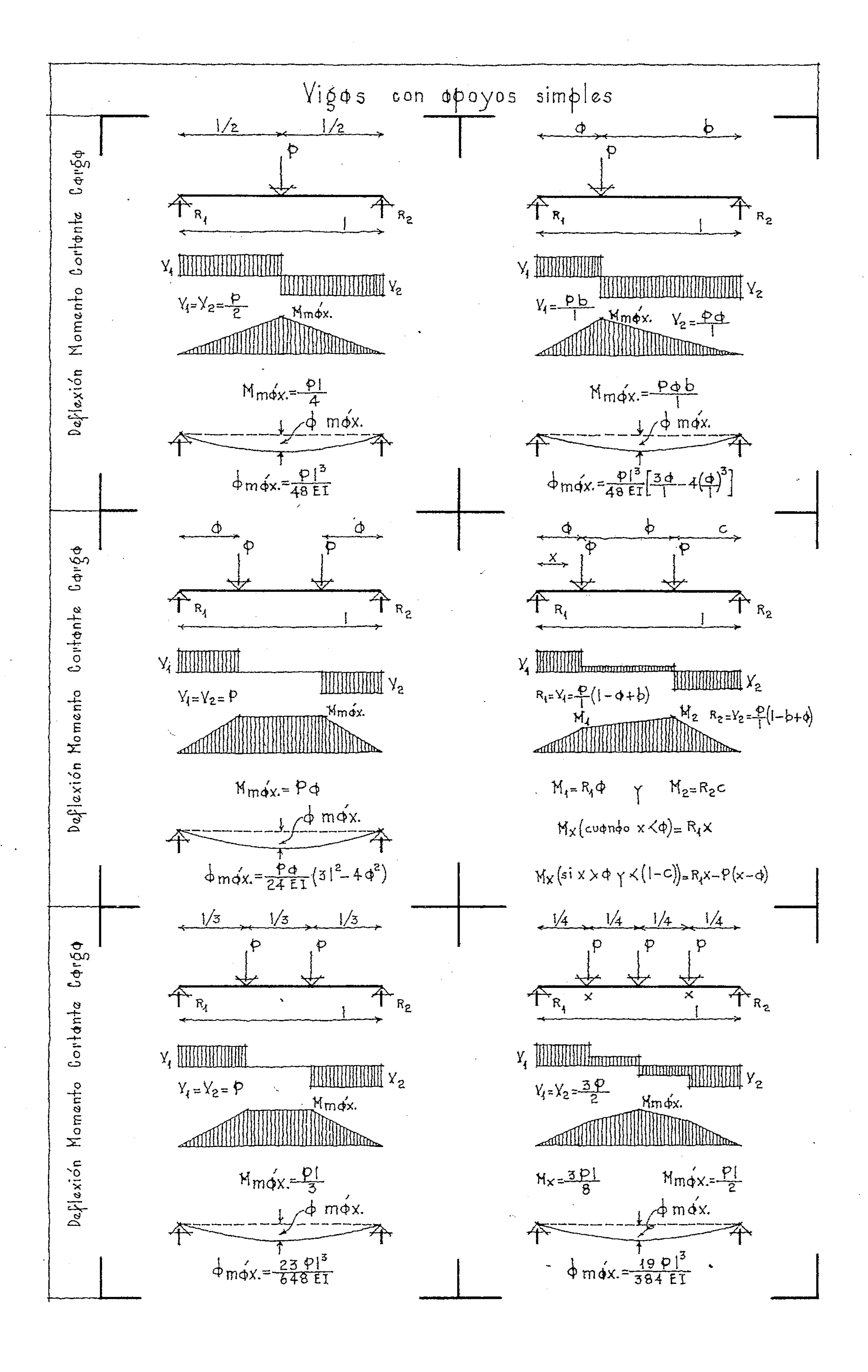
Fórmulas de flexión y diagramas para vigas bajo diferentes condiciones de carga

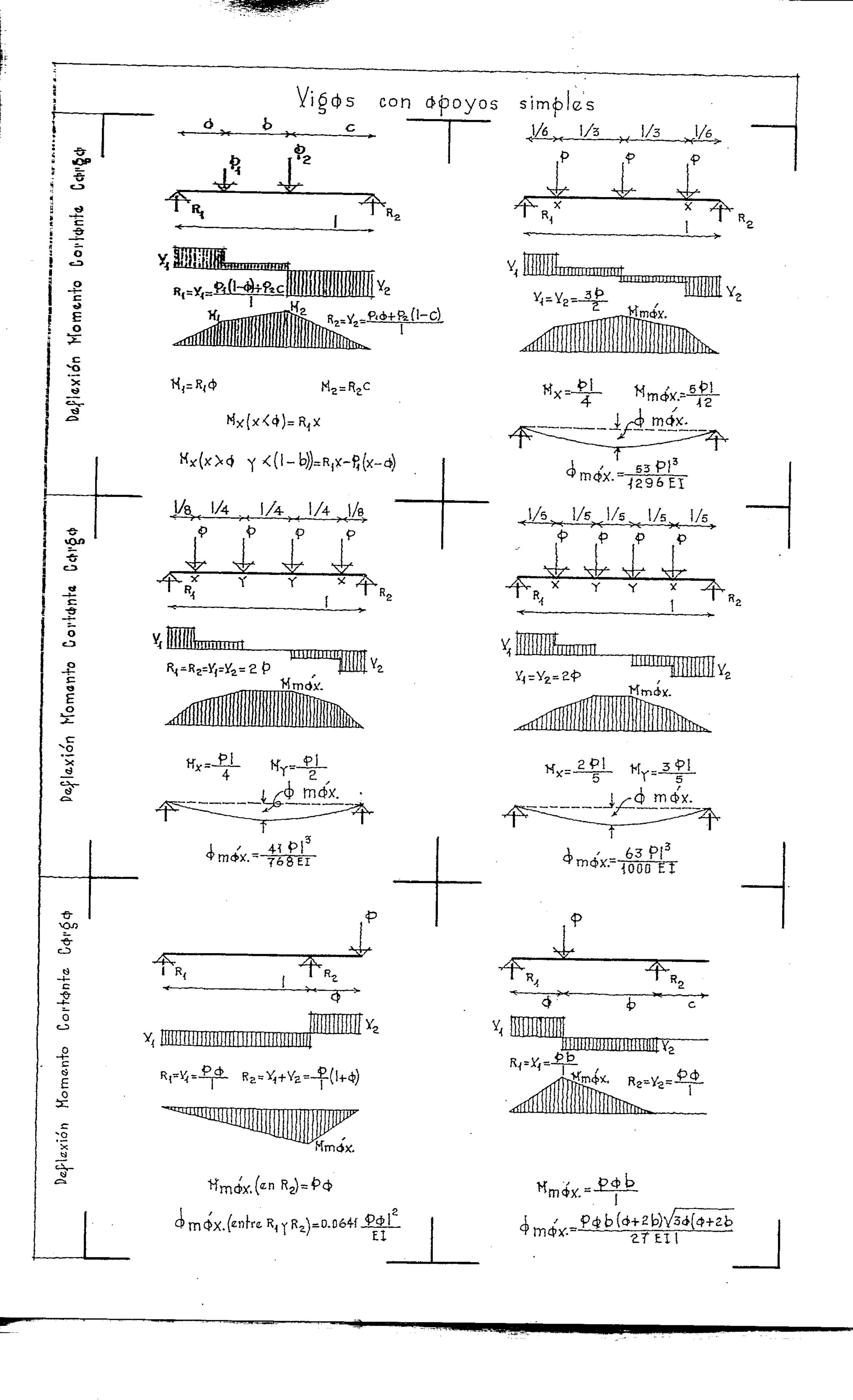
Nomenclatura

w	Carga uniformemente repartida por unidad de longitud, en Kg
W	Carga total, en Kg o en ton
R_a, R_b	Reacciones en apoyos, en Kg
R_1, R_2	Reacciones en apoyos, en Kg
V_a, V_b	Esfuerzos cortantes en Kg/cm^2
V_1, V_2	Esfuerzos cortantes en Kg/cm^2
$d_{máx.}$	Deflexión máxima en la viga en cm
$M_{máx.}$	Momento flexionante máximo en Kgcm
l	Longitud entre apoyos en cm
P	Carga concentrada, en Kg o en ton
a, b, c	Distancias parciales dentro de la longitud de una viga

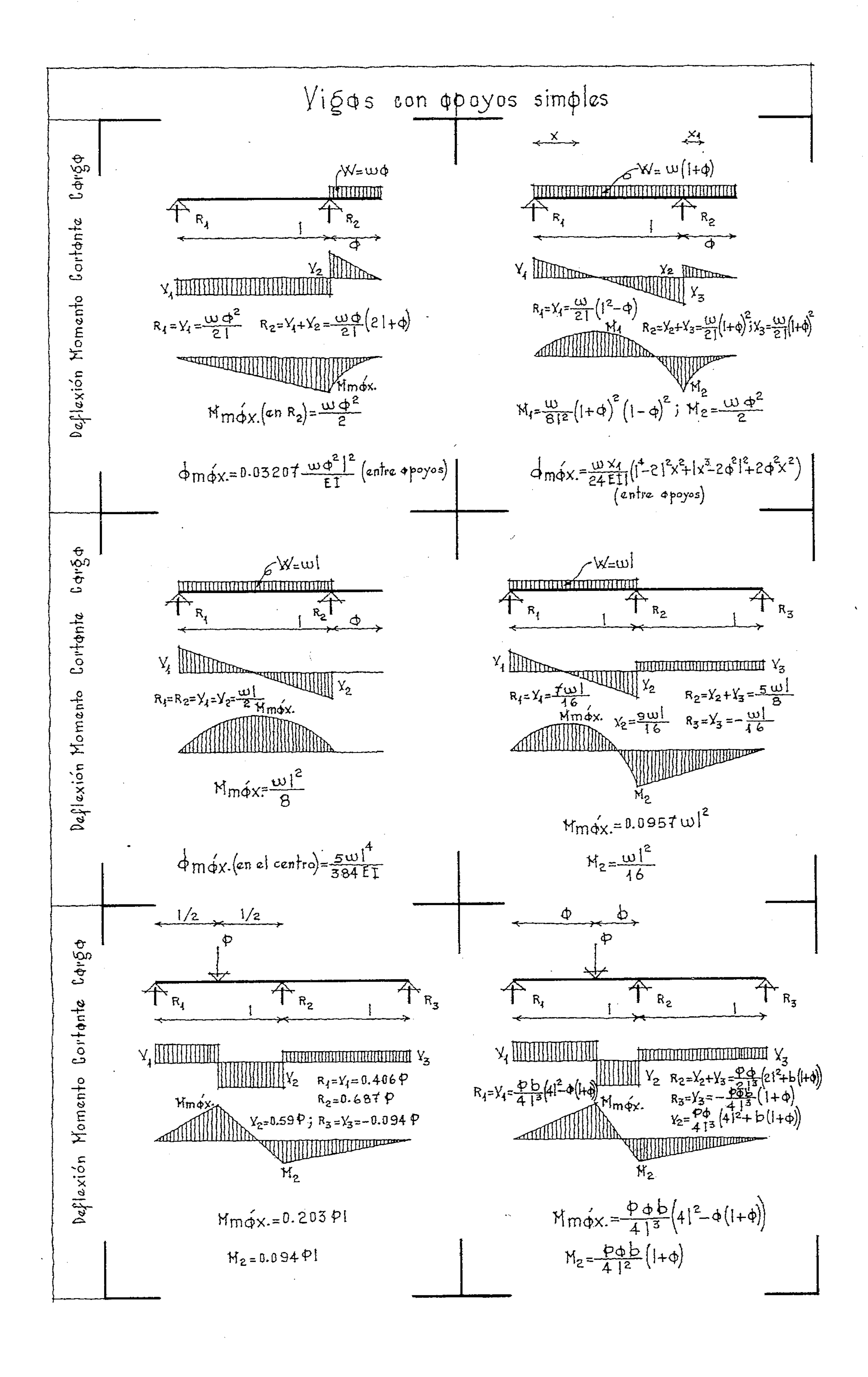

Vigas con apoyos simples
Deflexión Momento Cortante Carga
W=wl
Ra
Rb
R=V=wl/2
Mmáx.
Mx=wx/2(l−x)
Mmáx.=wl²/8
amáx.
amáx.=5 wl⁴/384 EI
W
R=V=W/2
Mx=Wx(1/2−2x²/3l²)
Mmáx.=Wl/6
amáx.=Wl³/60 EI
W=wa
Ra=Rb=W/2
Mmáx.=Wa/4
amáx.=Wa(3l²−2a²)/96 EI
Va=W/3 ; Vb=2W/3
Mx=Wx/3l²(l²−x²)
Mmáx.=0.128Wl
amáx.=0.01304 Wl³/EI
Ra=Va=wa/2l(2l−a); Rb=Vb=wa²/2l
Mmáx.=Ra²/2w
ax=wx/24EIl(a²(2l−a)²−2ax²(2l−a)+lx³)
a b a
Va=Vb=W/2
Mmáx.=W/4(l−b/3)
amáx.=W/480EI(8l³+7al²−4a²l−4a³)


Vigas con apoyos simples
Carga
Cortante
Momento
Deflexión
a b c
w1a
w2c
R1 R2
l
x
V1 V2
R1=V1=(w1a(2l−a)+w2c²)/2l
Mmáx.
R2=V2=(w2c(2l−c)+w1a²)/2l
Mmáx.(R1<w1a)=R1²/2w1
Mmáx.(R2<w2c)=R2²/2w2
ϕ máx.
Mx(si x<a)=R1x−w1x²/2
Mx(si x>a=R1x−(w1a/2)(2x−a)
wb=W
R1=V1=(wb/2l)(2c+b)
R2=V2=(wb/2l)(2a+b)
Mmáx.(si x=a+R1/w)=R1(a+R1/2w)
cuando a=c ; ϕmáx.=(W/384EI)(8l³−4lb²+b³)
W
R1=R2=W/2
Mmáx.=Wl/12
ϕmáx.=3Wl³/320EI
Mmáx.=Wa/6
ϕmáx.=(Wa/240EI)(18a²+20ab+5b²)
Mmáx.=Wa/3
ϕmáx.=(Wa/120EI)(16a²+20ab+5b²)
R1=W(1−m/3)
R2=Wm/3
Mmáx.=(Wa/3)(1−m+(2m/3)√(m/3))
si x=a(1−√(m/3))
aclaración: m=a/l

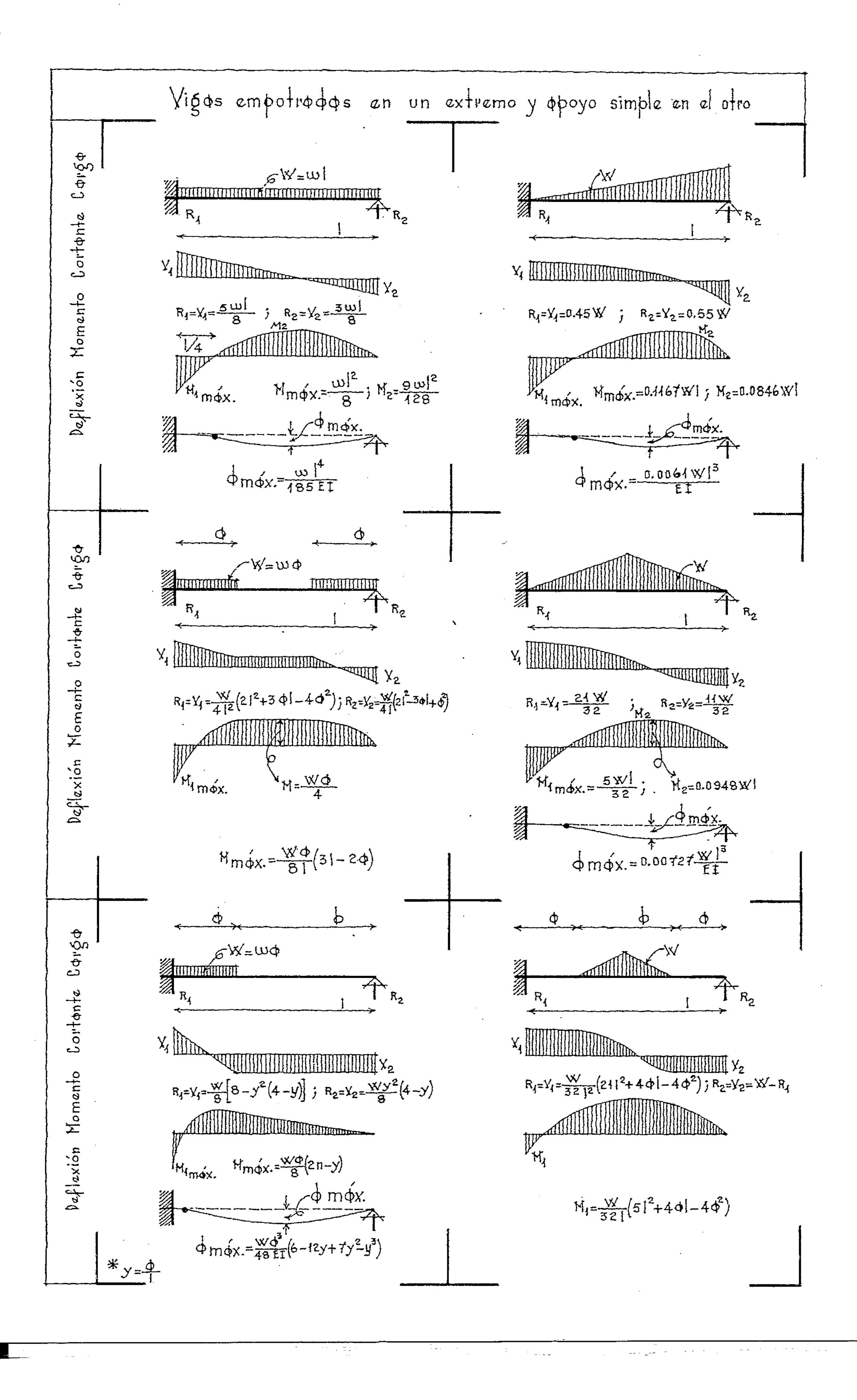

Vigas con apoyos simples
Deflexión Momento Cortante Carga
l/2 l/2
P
R1 R2
l
V1 V2
V1=V2=P/2
Mmáx.
Mmáx.=Pl/4
a máx.
a máx.=Pl³/48 EI
a b
V1=Pb/l
V2=Pa/l
Mmáx.=Pab/l
a máx.=Pl³/48 EI [3a/l − 4(a/l)³]
V1=V2=P
Mmáx.=Pa
a máx.=Pa/24 EI (3l² − 4a²)
a b c
x
R1=V1=P/l(l−a+b)
R2=V2=P/l(l−b+a)
M1 M2
M1=R1a y M2=R2c
Mx (cuando x<a)=R1x
Mx (si x>a y <(l−c))=R1x−P(x−a)
l/3 l/3 l/3
Mmáx.=Pl/3
a máx.=23 Pl³/648 EI
l/4 l/4 l/4 l/4
V1=V2=3P/2
Mx=3Pl/8
Mmáx.=Pl/2
a máx.=19 Pl³/384 EI

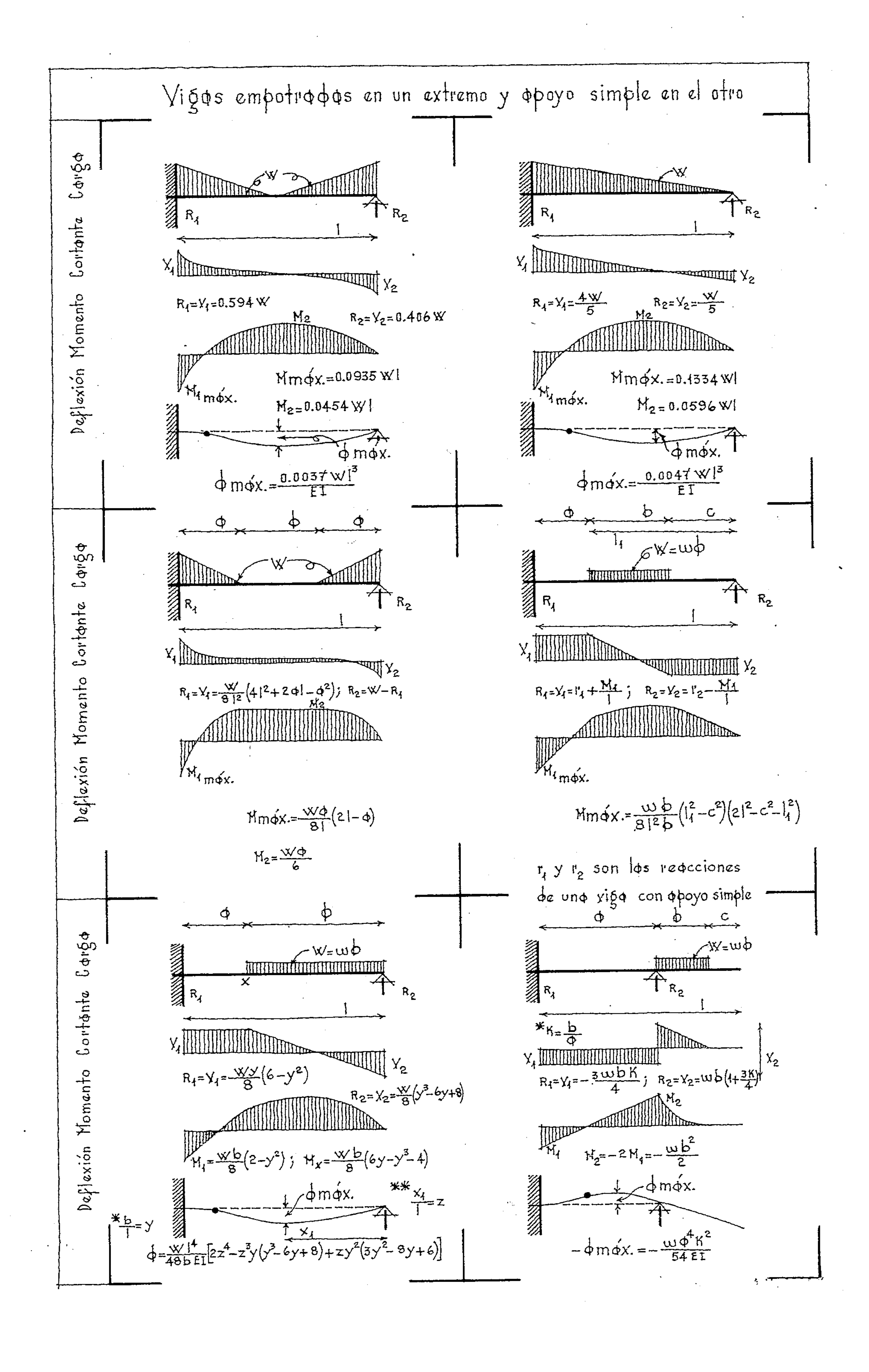


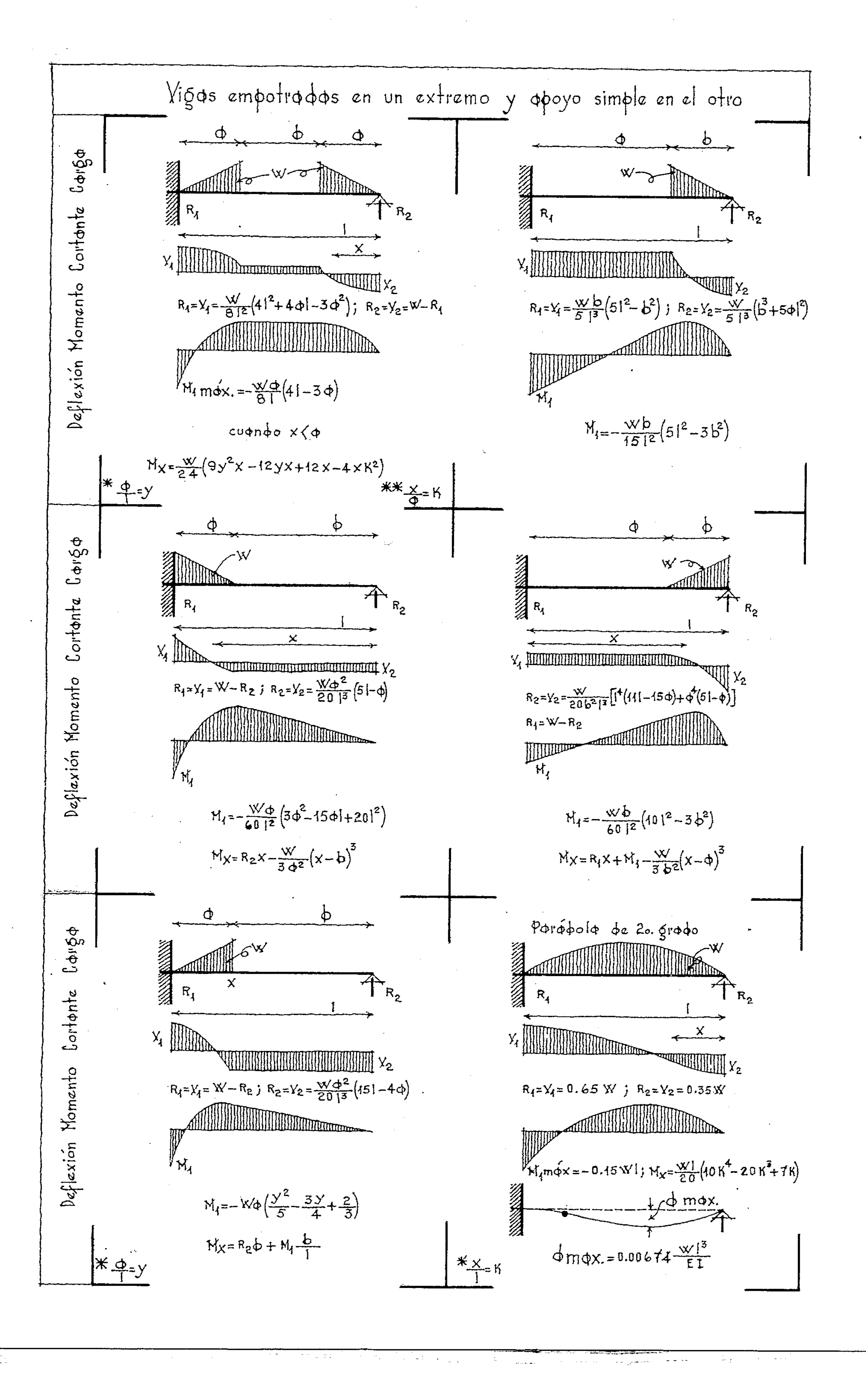
Vigas con apoyos simples
Deflexión Momento Cortante Carga
a b c
P1 P2
R1 R2
l
Y1 Y2
R1=Y1=P1(l-a)+P2c / l
M1 M2
R2=Y2=P1a+P2(l-c) / l
M1=R1a
M2=R2c
Mx(x<a)=R1x
Mx(x>a y <(l-b))=R1x-P1(x-a)
1/6 1/3 1/3 1/6
P P P
Y1=Y2=3P/2
Mmáx.
Mx=Pl/4
Mmáx.=5Pl/12
a máx.
a máx.=53Pl³/1296EI
1/8 1/4 1/4 1/4 1/8
R1=R2=Y1=Y2=2P
Mx=Pl/4
MY=Pl/2
a máx.=41Pl³/768EI
1/5 1/5 1/5 1/5 1/5
Y1=Y2=2P
Mx=2Pl/5
MY=3Pl/5
a máx.=63Pl³/1000EI
R1=Y1=Pa/l
R2=Y1+Y2=P/l(l+a)
Mmáx.(en R2)=Pa
a máx.(entre R1 y R2)=0.0641 Pal²/EI
R1=Y1=Pb/l
R2=Y2=Pa/l
Mmáx.=Pab/l
a máx.=Pab(a+2b)√3a(a+2b / 27EIl



Vigas con apoyos simples
Deflexión Momento Cortante Carga
W=wa
R1
R2
l
a
V1
V2
R1=V1=wa²/2l
R2=V1+V2=wa/2l (2l+a)
Mmáx.
Mmáx. (en R2)=wa²/2
dmáx.=0.03207 wa²l²/EI (entre apoyos)
x
x1
W=w(l+a)
V3
R1=V1=w/2l (l²-a)
R2=V2+V3=w/2l (l+a)²; V3=w/2l (l+a)²
M1
M2
M1=w/8l² (l+a)² (l-a)²; M2=wa²/2
dmáx.=wx1/24EIl (l⁴-2l²x²+lx³-2a²l²+2a²x²)
(entre apoyos)
Deflexión Momento Cortante Carga
W=wl
R1=R2=V1=V2=wl/2
Mmáx.=wl²/8
dmáx. (en el centro)=5wl⁴/384EI
R3
R1=V1=7wl/16
V2=9wl/16
R2=V2+V3=5wl/8
R3=V3=-wl/16
Mmáx.=0.0957wl²
M2=wl²/16
Deflexión Momento Cortante Carga
l/2
P
R1=V1=0.406P
R2=0.687P
V2=0.59P; R3=V3=-0.094P
Mmáx.=0.203Pl
M2=0.094Pl
b
R1=V1=Pb/4l³ (4l²-a(l+a))
R2=V2+V3=Pa/2l³ (2l²+b(l+a))
R3=V3=-Pab/4l³ (l+a)
V2=Pa/4l³ (4l²+b(l+a))
Mmáx.=Pab/4l³ (4l²-a(l+a))
M2=Pab/4l² (l+a)

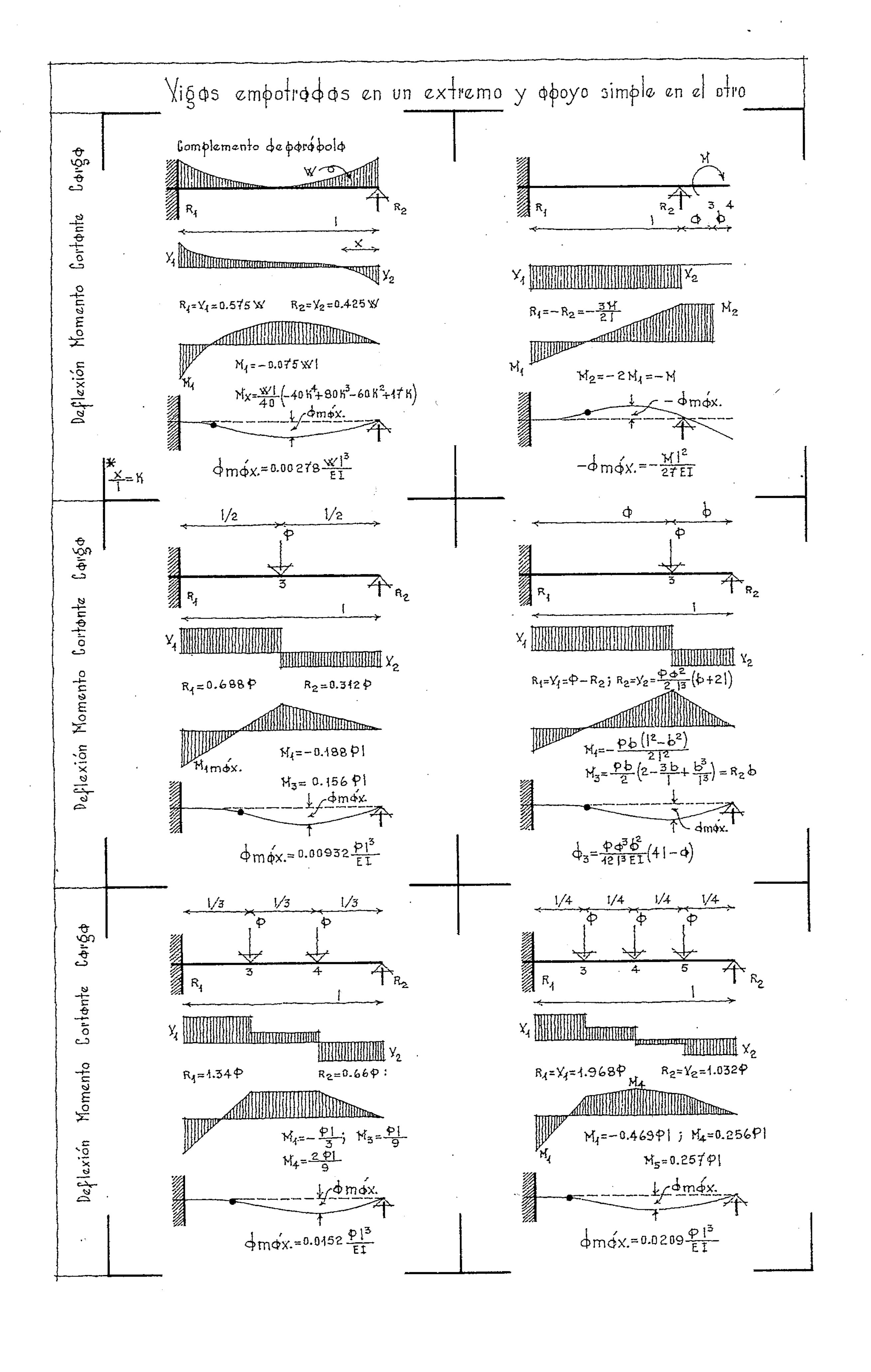

Vigas empotradas en un extremo y apoyo simple en el otro
Deflexión Momento Cortante Carga
W=wl
R1
R2
l
Y1
Y2
R1=Y1=5wl/8 ; R2=Y2=3wl/8
l/4
M2
M1 máx.
Mmáx.=wl²/8 ; M2=9wl²/128
ϕ máx.
ϕ máx.=wl⁴/185EI
W
R1=Y1=0.45W ; R2=Y2=0.55W
M1 máx.
Mmáx.=0.1167Wl ; M2=0.0846Wl
ϕ máx.=0.0061Wl³/EI
a
W=wa
R1=Y1=W/4l²(2l²+3al−4a²); R2=Y2=W/4l(2l²−3al+a²)
M1 máx.
M=Wa/4
Mmáx.=Wa/8l(3l−2a)
R1=Y1=21W/32 ; R2=Y2=11W/32
M1 máx.=5Wl/32 ; M2=0.0948Wl
ϕ máx.=0.00727 Wl³/EI
b
R1=Y1=W/8[8−y²(4−y)] ; R2=Y2=Wy²/8(4−y)
M1 máx.
Mmáx.=Wa/8(2n−y)
ϕ máx.=Wa³/48EI(6−12y+7y²−y³)
R1=Y1=W/32l²(21l²+4al−4a²); R2=Y2=W−R1
M1
M1=W/32l(5l²+4al−4a²)
* y=a/l


Vigas empotradas en un extremo y apoyo simple en el otro
Deflexión Momento Cortante Carga
W
R1
R2
l
Y1
Y2
R1=Y1=0.594 W
R2=Y2=0.406 W
M2
Mmáx.=0.0935 Wl
M1 máx.
M2=0.0454 Wl
a máx.
a máx.= 0.0037 Wl³ / EI
R1=Y1= 4W/5
R2=Y2= W/5
Mmáx.=0.1334 Wl
M2=0.0596 Wl
a máx.= 0.0047 Wl³ / EI
a
b
c
l1
W=wa
R1=Y1= W/8l² (4l²+2al−a²); R2=W−R1
Mmáx.= Wa/8l (2l−a)
M2= Wa/6
R1=Y1=r1+ M1/l ; R2=Y2=r2− M1/l
Mmáx.= wb/8l²b (l1²−c²)(2l²−c²−l1²)
r1 y r2 son las reacciones de una viga con apoyo simple
x
W=wb
R1=Y1= Wy/8 (6−y²)
R2=Y2= W/8 (y³−6y+8)
M1= wb/8 (2−y²); Mx= wb/8 (6y−y³−4)
*b/l=y
**x1/l=z
x1
a= Wl⁴/48bEI [2z⁴−z³y(y³−6y+8)+zy²(3y²−8y+6)]
*K= b/a
R1=Y1=− 3wbK/4 ; R2=Y2=wb(1+3K/4)
M1
H2=−2M1=− wb²/2
−a máx.=− wa⁴K²/54EI

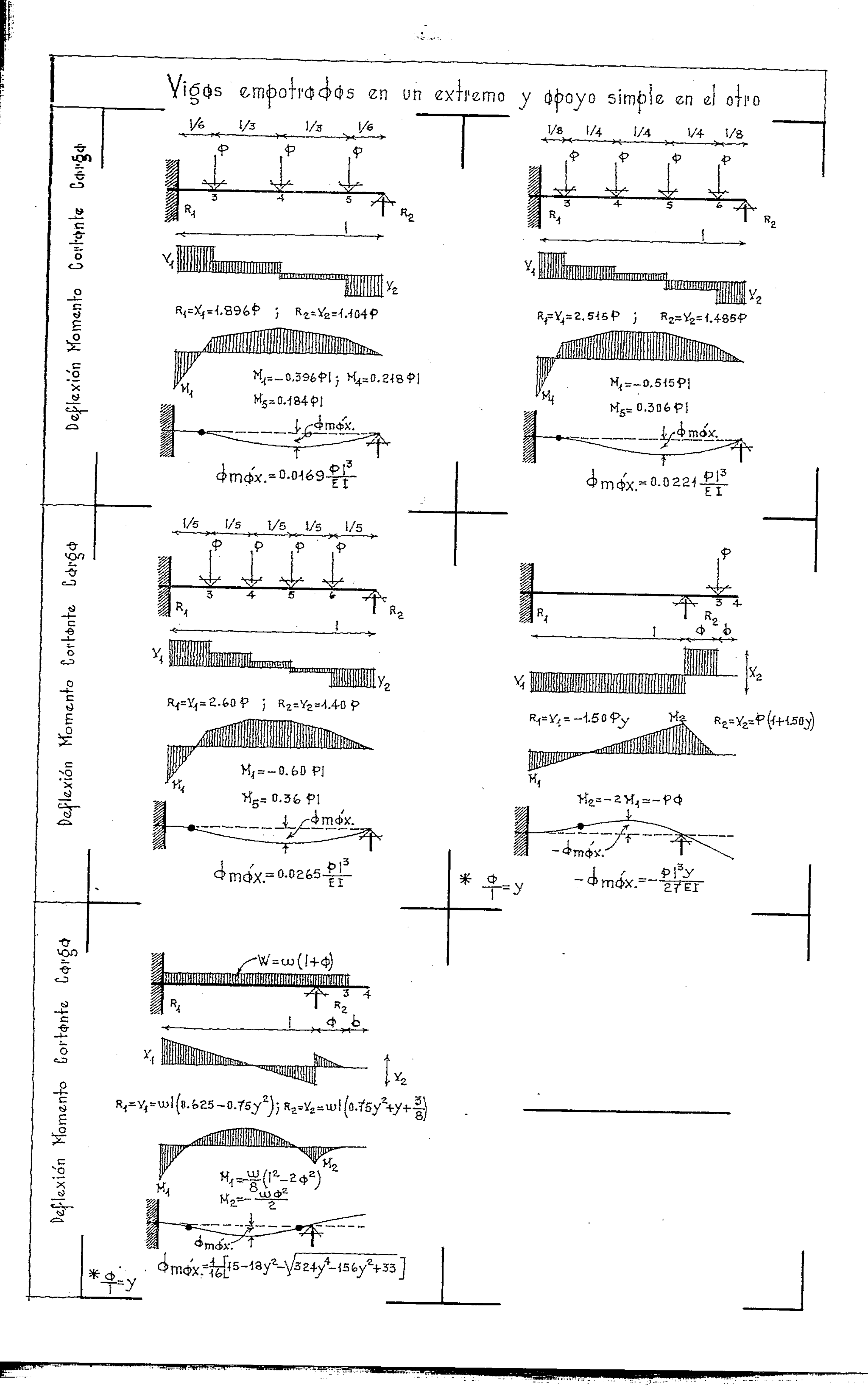


Vigas empotradas en un extremo y apoyo simple en el otro
Deflexión Momento Cortante Carga
a b a
W
R1 R2
l
x
Y1 Y2
R1=Y1=W/8l2(4l2+4al-3a2); R2=Y2=W-R1
M1 máx.=-Wa/8l(4l-3a)
cuando x<a
Mx=W/24(9y2x-12yx+12x-4xK2)
* a/l=y
** x/a=K
a b
W
R1 R2
l
Y1 Y2
R1=Y1=Wb/5l3(5l2-b2); R2=Y2=W/5l3(b3+5al2)
M1
M1=-Wb/15l2(5l2-3b2)
Deflexión Momento Cortante Carga
a b
W
R1 R2
l
x
Y1 Y2
R1=Y1=W-R2; R2=Y2=Wa2/20l3(5l-a)
M1
M1=-Wa/60l2(3a2-15al+20l2)
Mx=R2x-W/3a2(x-b)3
a b
W
R1 R2
l
x
Y1 Y2
R2=Y2=W/20b2l3[l4(11l-15a)+a4(5l-a)]
R1=W-R2
M1
M1=-Wb/60l2(10l2-3b2)
Mx=R1x+M1-W/3b2(x-a)3
Deflexión Momento Cortante Carga
a b
W
R1 x R2
l
Y1 Y2
R1=Y1=W-R2; R2=Y2=Wa2/20l3(15l-4a)
M1
M1=-Wa(y2/5-3y/4+2/3)
Mx=R2b+M1 b/l
* a/l=y
Parábola de 2o. grado
W
R1 R2
l
x
Y1 Y2
R1=Y1=0.65 W; R2=Y2=0.35W
M1máx=-0.15Wl; Mx=Wl/20(10K4-20K3+7K)
α máx.
α máx.=0.00674 Wl3/EI
* x/l=K

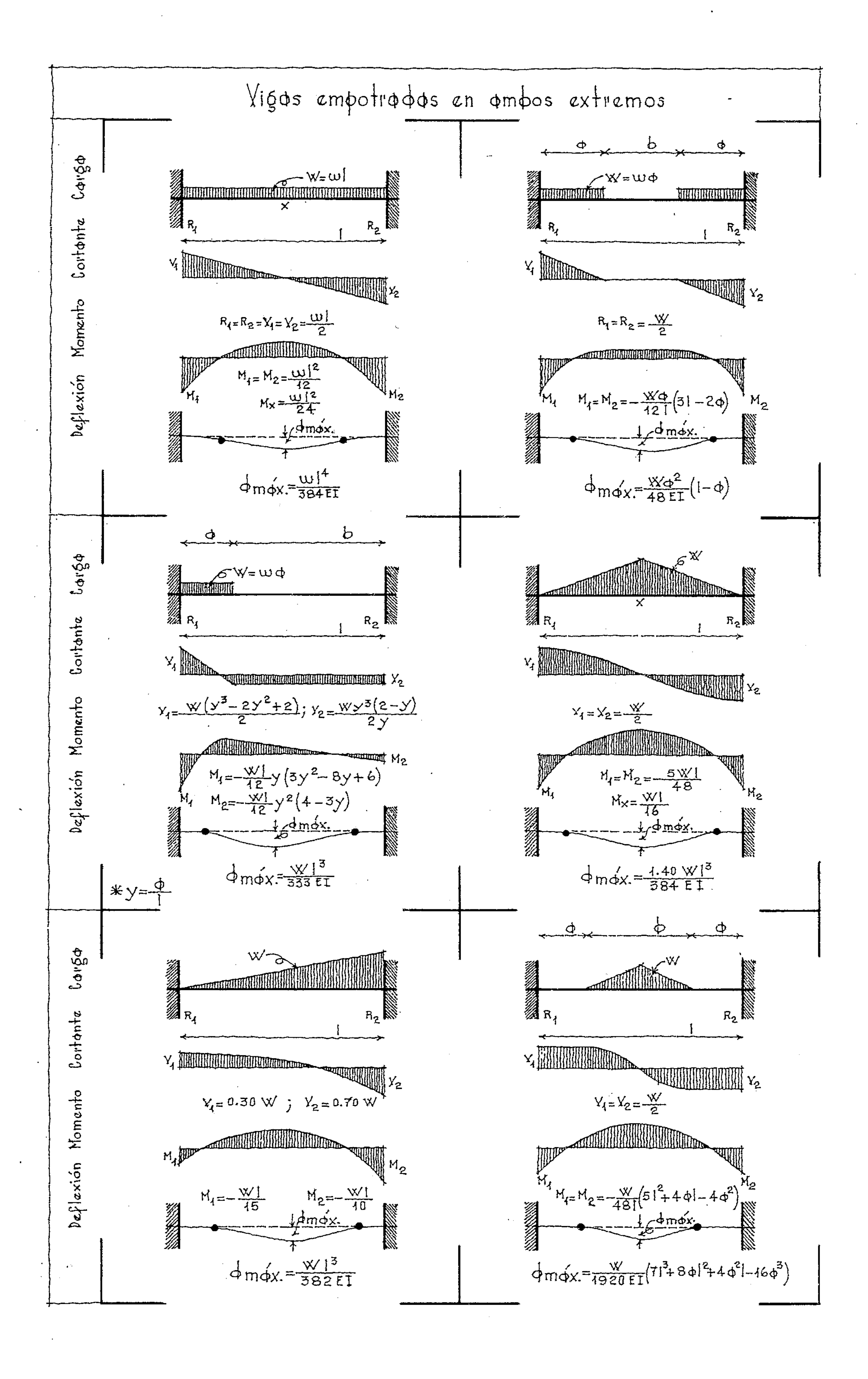
Vigas empotradas en un extremo y apoyo simple en el otro

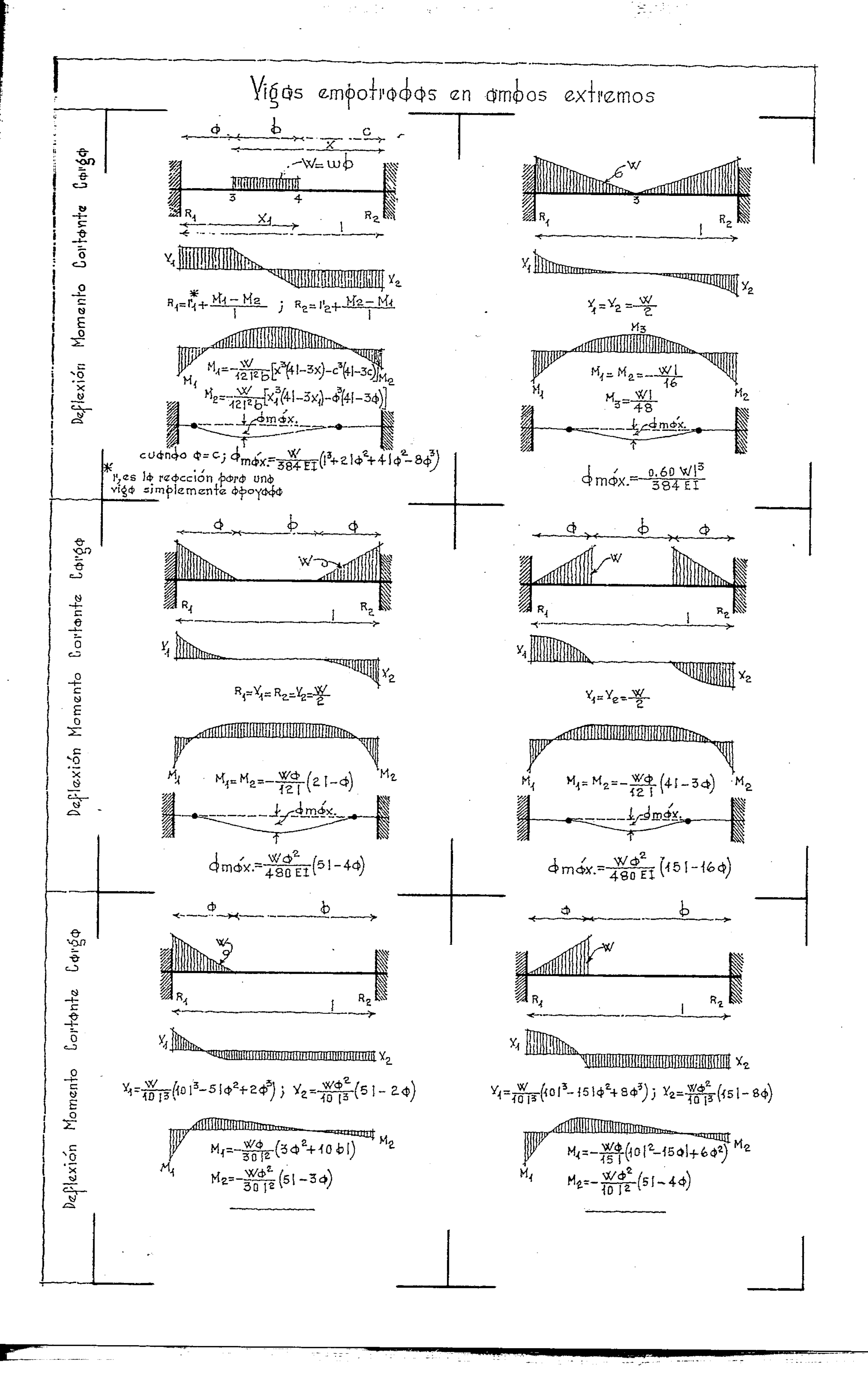


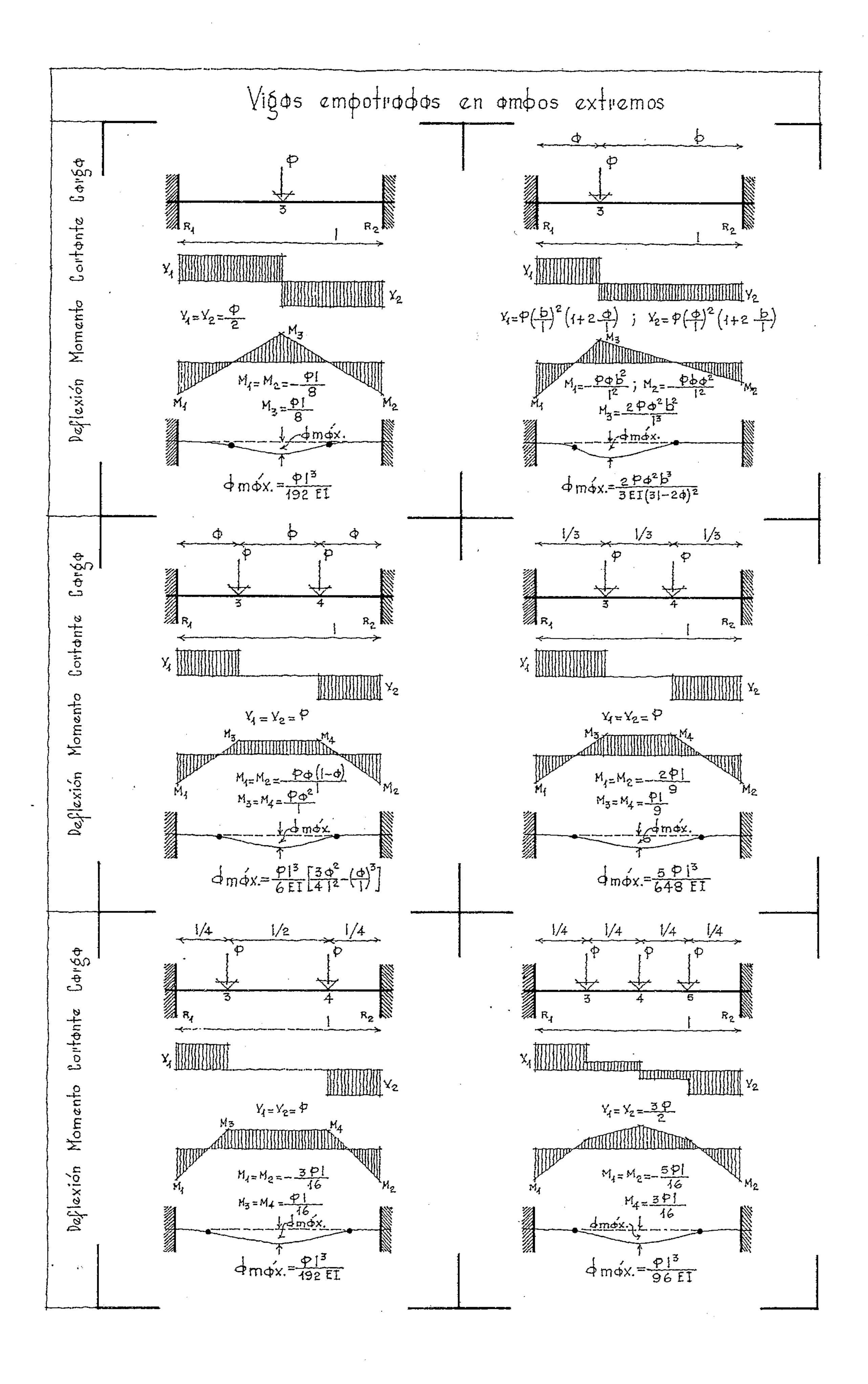
Vigas empotradas en un extremo y apoyo simple en el otro

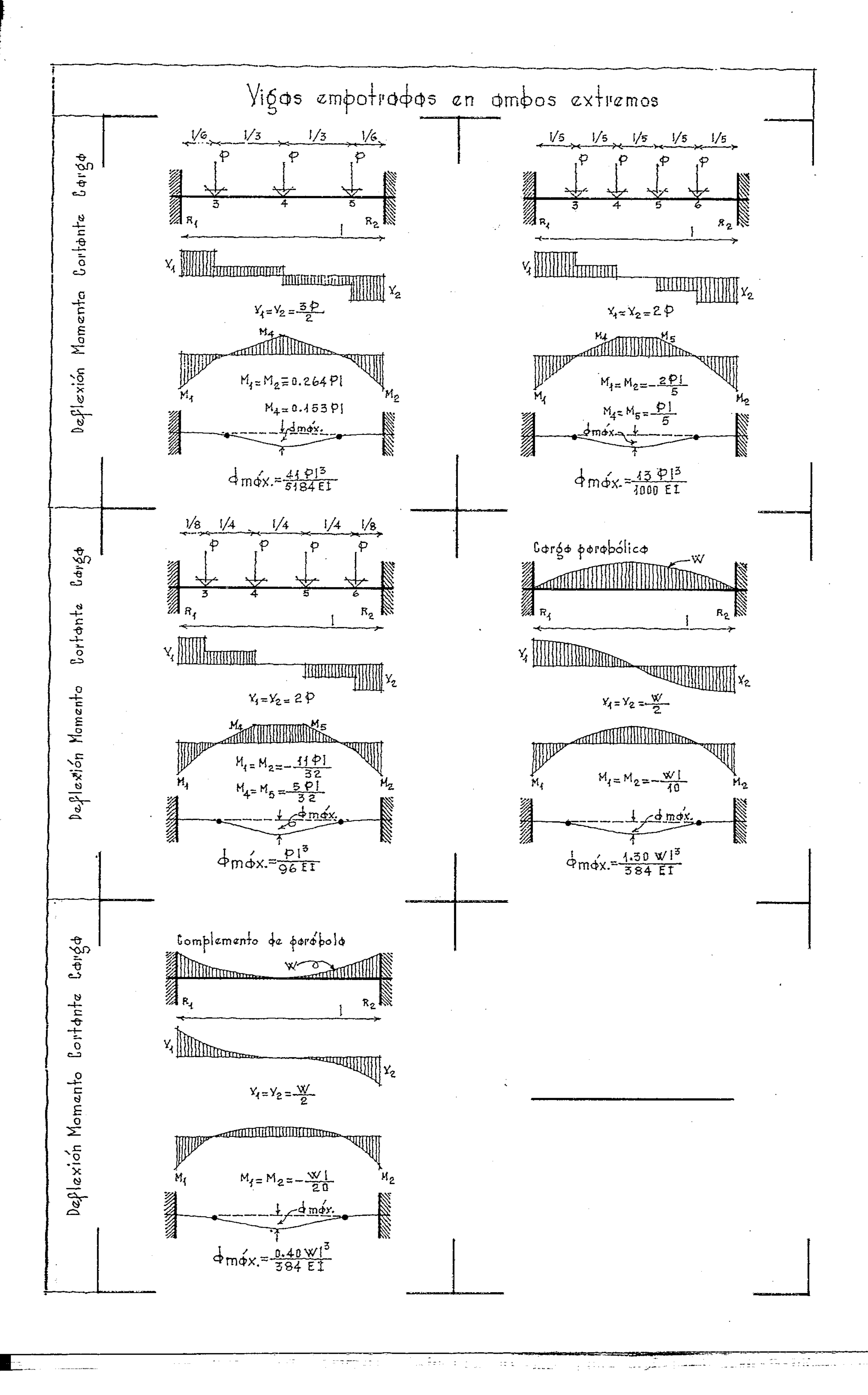


Vigas empotradas en ambos extremos

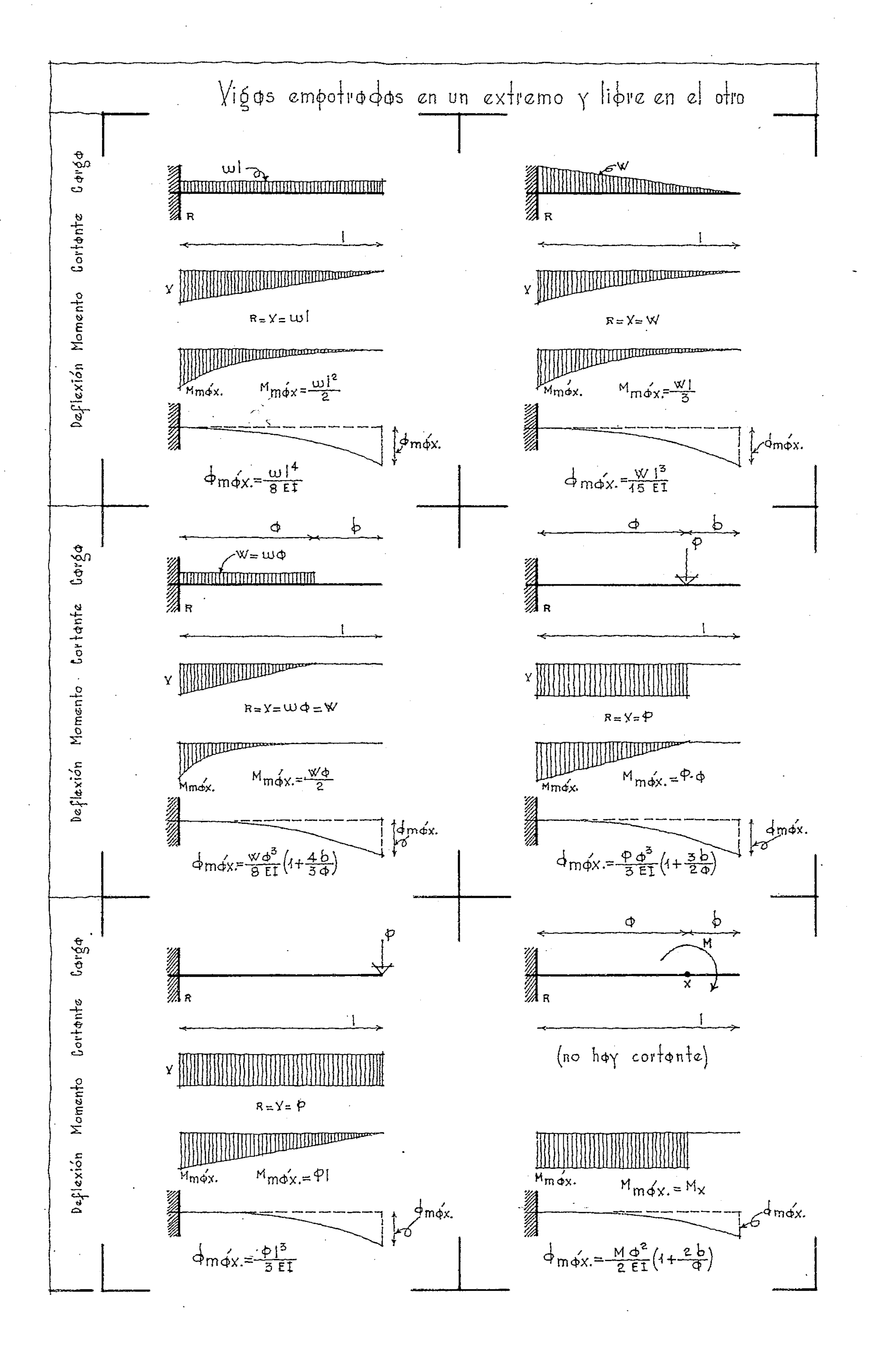



Vigas empotradas en ambos extremos
Deflexión Momento Cortante Carga
$R_1 = r_1^* + \frac{M_1 - M_2}{l}$; $R_2 = r_2 + \frac{M_2 - M_1}{l}$
$M_1 = -\frac{W}{12 l^2 b}[x^3(4l-3x) - c^3(4l-3c)]$
$M_2 = -\frac{W}{12 l^2 b}[x_1^3(4l-3x_1) - a^3(4l-3a)]$
cuando $a = c$; $d_{máx.} = \frac{W}{384 EI}(l^3 + 2la^2 + 4la^2 - 8a^3)$
* r_1 es la reacción para una viga simplemente apoyada
$Y_1 = Y_2 = \frac{W}{2}$
$M_1 = M_2 = -\frac{Wl}{16}$
$M_3 = \frac{Wl}{48}$
$d_{máx.} = \frac{0.60\,Wl^3}{384\,EI}$
$R_1 = Y_1 = R_2 = Y_2 = \frac{W}{2}$
$M_1 = M_2 = -\frac{Wa}{12l}(2l - a)$
$d_{máx.} = \frac{Wa^2}{480\,EI}(5l - 4a)$
$Y_1 = Y_2 = \frac{W}{2}$
$M_1 = M_2 = -\frac{Wa}{12l}(4l - 3a)$
$d_{máx.} = \frac{Wa^2}{480\,EI}(15l - 16a)$
$Y_1 = \frac{W}{10 l^3}(10l^3 - 5la^2 + 2a^3)$; $Y_2 = \frac{Wa^2}{10 l^3}(5l - 2a)$
$M_1 = -\frac{Wa}{30 l^2}(3a^2 + 10bl)$
$M_2 = -\frac{Wa^2}{30 l^2}(5l - 3a)$
$Y_1 = \frac{W}{10 l^3}(10l^3 - 15la^2 + 8a^3)$; $Y_2 = \frac{Wa^2}{10 l^3}(15l - 8a)$
$M_1 = -\frac{Wa}{15l}(10l^2 - 15al + 6a^2)$
$M_2 = -\frac{Wa^2}{10 l^2}(5l - 4a)$


Vigas empotradas en ambos extremos
Carga Cortante Momento Deflexión
Y1 = Y2 = P/2
M1 = M2 = −Pl/8
M3 = Pl/8
d máx. = Pl³/192 EI
Y1 = P(b/l)²(1+2 a/l) ; Y2 = P(a/l)²(1+2 b/l)
M1 = −Pab²/l² ; M2 = −Pba²/l²
M3 = 2Pa²b²/l³
d máx. = 2Pa²b³/3EI(3l−2a)²
Y1 = Y2 = P
M1 = M2 = −Pa(l−a)/l
M3 = M4 = Pa²/l
d máx. = Pl³/6EI [3a²/4l² − (a/l)³]
l/3 l/3 l/3
M1 = M2 = −2Pl/9
M3 = M4 = Pl/9
d máx. = 5Pl³/648 EI
l/4 l/2 l/4
M1 = M2 = −3Pl/16
M3 = M4 = Pl/16
d máx. = Pl³/192 EI
l/4 l/4 l/4 l/4
Y1 = Y2 = 3P/2
M1 = M2 = −5Pl/16
M4 = 3Pl/16
d máx. = Pl³/96 EI



Vigas empotradas en ambos extremos
Carga
Cortante
Momento
Deflexión
l/6 l/3 l/3 l/6
P P P
3 4 5
R_1 R_2
l
Y_1 Y_2
$Y_1=Y_2=\frac{3P}{2}$
M_4
$M_1=M_2=0.264\,Pl$
M_1 M_2
$M_4=0.153\,Pl$
dmáx.
$d\,máx.=\frac{41\,Pl^3}{5184\,EI}$
l/5 l/5 l/5 l/5 l/5
P P P P
3 4 5 6
$Y_1=Y_2=2P$
M_4 M_5
$M_1=M_2=-\frac{2Pl}{5}$
$M_4=M_5=\frac{Pl}{5}$
$d\,máx.=\frac{13\,Pl^3}{1000\,EI}$
l/8 l/4 l/4 l/4 l/8
P P P P
3 4 5 6
$Y_1=Y_2=2P$
$M_1=M_2=-\frac{11\,Pl}{32}$
$M_4=M_5=\frac{5\,Pl}{32}$
$d\,máx.=\frac{Pl^3}{96\,EI}$
Carga parabólica
W
$Y_1=Y_2=\frac{W}{2}$
$M_1=M_2=-\frac{Wl}{10}$
$d\,máx.=\frac{1.30\,Wl^3}{384\,EI}$
Complemento de parábola
W
$Y_1=Y_2=\frac{W}{2}$
$M_1=M_2=-\frac{Wl}{20}$
$d\,máx.=\frac{0.40\,Wl^3}{384\,EI}$



Vigas empotradas en un extremo y libre en el otro
Carga
Cortante
Momento
Deflexión
wl
R
l
Y
R = Y = wl
Mmáx.
$M_{máx} = \frac{wl^2}{2}$
dmáx.
$d_{máx.} = \frac{wl^4}{8\,EI}$
W
R
l
Y
R = Y = W
Mmáx.
$M_{máx.} = \frac{Wl}{3}$
dmáx.
$d_{máx.} = \frac{Wl^3}{15\,EI}$
a
b
W = wa
R
l
Y
R = Y = wa = W
Mmáx.
$M_{máx.} = \frac{Wa}{2}$
dmáx.
$d_{máx} = \frac{Wa^3}{8\,EI}\left(1+\frac{4b}{3a}\right)$
a
b
P
R
l
Y
R = Y = P
Mmáx.
$M_{máx.} = P \cdot a$
dmáx.
$d_{máx.} = \frac{Pa^3}{3\,EI}\left(1+\frac{3b}{2a}\right)$
P
R
l
Y
R = Y = P
Mmáx.
$M_{máx.} = Pl$
dmáx.
$d_{máx.} = \frac{Pl^3}{3\,EI}$
a
b
M
x
R
l
(no hay cortante)
Mmáx.
$M_{máx.} = M_x$
dmáx.
$d_{máx.} = \frac{Ma^2}{2\,EI}\left(1+\frac{2b}{a}\right)$

Tablas

onstantes para calcular concreto

f_y	f_s	f'_c	n	f_c	K	j	Q ó K
2,530	1,265	140	17	63	0.46	0.85	12.31
		175	15	79	0.48	0.84	15.91
		210	14	95	0.51	0.83	20.10
		250	13	113	0.54	0.82	25.00
	1,400	140	17	63	0.43	0.86	11.65
		175	15	79	0.46	0.85	15.43
		210	14	95	0.49	0.84	19.55
		250	13	113	0.51	0.83	23.95
4,000	2,000	140	17	63	0.35	0.88	9.71
		175	15	79	0.37	0.88	12.85
		210	14	95	0.40	0.87	16.53
		250	13	113	0.42	0.86	20.40
		280	12	126	0.43	0.86	23.30
		300	12	135	0.45	0.85	25.80
6,000	3,000	175	15	79	0.28	0.91	10.10
		210	14	95	0.31	0.90	13.25
		250	13	113	0.33	0.89	16.60
		280	12	126	0.33	0.89	18.50
		300	12	135	0.35	0.88	20.80
		350	11	158	0.37	0.88	25.70
		400	10	180	0.37	0.88	29.30

Tabla n. 1

Constantes para calcular concreto

f_Y	f_s	f'_c	n	f_c	K	j	Q ó K
2,530	1,265	150	16	67.50	0.47	0.84	13.60
		200	14	90.00	0.50	0.83	18.70
		250	13	113.00	0.53	0.82	24.50
		300	12	135.00	0.56	0.82	31.00
		350	11	158.00	0.57	0.81	36.50
4,200	2,100	150	16	67.50	0.34	0.88	10.60
		200	14	90.00	0.38	0.87	15.00
		250	13	113.00	0.40	0.87	20.00
		300	12	135.00	0.43	0.85	25.00
		350	11	158.00	0.45	0.85	30.40

Tabla no. 2

